УДК 517.95+511.2

М. М. Симотюк

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ВИЗНАЧНИКА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ, ОДИН З ВУЗЛІВ ЯКОЇ Є КРАТНИМ, ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

M. M. Symotyuk. *Metric estimates of the characterictic determinant of an interpolation problem with nodes, one of which is multiple, for a linear partial differential equation*, Mat. Stud. **43** (2015), 88–93.

The metric theorem of an estimations of the characteristic determinant of an interpolation problem for linear partial differential equation with constant coefficients are proved.

М. М. Сымотюк. *Метрические оценки определителя интерполяционной задачи, один из узлов которой является кратным, для линейного дифференциального уравнения в частных производных* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №1. – C.88–93.

Доказаны метрические теоремы об оценках снизу характеристического определителя интерполяционной задачи, один из узлов которой является кратным, для линейного уравнения с частными производными.

1. Вступ. Моделювання багатьох фізичних та біологічних процесів приводить ([1]) до задачі про знаходження функції $u(t,x)$, яка в області $\{(t,x) : t \in (0,T), x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p\}$, $T > 0$, $p \in \mathbb{N}$, є розв'язком лінійного рівняння з частинними похідними

$$L_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} A_{n-j}(D_x)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = 0 \tag{1}$$

і задовольняє умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\dots,x_p$ та багатоточкові умови за змінною t

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \left.\dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=t_1} = \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\dots,r\}, \quad 1 \le r \le n-1, \\ U_{r+j-1}[u] \equiv u(t_j,x) = \varphi_{r+j-1}(x), \quad j \in \{2,\dots,l\}, \quad l = n+1-r, \end{cases} \tag{2}$$

де $D_x = (-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$, $A_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня N_j, $N_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $t_1,\dots,t_l$ — різні числа з відрізка $[0,T]$. Функції $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, в умовах (2) є 2π-періодичними за змінними $x_1,\dots,x_p$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 11J83, 11K60, 35A05, 35B10, 35B30, 42B05.
Keywords: Diophantine approximation; Lebesgue measure; interpolation problem.
doi:10.15330/ms.43.1.88-93

Позначимо: $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$) — простір кратних тригонометричних рядів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(ik, x) = ik_1x_1 + \ldots + ik_px_p$, для яких є скінченною норма ([2])

$$\|\varphi; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|^{\gamma})\Big)^{1/2}, \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|,$$

$C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ — простір рядів $u(t,x) = \sum u_k(t) \exp(ik,x)$, де $u_k \in C^n[0,T]$, $k \in \mathbb{Z}^p$, таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ ряди $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) \exp(ik,x)$, $0 \le j \le n$, як функції змінних $x_1, \ldots, x_p$ належать до простору $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норма в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ задається формулою

$$\big\|u; C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})\big\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) \exp(ik,x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\Big\|.$$

Умови розв'язності задачі (1), (2) у просторах $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ залежать (див., наприклад, [1]) від властивостей характеристичних визначників $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, де

$$\Delta(k) \equiv \det \|U_j[f_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{n} = \begin{vmatrix} f_1(t_1,k) & \ldots & f_n(t_1,k) \\ f_1'(t_1,k) & \ldots & f_n'(t_1,k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(r-1)}(t_1,k) & \ldots & f_n^{(r-1)}(t_1,k) \\ f_1(t_2,k) & \ldots & f_n(t_2,k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t_l,k) & \ldots & f_n(t_l,k) \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3}$$

а $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$ — така фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$L_n\left(\frac{d}{dt}, k\right) y(t) = 0,$$

що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j, q \in \{1, \ldots, n\}$, δ_{jq} — символ Кронекера. Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник (3) є відмінним від нуля, то задача (1), (2) має у просторі $C^n([0,T]; \mathcal{T}')$ єдиний розв'язок, який зображається у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(ik,x) \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{j,k} f_q(t,k), \tag{4}$$

де $\mathcal{T}'$ — простір формальних тригонометричних рядів [2], $\Delta_{j,q}(k)$, $j, q \in \{1, \ldots, n\}$, — алгебраїчне доповнення елемента, розташованого на перетині j-го рядка та q-го стовпчика у визначнику $\Delta(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Якщо $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, і, крім того, існують такі сталі $\omega, \delta \in \mathbb{R}$, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \ge (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\delta|k|^{\gamma}), \tag{5}$$

то на основі відомих оцінок ([3, с. 162]) для функцій $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, можна встановити збіжність ряду (4) в просторі $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi_j \in W^{\gamma}_{\alpha_0,\beta_0}$,

$j \in \{1, \ldots, n\}$, для деяких $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$. Тому, важливо дослідити питання про можливість виконання нерівності (5). У цьому й полягає мета даної роботи.

2. Метричні теореми про виконання оцінок (5)**.** Множину усеможливих значень $t_1, \ldots, t_l$ вузлів інтерполяції задачі (1), (2) стосовно властивості, яка полягає у наявності оцінок знизу (5), можна розбити на дві підмножини: 1) множину тих значень, які мають цю властивістю, і 2) множину тих значень, які цієї властивості не мають.

Питання про те, чи саме ця́ властивість, чи протилежна до неї, є більш „загальною“, очевидно, зводиться до задачі порівняльного аналізу цих двох підмножин. Але підмножини скінченновимірного дійсного простору можуть бути порівнювані з різних точок зору: можна ставити питання про їхні потужності, про величину їхніх мір тощо. Одним з найбільш цікавих — і за методами, і за результатами — підходів є *метричний* підхід [1, 4, 5, 6, 7], який полягає у вивченні величини *міри* чи *розмірності* множини тих значень параметрів, для яких виконуються ті чи інші властивості.

У результаті використання метричного підходу у статті [8] встановлено, що у „крайньому“ випадку задачі (1), (2), коли $l = n$ (тобто усі вузли інтерполяції $t_1, \ldots, t_n$ — прості), міра Лебега на $\mathbb{R}^n$ множини тих векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (5), виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, дорівнює нулю, якщо $\omega > (p + \gamma)n(n-1)/2,\ \delta = n\Lambda T,\ \gamma = \max\limits_{1 \le j \le n} \{N_j/j\}$, де

$$\Lambda = -\min\left\{0; \inf_{k \in \mathbb{Z}^p} \min_{1 \le j \le m(k)} \left\{\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1 + |k|^\gamma}\right\}\right\},$$

а $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{m(k)}(k)$, $m(k) \le n$, — різні корені рівняння

$$L_n(\lambda, k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{6}$$

кратностей $n_1(k), \ldots, n_{m(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k) + \ldots + n_{m(k)}(k) = n$.

Для випадку, коли $l < n$, оцінки (5) встановлені у статті [9], якщо корені рівняння (6) задовольняють деякі діофантові умови. Теореми 1, 2 даної статті, які є її основними результатами, встановлюють оцінки (5) для випадку, коли $l < n$, без будь-яких додаткових припущень щодо поведінки коренів рівняння (6).

Теорема 1. *Для довільного рівняння* (1) *множина векторів* $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [0, T]^l$, *для яких нерівність, протилежна до нерівності* (5), *виконується для нескінченної кількості векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *має нульову міру Лебега в* $\mathbb{R}^l$, *якщо*

$$\omega > \frac{(p+\gamma)(n(n-1) - r(r-1))}{2}, \quad \delta \ge n\Lambda T, \quad \gamma = \max_{1 \le j \le n} \{N_j/j\}.$$

Наслідок 1. *Для довільного рівняння* (1) *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^l$*) векторів* $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [0, T]^l$ *нерівність* (5) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості)* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при*

$$\omega > \frac{(p+\gamma)(n(n-1) - r(r-1))}{2}, \quad \delta \ge n\Lambda T, \quad \gamma = \max_{1 \le j \le n} \{N_j/j\}.$$

Теорема 2. *Нехай вираз* $L(\partial/\partial t, D_x)$ *є таким, що корені рівняння* (6) *є дійсними. Тоді множина векторів* $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in [0, T]^l$, *для яких нерівність, протилежна до нерівності* (5), *виконується для нескінченної кількості векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *має нульову міру Лебега в* $\mathbb{R}^l$, *якщо* $\omega > p(n(n-1) - r(r-1))/2$, $\delta \ge n\Lambda T$, $\gamma = \max\limits_{1 \le j \le n} \{N_j/j\}$.

Наслідок 2. *Для довільного виразу $L(\partial/\partial t, D_x)$, для якого корені рівняння* (6) *є дійсними, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^l$) векторів $\vec{t} = (t_1, \dots, t_l) \in [0,T]^l$ нерівність* (5) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(n(n-1) - r(r-1))/2$, $\delta \geq n\Lambda T$, $\gamma = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{N_j/j\}$.*

Зауважимо, що для випадку $r = 1$ ($l = n$) твердження теореми 1 переходить у цитований результат з [8].

Доведення теореми 1. Для кожного q, $1 \leq q \leq n$, позначимо

$$g_q(t,k) = \frac{t^{q - m_{j-1}(k) - 1}}{(q - m_{j-1}(k) - 1)!} \exp(\lambda_j(k)t),$$

$$P_q(\mu, k) = (\mu - \lambda_1(k))^{n_1(k)} \dots (\mu - \lambda_{j-1}(k))^{n_{j-1}(k)} (\mu - \lambda_j(k))^{q - m_{j-1}(k)},$$
$$\Lambda_q(k) = (\lambda_j(k) - \lambda_1(k))^{n_1(k)} \dots (\lambda_j(k) - \lambda_{j-1}(k))^{n_{j-1}(k)},$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < q \leq m_j(k)$, а $\Lambda_q(k) \equiv 1$, $q \in \{1, \dots, n_1(k)\}$.

З огляду на лему Бореля–Кантеллі ([1]) для доведення теореми досить встановити, що при $\omega > (p + \gamma)(n(n-1) - r(r-1))/2$, $\delta \geq n\Lambda T$ ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} \{ \vec{t} \in [0,T]^l : |\Delta(k)| < (1 + |k|)^{-\omega} \ \exp(-\delta |k|^\gamma) \} \tag{7}$$

є збіжним (тут символ $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} A$ означає міру Лебега в $\mathbb{R}^l$ множини A). Нехай $\Gamma(k) = \det \|U_j[g_q(t,k)]\|_{j,q=1}^n$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Легко перевірити, що

$$\Delta(k) = \Gamma(k) / \det J_k,$$

де J_k — матриця переходу від фундаментальної системи $f_1(t,k), \dots, f_n(t,k)$ до фундаментальної системи $g_1(t,k), \dots, g_n(t,k)$. Оскільки $\det J_k = V(0,k)$, де $V(t,k)$ — вронскіан функцій $g_1(t,k), \dots, g_n(t,k)$, а

$$V(0,k) = \prod_{m(k) \geq j > q \geq 1} (\lambda_j(k) - \lambda_q(k))^{n_j(k) n_q(k)} = \prod_{q=1}^n \Lambda_q(k), \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

(див. [11, с. 86]; зазначимо, що $V(0,k) = 1$, коли $m(k) = 1$), то $\Delta(k) = \Gamma(k) \prod_{q=1}^n \Lambda_q^{-1}(k)$. Тому ряд (7) збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} B(k), \tag{8}$$

де $B(k) := \{\vec{t} \in [0,T]^l : |\Gamma(k)| < (1 + |k|)^{-\omega} \ \exp(-\delta |k|^\gamma) \prod\limits_{q=1}^n |\Lambda_q(k)|\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Встановимо збіжність ряду (8). Для цього зауважимо, що включення

$$B(k) \subset \bigcup_{q=2}^l B_q(k) \tag{9}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, де символ $B_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$, позначає множину

$$\{\vec{t} \in [0,T]^l : |\Gamma_q(k; \vec{\tau}_q)| < \nu_q(k), |\Gamma_{q-1}(k; \vec{\tau}_{q-1})| \geq \nu_{q-1}(k)\},$$

де $\vec{\tau}_q = (t_1, \ldots, t_q)$, $q = 1, \ldots, l$, $\Gamma_q(k; \vec{\tau}_q)$, $q \in \{1, \ldots, l\}$, — визначник порядку $(r+q-1)$, який отримується з визначника $\Gamma(k)$ викреслюванням останніх $(l-q)$ рядків та останніх $(l-q)$ стовпців, а числа $\nu_q(k)$, $q \in \{1, \ldots, l\}$, визначаються рівностями

$$\nu_q(k) = \frac{\exp(-(n-l+q)\Lambda T|k|^\gamma) \prod_{j=n-l+q}^{n} |\Lambda_j(k)|}{(1+|k|)^{(p+\gamma)(r+\ldots+n-l+q-1)+\varepsilon_q}}, \quad q \in \{2, \ldots, l\},$$

$$\nu_1(k) = \frac{\nu_2(k) \exp(-r\Lambda T|k|^\gamma) \prod_{j=1}^{n-l+1} |\Lambda_j(k)|}{(1+|k|)^{(p+\gamma)(n(n-1)-r(r-1))/2+\varepsilon_1}},$$

де $0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_l = \omega - (p+\gamma)(n(n-1) - r(r-1))/2$. З включення (9) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} B(k) \leq \sum_{q=2}^{l} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} B_q(k). \tag{10}$$

Для кожного $q \in \{2, \ldots, l\}$,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} B_q(k) = \int_{[0,T]^{l-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k; \vec{t}_q) dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_l, \tag{11}$$

де $\vec{t}_q = (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_l)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$, а символ $B_q(k; \vec{t}_q)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$, позначає множину $\{t_q \in [0,T] : (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_q, t_{q+1}, \ldots, t_l) \in B_q(k)\}$.

Застосуємо лему 2 з [10] для оцінки зверху мір Лебега множин $B_q(k; \vec{t}_q)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$. Для цього зауважимо, що функція $\Gamma_q(k; \vec{\tau}_q)$ як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$) є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_1(1+|k|^\gamma)$, де C_1 — додатна стала, що не залежить від $k \in \mathbb{Z}^p$. Крім того, з розвинення визначника $\Gamma_q(k; \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$, за елементами останнього рядка випливають такі рівності

$$P_{r+q-2}\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right) \Gamma_q(k; \vec{\tau}_q) = \exp(\lambda_j(k) t_q) \Lambda_{r+q-1}(k) \Gamma_{q-1}(k; \vec{\tau}_{q-1}), \quad q \in \{2, \ldots, l\}, \tag{12}$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < r+q-1 \leq m_j(k)$. Якщо $\vec{t} \in B_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$, то з формул (12) та означення множин $B_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, l\}$, випливає, що

$$\forall t_q \in [0,T] \quad \left| P_{r+q-2}\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right) \Gamma_q(k; \vec{\tau}_q) \right| \geq C_2 \exp(-\Lambda T|k|^\gamma) \nu_{q-1}(k) |\Lambda_{r+q-1}(k)|, \tag{13}$$

де $C_2 > 0$ не залежить від k. Оскільки $\deg_\mu P_{r+q-2}(\mu, k) = r+q-2$, а модуль коефіцієнта при похідній $(\frac{\partial}{\partial t_q})^{r+q-2-j}$, $j \in \{0, 1, \ldots, r+q-2\}$, у виразі $P_{r+q-2}(\partial/\partial t_q, k)$ не перевищує $C_3(1+|k|)^{\gamma j}$, то з оцінок (13) і леми 2 в [10] отримуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k; \vec{t}_q) \leq C_4 (1+|k|)^\gamma \sqrt[r+q-2]{\frac{\nu_q(k) \exp(\Lambda T|k|^\gamma)}{\nu_{q-1}(k)|\Lambda_{r+q-1}(k)|}} \leq C_5 (1+|k|)^{-p-\widetilde{\varepsilon}_q}, \tag{14}$$

де $q \in \{2,\ldots,l\}$, $\widetilde{\varepsilon}_q > 0$, а стала C_5 не залежить від вибору значень $t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_l \in [0,T]$. Тоді з формул (11), (14) отримаємо, що виконуються нерівності

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^l} B_q(k) \le C_5 T^{l-1}(1+|k|)^{-p-\widetilde{\varepsilon}_q}, \quad q \in \{2,\ldots,l\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{15}$$

З нерівностей (10), (15) випливає збіжність ряду (8). □

Доведення теореми 2 є цілком подібним до доведення теореми 1 і проводиться з використанням другого твердження леми 2 зі статті [10].

3. Перспектива подальших досліджень. Перспективним є встановлення оцінок знизу для характеристичного визначника задачі, що визначається рівнянням (1) та умовами

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{q-1}u(t,x)}{\partial t^{q-1}}\right|_{t=t_j} = \varphi_{j,r_j}(x),\ q \in \{1,\ldots,r_j\},\ j \in \{1,\ldots,l\},\ 2 \le l \le n, \\ \quad 0 \le t_1 < \ldots < t_l \le T, \quad r_1+\ldots+r_l = n, \quad 1 \le r_j \le n. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. B.I. Ptashnik, Ill-posed boundary value problems for partial differential equations. – K.: Nauk. dumka, 1984. – 264 p. (in Russian)
2. V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk, Boundary value problems for operator differential equations. Translated and revised from the 1984 Russian original. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 48. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. xii+347 p.
3. L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators II. Differential operators with constant coefficients. 2nd rev. printing., 2nd rev. printing, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990. viii+392 p.
4. V.I. Bernik, Yu.V. Mel'nichuk, Diophantine approximations and Hausdorff dimension. – Minsk: Nauka i tekhnika, 1988. – 144 p. (in Russian)
5. V.G. Sprindzhuk, Metric theory of diophantine approximations. Series: Scripta series in mathematics. John Wiley and Sons Inc (1979). – 170 p.
6. V.G. Sprindzhuk, Achievements and problems in Diophantine approximation theory, Russian Math. Surveys, **35** (1980), 1–80.
7. A.Ya. Khinchin, Continued fractions, Chicago: University of Chicago Press, 1964.
8. B.Yo. Ptashnyk, M.M. Symotyuk, *Multipoint problem for nonisotropic partial differential equations with constant coefficients*, Ukrainian Math. J., **55** (2003), №2, 293–310; translation of Ukrain. Mat. Zh., **55** (2003), №2, 241–254.
9. B.Yo. Ptashnyk, M.M. Symotyuk, *Multipoint problem with multiple nodes for partial differential equations with constant coefficients*, Ukrainian Math. J., **55** (2003), №3, 481–497; translation of Ukrain. Mat. Zh., **55** (2003), №3, 400–413.
10. M.M. Symotyuk, *Multipoint problem for loaded polyharmonic equation*, Prykl. probl. mech. and math., **1** (2003), 25–34. (in Ukrainian)
11. Ph. Hartman, Ordinary differential equations. – M.: Mir, 1970. – 720 p. (in Russian)

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv
quaternion@ukr.net

Надійшло 26.10.2014
Після переробки 26.03.2015