УДК 517.574

А. Ф. Гришин, Н. В. Куинь

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА АЗАРИНА ДЛЯ МЕР РАДОНА. I

A. F. Grishin, N. V. Quynh. *Azarin limit sets for Radon measures. I*, Mat. Stud. **43** (2015), 94–99.

The theory of limit sets of subharmonic functions and measures which is created by Azarin and is developed in the works of other mathematicians finds applications in the theory of growth of entire functions, in other areas of mathematics. The Riesz measure of a δ-subharmonic function is a Radon measure. In the paper limit sets of Radon measure are studied. In particular we present three different criteria for a given set to be the limit set of some Radon measure.

А. Ф. Гришин, Н. В. Куинь. *Предельные множества Азарина для мер Радона. I* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №1. – С.94–99.

Созданная Азариным и получившая развитие в трудах других математиков теория предельных множеств субгармонических функций и мер находит применение в теории роста целых функций, в других разделах математики. Риссовской мерой δ-субгармонической функции является мера Радона. В статье изучаются предельные множества радоновых мер. В частности, мы приводим три различных критерия того, чтобы заданное множество было предельными множеством некоторой радоновой меры.

1. Вступление. В тридцатые годы 20 века Левин и Пфлюгер независимо ввели и изучили класс функций вполне регулярного роста. Теория Левина-Пфлюгера изложена в [1]. Важность этого класса состоит в том, что многие целые функции, встречающиеся в различных областях математики, принадлежат этому классу. Отметим, что теория функций вполне регулярного роста распространяется на класс субгармонических функций в конечномерном евклидовом пространстве.

Важным этапом в развитии теории роста аналитических функций и распределения нулей этих функций явилась созданная В. С. Азариным ([2], [3]) теория предельных множеств субгармонических функций.

В этой теории каждой субгармонической функции нормального типа при некотором уточнённом порядке ставится в соответствие набор субгармонических функций, а мере Рисса исходной субгармонической функции ставится в соответствие некоторый набор мер. Функции вполне регулярного роста — это как раз те, для которых эти наборы состоят в точности из одного элемента.

Субгармонические функции не образуют линейного пространства, так как уже разность двух таких функций может не быть субгармонической. Минимальное линейное пространство над полем вещественных чисел, содержащее субгармонические функции,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31A05, 31B05.
Keywords: proximate order; subharmonic function; δ-subharmonic function; limit set; Riesz measure.
doi:10.15330/ms.43.1.94-99

есть пространство δ-субгармонических функций. Ассоциированной мерой δ-субгармонической функции является мера Радона. В настоящей работе мы переносим некоторые результаты теории Азарина на меры Радона.

Далее, Б. Гинером в [4] были найдены критерии того, что заданное множество является предельным для некоторых положительных мер. В настоящей работе мы, используя понятие и технику динамических систем, распространяем результаты Гинера на случай общих радоновых мер.

2. Необходимые определения. В нашей работе используется мера Радона, которая определяется как разность двух локально конечных взаимно сингулярных положительных борелевских мер $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Область определения меры Радона μ состоит из всех борелевских множеств $E \subset \mathbb{R}^m$, за исключением тех E, для которых выполняются равенства $\mu_1(E) = \mu_2(E) = +\infty$. Таким образом, в общем случае μ не является борелевской мерой. В её область определения не входит достаточно широкий класс борелевских множеств. Для нас важно то, что область определения μ содержит все борелевские множества E с компактным замыканием.

Дифференцируемая функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,\infty)$ называется *уточнённым порядком* в смысле Валирона, если выполняются два условия:

1) существует предел $\rho = \rho(\infty) = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$,
2) $\lim\limits_{r\to\infty} r \ln r \rho'(r) = 0$.

Основные свойства уточнённого порядка можно найти в [1], а новые результаты — [5].

Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок. Величина

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{|\mu|(B(0,r))}{V(r)}, \text{ где } V(r) = r^{\rho(r)}$$

называется *типом меры μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$*.

Если $\sigma < \infty$, то мера μ называется *мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$*.

Пространство радоновых мер $\mathcal{M}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^m$ определяется как пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $\Phi(G)$, состоящем из всех непрерывных финитных функций в G. Изложение теории радоновых мер можно найти в [6].

Через $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$ обозначается множество тех радоновых мер μ из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, для которых выполняется неравенство: $|\mu|(B(0,r) \leq \sigma r^{\rho}$, $r \in (0,\infty)$.

Рассуждения об сходимости удобнее проводить в метрических пространствах. Поэтому мы будем использовать в пространстве $\mathcal{M}(G)$ следующие известные метрики. Пусть $\{\varphi_n,\ n \in \{1,2,\dots\}\}$ — счётное всюду плотное множество в пространстве $\Phi(G)$. Это означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ существует подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$ последовательности $\{\varphi_n\}$ такая, что $\varphi_{n_k} \to \varphi$ в пространстве $\Phi(G)$. Далее по последовательности $\{\varphi_n\}$ определяем функцию

$$d(\mu_1,\mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\mu_2-\mu_1,\varphi_n)|}{2^n(1+|(\mu_2-\mu_1,\varphi_n)|)},$$

где μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{M}(G)$. Легко проверяется что d — метрика в пространстве $\mathcal{M}(G)$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок. Обозначим через μ_t $(t>0)$ следующую меру $\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}$. Мы будем также писать $\mu_t = F_t\mu$. Отображение $F_t\colon\ \mu \to \mu_t$ будем называть *отображением Азарина* (порождённым уточнённым порядком $\rho(r)$).

Множество $\{\mu_t\colon\ t>0\}$ называется *траекторией меры* μ.

Множество $\{\mu_t\colon\ t\geq 1\}$ называется *положительной полутраекторией меры* μ.

Множество мер вида $\nu=\lim_{n\to\infty}\mu_{t_n}$, где последовательность $t_n\to\infty$, мы будем называть *предельным множеством Азарина меры* μ (относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и обозначать $\mathrm{Fr}[\mu]$ или, если нужно, $\mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]$.

Будем говорить, что радонова мера μ является *регулярной (в смысле Азарина)*, если множество $\mathrm{Fr}[\mu]$ состоит из одного элемента.

Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$. Говорят, что мера μ имеет конусную (угловую) плотность $\triangle$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, если для любого борелевского множества $E\subset S(0,1)$, для которого $\triangle(\partial E)=0$, выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu(K(r,E))}{V(r)}=\triangle(E),$$

где $K(r,E)=[0,r]\times E=\{x\in\mathbb{R}^m\colon\ \|x\|\leq r,\ \frac{x}{\|x\|}\in E\}$.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $M_1,\ M_2$ — подмножества X. Введём следующие величины

$$\delta_1=\sup_{x\in M_1}\rho(x,M_2),\quad \delta_2=\sup_{x\in M_2}\rho(x,M_1),\quad H(M_1,M_2)=\max(\delta_1,\delta_2).$$

Величина $H(M_1,M_2)$ называется *расстоянием Хаусдорфа* между множествами M_1 и M_2.

3. Основные свойства предельных множеств Азарина для мер Радона. В этом разделе приводим доказанные нами теоремы о предельных множествах мер Радона. Ранее эти теоремы были известны только для случая положительных мер (см. [2], [3]). Случай произвольных мер существенно сложнее и требует значительных изменений в конструкциях.

Теорема 1. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, $m\geq 2$, имеющая тип σ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, $\rho=\rho(\infty)>0$. Пусть мера μ_t построена с помощью уточнённого порядка $\rho(r)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\mathrm{Fr}[\mu]$ — непустой компакт в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$;*
2) *$\mathrm{Fr}[\mu]$ — связное множество в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m),d)$.*
3) *Функция F_t ($(F_t\mu)(E)=\frac{\mu(tE)}{t^\rho}$) для любого $t>0$ взаимно-однозначно отображает множество $\mathrm{Fr}[\mu]$ на себя.*
4) *Для любой меры $\nu\in\mathrm{Fr}[\mu]$ и любого $r>0$ выполняется неравенство $|\nu|(B(0,r))\leq\sigma r^\rho$.*

Теорема 2. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, имеющая не выше чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть мера μ имеет конусную (угловую) плотность $\triangle$ относительно утонённого порядка $\rho(r)$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]=\{\nu\},\ \nu=dr^\rho\times\triangle.$$

Теорема 3. *Пусть μ — радонова мера в пространстве $\mathbb{R}^m$, имеющая не выше чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $\mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]=\{\nu\}$. Тогда $\nu=dt^\rho\times\triangle$, где $\triangle$ — борелевская мера на сфере (окружности) $S(0,1)$, определяемая формулой $\triangle(E)=\nu(K(1,E))$.*

Заметим, что если мера μ в условии последней теоремы неотрицательна, то она имеет конусную (угловую) плотность. Однако для знакопеременных мер Радона это не так.

Пример. Пусть $m = 2,\ r_n = 3^{3^n},\ \rho > 0,\ \mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n^{\rho}(\delta(z - r_n) - \delta(z - r_n - 1))$.

Нетрудно увидеть, что порядок $\rho(r) \equiv \rho$ является уточнённом порядком этой меры. Далее, для любой непрерывной финитной функции $\varphi(z)$ имеем

$$(F_t\mu, \varphi) = t^{-\rho} \int_{\mathbb{C}} \varphi\left(\frac{z}{t}\right) d\mu = \sum_{r_n+1<t} \left(\frac{r_n}{t}\right)^{\rho} \left[\varphi\left(\frac{r_n}{t}\right) - \varphi\left(\frac{r_n+1}{t}\right)\right].$$

Так как φ непрерывна, то при больших t разность $\varphi\left(\frac{r_n}{t}\right) - \varphi\left(\frac{r_n+1}{t}\right)$ сколь угодно мала, поэтому $(F_t\mu, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\mathrm{Fr}[\mu] = \{0\}$. С другой стороны, $\mu(K(r_n + \frac{1}{2}, S(0,1)) = r_n^{\rho},\ \mu(K(r_n + \frac{3}{2}, S(0,1)) = 0$, следовательно, мера μ не имеет угловой плотности.

Теорема 4. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, имеющая тип $\sigma < \infty$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)]$ — её предельное множество. Тогда существуют число $\sigma_1 > 0$ и последовательность периодических мер $\{\mu_n\}$ порядка ρ такие, что выполняются условия:* 1) $\mu_n \in \mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$, 2) $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)] = H \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Fr}[\mu_n, \rho(r)]$.

Следующую теорему можно рассматривать как обращение предыдущей теоремы.

Теорема 5. *Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность периодических порядка ρ вещественных радоновых мер в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ из класса $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$, и пусть последовательность $\{\mathrm{Fr}[\mu_n, \rho(r)]\}$ сходится в метрике Хаусдорфа к компакту M. Тогда для любого уточнённого порядка $\rho(r)$ такого, что $\rho(\infty) = \rho$ существует радонова мера μ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ такая, что $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)] = M$.*

4. Использование теории динамических систем. Начнём с некоторых определений. Обычно ([7], глава 5) *динамическая система* в метрическом пространстве X определяется как однопараметрическая система отображений $\Phi_t,\ t \in (-\infty, \infty),\ \Phi_t\colon\ X \to X$, обладающая свойствами:

1) если $t \to t_0,\ x \to x_0$, то $\Phi_t x \to \Phi_{t_0} x_0$ (условие непрерывности по совокупности переменных);
2) $\Phi_0 x = x$ для любого $x \in X$ (начальное условие);
3) $\Phi_{t_1+t_2} x = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1} x)$ (групповое условие).

Пусть $\Phi_t,\ t \in (0, \infty)$ — динамическая система в метрическом пространстве (X, d). Последовательность $p_0 = p, p_1, \ldots, p_k = q$ точек из X называется (ω, ε)-*цепью*, соединяющей точки p и q, если существует последовательность $t_l,\ l \in \{0, \ldots, k-1\}$ такая, что $t_l \geq \omega$ и $d(\Phi_{t_l} p_l, p_{l+1}) < \varepsilon$.

Динамическая система Φ_t в метрическом пространстве (X, d) называется *цепной рекурентностью*, если для любых точек p и q из X и для любых $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует (ω, ε)-сеть, соединяющая точки p и q.

Пусть Φ_t — динамическая система на метрическом пространстве (X, ρ). Кривая $\lambda(t)$ называется *псевдотраекторией*, если для любого $\tau > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} \rho(\Phi_t \lambda(t), \lambda(t\tau)) = 0,$$

и это предел равномерный на любом сегменте $[a,b] \subset (0,\infty)$.

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Отображение $\lambda(t)\colon\ (0,\infty) \to X$ (не обязательно непрерывное) мы будем называть *кривой* в метрическом пространстве X.

Кривая $\lambda(t)$ называется *всюду плотной* на бесконечности в пространстве X, если для любой точки $x \in X$ существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n)$.

Отображение $\lambda(t)$ будем называть *кусочно непрерывным*, если множество точек разрыва этого отображения не имеет конечных предельных точек.

Сформулируем доказанные нами следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок такой, что $\rho = \rho(\infty) > 0$. Пусть M — компакт в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, инвариантный относительно преобразования F_t и принадлежащий множеству $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$. Пусть динамическая система F_t на метрическом пространстве (M,d) является цепной рекурентностью. Тогда существует радонова мера $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ такая, что $\mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)] = M$.*

Теорема 7. *Пусть $\rho(r)$ — уточнённый порядок такой, что $\rho = \rho(\infty) > \infty$. Пусть μ — радонова мера в пространстве $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, пусть $M = \mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]$. Тогда система $F_t,\ t \in (0,\infty)$ есть динамическая система в метрическом пространстве (M,d) и в этом пространстве есть кусочно непрерывная псевдотраектория, всюду плотная на бесконечности в множестве M.*

Теорема 8. *Пусть $\rho(r)$ — уточнённый порядок такой, что $\rho = \rho(\infty) > 0$. Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, пусть $M = \mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]$. Тогда динамическая система $F_t,\ t \in (0,\infty)$ на метрическом пространстве (M,d) является цепной рекурентностью.*

Теорема 9. *Пусть M — компакт, лежащий в метрическом пространстве $\big(\mathcal{M}(\mathbb{R}^M),\, d\big)$, инвариантный относительно преобразования F_t и принадлежащий множеству $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. Пусть на множестве M существует кусочно непрерывная псевдотраектория $\lambda(t)$, плотная на бесконечности в множестве M. Тогда динамическая система F_t, $t \in (0,\infty)$ на метрическом пространстве (M,d) является цепной рекурентностью.*

В заключение мы сформулируем три критерия того, чтобы множество M из пространства $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ представлялось в виде $M = \mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]$.

Теорема 10. *Пусть $\rho(r)$ — уточнённый порядок такой, что $\rho = \rho(\infty) > 0$. Пусть M — компакт в метрическом пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, инвариантный относительно преобразования F_t и лежащий в множестве $\mathcal{M}(\rho,\sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. Для того, чтобы существовала радонова мера μ в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и такая, что $M = \mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность периодических мер $\{\mu_n\}$ порядка ρ из множества $\mathcal{M}(\rho,\sigma_1)$ с некоторым σ_1 такая, что в метрике Хаусдорфа H выполняется равенство*

$$M = H \lim_{n\to\infty} \mathrm{Fr}[\mu_n,\rho(r)].$$

Теорема 11. *Пусть функция $\rho(r)$ и множество M удовлетворяют условиям предыдущей теоремы 10. Для того, чтобы существовала радонова мера μ в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и такая, что $M = \mathrm{Fr}[\mu,\rho(r)]$, необходимо и достаточно, чтобы динамическая система F_t, $t \in (0,\infty)$ на метрическом пространстве (M,d) была цепной рекурентностью.*

Теорема 12. *Пусть $\rho(r)$ и множество M удовлетворяют условиям теоремы 10. Для того, чтобы существовала радонова мера μ в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и такая, что $M = \mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)]$, необходимо и достаточно, чтобы в множестве M существовала кусочно непрерывная псевдотраектория $\lambda(T)$, плотная на бесконечности во множестве M.*

Теорема 10 является объединением теорем 4 и 5, теорема 11 — теорем 6 и 8, а теорема 12 — теорем 6, 7 и 9.

Доказательства теорем 1–9 будут приведены во второй части работы, которая будет опубликована в Mat. Stud., **43**, №2 (2015).

ЛИТЕРАТУРА

1. Levin B.Ja. Distribution of zeros of entire functions. – Moscow: Tehn. Teor. Lit., 1956. – 632 p. (in Russian)
2. Azarin V.S. *On the asymptotic behavior of subharmonic functions of finite order*// Mat. Sb. – 1979. – V.108, №2. – P. 147–167. (in Russian)
3. Azarin V.S. Growth theory of subharmonic functions. – Birkhäuser-Basel-Boston-Berlin, 2009. – 259 p.
4. Giner V.B. Limit sets of entire and subharmonic functions. – Dissertation. Kharkov, Kh. N. Univ., 1988. (in Russian)
5. Grishin A.F., Malyutina T.I. *On proximate order*// Complex analysis and mathematical physics, Krasnoyarsk. –1998. – P. 10–24. (in Russian)
6. Bourbaki N. Integration.– Moscow: Nauka, 1977. – 396 p. (in Russian)
7. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. – Moscow, Leningrad: Tehn. Teor. Lit., 1949. – 448 p. (in Russian)

Karazin Kharkiv National University
quynhsonla1988@gmail.com

Поступило 10.11.2014