УДК 519.213.2+517.53

О. Карлова

# СИЛЬНО НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ І ОДНА ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ВІДКРИТИХ МНОЖИН В ЯЩИКОВОМУ ДОБУТКУ

O. Karlova. *Strongly separately continuous functions and a characterization of open sets in a box-product*, Mat. Stud. **43** (2015), 36–42.

We prove that a subset $W$ is open in a small box-product $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$ of a sequence of pointed spaces, every finite product of which is a perfect paracompact Hausdorff space, if and only if there exists a strongly separately continuous function $f$ with values in $[0,1]$ and defined on a $\sigma$-product of the sequence $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ equipped with the Tychonoff topology such that $W = f^{-1}((0,1])$.

Е. Карлова. *Сильно раздельно непрерывные функции и одна характеризация открытых множеств в ящиковом произведении* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №1. – C.36–42.

Доказано, что множество $W$ является открытым в малом ящиковом произведении $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$ последовательности пространств с отмеченной точкой, каждое конечное произведение которых является совершенным паракомпактом, в том и только том случае, когда существует сильно раздельно непрерывная функция $f$ со значениями в $[0,1]$, определенная на $\sigma$-произведении данной последовательности пространств с топологией поточечной сходимости такая, что $W = f^{-1}((0,1])$.

**1. Вступ.** Розглянемо добуток $\prod_{t\in T} X_t$ сім'ї множин $X_t$ з $|X_t| > 1$ для кожного $t \in T$. Якщо $S \subseteq S_1 \subseteq T$, $a = (a_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} X_t$, $x = (x_t)_{t\in S_1} \in \prod_{t\in S_1} X_t$, то символом $a_S^x$ ми позначимо точку $(y_t)_{t\in T}$, де

$$y_t = \begin{cases} x_t, & t \in S, \\ a_t, & t \in T \setminus S. \end{cases}$$

Якщо множина $S$ складається з однієї точки $\{s\}$, то точку $a_{\{s\}}^x$ позначатимемо через $a_s^x$. Покладемо

$$\sigma_n(a) = \{(x_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} X_t : |\{t \in T : x_t \neq a_t\}| \le n\} \text{ при } n \in \mathbb{N}, \text{ і } \sigma(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(a).$$

Надалі в статті під $\sigma_n(a)$ і $\sigma(a)$ будемо розуміти підпростори добутку Тихонова $\prod_{t\in T} X_t$ топологічних просторів $X_t$.

Множина $A \subseteq \prod_{t\in T} X_t$ називається $\mathcal{S}$-*відкритою* ([4]), якщо $\sigma_1(x) \subseteq A$ для всіх $x \in A$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 54C08, 54C30.
*Keywords:* strongly separately continuous function; small box-product; almost open set.
doi:10.15330/ms.43.1.36-42

Нехай $\mathcal{T}$ — деяка топологія на $\mathcal{S}$-відкритій множині $X \subseteq \prod_{t\in T} X_t$ і $(Y,d)$ — метричний простір. Функція $f\colon X \to Y$ називається *сильно нарізно неперервною в точці* $a \in X$ *відносно $s$-ої змінної*, якщо

$$\lim_{x\to a} d(f(x), f(x_s^a)) = 0.$$

Функція $f\colon X \to Y$ є *сильно нарізно неперервною в точці* $a \in X$, якщо $f$ сильно нарізно неперервна в точці $a$ відносно кожної змінної $t \in T$, і функція $f$ є *сильно нарізно неперервною на множині* $X$, якщо $f$ сильно нарізно неперервна в кожній точці $a \in X$ відносно кожної змінної $t \in T$. Для скорочення запису сильно нарізно неперервну функцію називатимемо також *ssc-функцією.*

Поняття сильно нарізно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ввів О. Дзаґнідзе в [2] і довів, що функція $f$ є сильно нарізно неперервною в точці $a \in \mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли $f$ неперервна в цій точці.

Розвиваючи ці дослідження, в [1] і [5] автори розглядали сильно нарізно неперервні функції, визначені на просторі $\ell_2$. Зокрема, вони навели приклад сильно нарізно неперервної скрізь розривної функції $f\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$. Т. Вишня ([5]) побудував сильно нарізно неперервну функцію $f\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$, яка належить до третього класу Бера і не є квазінеперервною в жодній точці з $\ell_2$. Крім того, він навів достатні умови для того, щоб сильно нарізно неперервна функція $f\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ була неперервною.

Зауважимо, що якщо простір $\ell_2$ наділити топологією добутку, то ситуація вже зміниться. Наприклад, відображення $f\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$, неперервне на $\ell_2$ з топологією, породженою нормою, але скрізь розривне і сильно нарізно неперервне на $\ell_2$ з топологією добутку. Тому природно виникає питання про дослідження ssc-функцій, визначених на просторах послідовностей з іншими топологіями. Так, в [3] вивчалася берова класифікація сильно нарізно неперервних функцій, заданих на $\mathbb{R}^{\omega}$; зокрема, там доведено, що існує сильно нарізно неперервна функція $f\colon \mathbb{R}^{\omega} \to \mathbb{R}$, яка не вимірна за Бером. Крім цього, в [3] доведено, що якщо $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність нормованих просторів і $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то довільна відкрита множина $G \subseteq \sigma(a)$ є множиною точок розриву деякої ssc-функції $f\colon \sigma(a) \to \mathbb{R}$. Далі, в [4] автори довели, що у випадку, коли $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю скінченновимірних нормованих просторів і $a \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то множина $W \subseteq \sigma(a)$ є множиною точок розриву сильно нарізно неперервної функції $f\colon \sigma(a) \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли вона майже відкрита (див. означення в п. 2).

Через $\square_{t\in T} X_t$ позначатимемо *бокс-добуток* просторів $X_t$, тобто, добуток $\prod_{t\in T} X_t$, наділений *ящиковою топологією*, базу якої утворюють множини вигляду $\prod_{t\in T} U_t$, де $U_t$ — відкрита підмножина $X_t$ для кожного $t \in T$. Якщо $(X_t)_{t\in T}$ — сім'я пунктованих просторів (*пунктованим* називається простір $X$ з відміченою точкою $*_X \in X$), то символом $\boxdot_{t\in T} X_t$ позначимо *малий бокс-добуток* просторів $X_t$, тобто, множину $\sigma(*)$, наділену ящиковою топологією, індукованою з $\square_{t\in T} X_t$; при цьому $* = (*_{X_t})_{t\in T}$.

У цій статті ми доводимо, що у випадку, коли $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю пунктованих просторів, кожний скінченний добуток яких є досконалим паракомпактом, то множина $W$ відкрита в $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$ тоді і тільки тоді, коли $W = f^{-1}((0,1])$ для деякої ssc-функції $f\colon \sigma(*) \to [0,1]$.

## 2. Основні результати.

**2.1. Майже відкриті множини і ssc-функції.** Нехай $(X_t)_{t\in T}$ — сім'я пунктованих топологічних просторів. Множина $W \subseteq \sigma(*)$ називається *майже відкритою в* $\sigma(*)$, якщо для довільної скінченної множини $T_0 \subseteq T$ множина $W_{T_0} = \{z \in \prod_{t \in T_0} X_t \colon *^z_{T_0} \in W\}$ відкрита в просторі $\prod_{t \in T_0} X_t$, наділеному топологією поточкової збіжності.

Множина $E$ називається *майже замкненою в* $\sigma(*)$, якщо її доповнення $\sigma(*) \setminus E$ майже відкрите в $\sigma(*)$.

Зрозуміло, що довільна відкрита множина в $\boxdot_{t \in T} X_t$ є майже відкритою в $\sigma(*)$.

**Теорема 1.** *Нехай* $(X_t)_{t \in T}$ *— сім'я пунктованих просторів і* $f \colon \sigma(*) \to \mathbb{R}$ *— сильно нарізно неперервна функція. Тоді множина* $f^{-1}(V)$ *майже відкрита в* $\sigma(*)$ *для довільної відкритої множини* $V \subseteq \mathbb{R}$.

*Доведення.* Досить переконатися, що прообраз множини $V = (0,1)$ є майже відкритим в просторі $\sigma(*)$.

Нехай $T_0 \subseteq T$ — довільна скінченна множина і $Z = \prod_{t \in T_0} X_t$. Доведемо, що множина $G = (f^{-1}(V))_{T_0}$ відкрита в $Z$. Зафіксуємо $z_0 \in G$. Тоді, $u_0 = *^{z_0}_{T_0} \in f^{-1}(V)$ і $0 < \varepsilon = f(u_0)/2 < \frac{1}{2}$. Оскільки функція $f$ сильно нарізно неперервна в точці $u_0$ відносно $t$-ої змінної для кожного $t \in T_0$, то існує такий базисний окіл $U_0$ точки $u_0$ в $\prod_{t \in T} X_t$, що

$$|f(x) - f(x^{u_0}_{T_0})| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

для всіх $x \in U_0 \cap \sigma(*)$. З неперервності відображення $\varphi \colon Z \to \sigma(*)$, $\varphi(z) = *^z_{T_0}$, в точці $z_0$ випливає, що існує базисний окіл $W_0$ точки $z_0$ в $Z$, такий, що $\varphi(W_0) \subseteq U_0$. Покажемо, що $W_0 \subseteq G$. Нехай $z \in W_0$ і $u = *^z_{T_0} \in U_0$. Оскільки $y = x^u_{T_0} \in U_0$ і $y^{u_0}_{T_0} = x^{u_0}_{T_0}$, то з нерівності (1) випливає, що

$$|f(x) - f(x^u_{T_0})| \le |f(x) - f(x^{u_0}_{T_0})| + |f(x^{u_0}_{T_0}) - f(x^u_{T_0})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $x \in U_0 \cap \sigma(*)$. З останньої нерівності при $x = u_0$ випливає, що $|f(u) - \varepsilon| < \varepsilon$, звідки $0 < f(u) < 2\varepsilon < 1$. Отже, $z \in G$. Тому, $W_0 \subseteq G$ і множина $G$ відкрита в просторі $Z$. $\square$

Як показує наступний приклад, в теоремі 1 умову майже відкритості множини $W$ не можна замінити на сильнішу умову відкритості цієї множини в малому бокс-добутку $\boxdot_{t \in T} X_t$.

**Приклад 1.** Нехай $X_t = \mathbb{R}$ і $*_{X_t} = 0$ для кожного $t \in [0,1]$. Тоді існує сильно нарізно неперервна функція $f \colon \sigma(*) \to \mathbb{R}$, яка не є неперервною на $\boxdot_{t \in [0,1]} X_t$.

*Доведення.* Для кожного $x = (x_t)_{t \in [0,1]} \in \sigma(*)$ покладемо $f(x) = \sum_{t \in [0,1]} x_t$. Функція $f \colon \sigma(*) \to \mathbb{R}$ визначена коректно, оскільки множина $\{t \in [0,1] \colon x_t \ne 0\}$ скінченна для кожного $x \in \sigma(*)$. Крім того,

$$\lim_{x \to a} |f(x) - f(x^a_t)| = \lim_{x \to a} |x_t - a_t| = 0$$

для довільних $a \in \sigma(*)$ і $t \in [0,1]$. Отже, функція $f$ сильно нарізно неперервна на $\sigma(*)$.

Переконаємось, що функція $f \colon \boxdot_{t \in [0,1]} X_t \to \mathbb{R}$ розривна в точці $*$. Нехай $\varepsilon = 1$ і $U = \prod_{t \in [0,1]} U_t$ — довільний базисний окіл точки $*$ в $\boxdot_{t \in [0,1]} X_t$, де $U_t = (-\delta_t, \delta_t)$ і $\delta_t > 0$ для кожного $t \in [0,1]$.

Якщо $\delta_t > 1$ для деякого $t \in [0,1]$, то покладемо $x = *^1_t$. Тоді, $x \in U$ і $f(x) = 1$.

Якщо всі $\delta_t \le 1$, то виберемо таке $n \in \mathbb{N}$, що множина $A = \{\delta_t \colon t \in [0,1]\} \cap [\frac{1}{n+1}, 1]$ нескінченна. Нехай $\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_{2n+2}}$ — довільні числа з $A$. Для кожного $t \in [0,1]$ покладемо $x_t = 0$ при $t \notin \{t_1, \dots, t_{2n+2}\}$, $x_t = \frac{1}{2}\delta_{t_k}$ при $t = t_k$ для деякого $k = 1, \dots, 2n+2$ і нехай $x = (x_t)_{t \in T}$. Тоді, $x \in U$ і $f(x) = \frac{1}{2}(\delta_{t_1} + \dots + \delta_{t_{2n+2}}) \ge \frac{1}{2} \cdot (2n+2) \cdot \frac{1}{n+1} = 1$.

Отже, функція $f$ розривна в точці $*$. □

Тим не менше, у випадку, коли сім'я просторів $(X_t)_{t \in T}$ зліченна, маємо таке твердження.

**Теорема 2.** *Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність пунктованих просторів. Функція $f \colon \boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$ сильно нарізно неперервна тоді і тільки тоді, коли вона неперервна на $\boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n$.*

*Доведення.* Оскільки достатність очевидна, то залишається довести необхідність. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і $a \in \boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ використаємо сильну нарізну неперервність функції $f$ в точці $a$ відносно $n$-ої змінної і виберемо таку послідовність $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ базисних околів $U_n = \prod_{m \in \mathbb{N}} U_{n,m}$ точки $a$, що $U_{n+1,m} \subseteq U_{n,m}$ і $|f(x) - f(x_n^a)| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ для всіх $x \in U_n$ та $n, m \in \mathbb{N}$. Покладемо $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_{n,n}$. Зрозуміло, що $U$ — окіл точки $a$ в $\boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Нехай $x \in U$. Виберемо таке $N \in \mathbb{N}$, що $x_k = a_k$ для всіх $k > N$. Позначимо $y_1 = x$ і $y_k = (y_{k-1})_{k-1}^a$ для всіх $k \in \{2, \dots, N+1\}$. Зазначимо, що $y_{N+1} = a$. Оскільки $y_k \in U_k$, то $|f(y_k) - f(y_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{2^k}$ для кожного $k \in \{1, \dots, N\}$. Тому, $|f(x) - f(a)| \le \sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(y_{k+1})| < \varepsilon$ і, отже, функція $f$ неперервна в точці $a$. □

Оскільки топологія добутку слабша, ніж ящикова топологія, то з теореми 2 негайно випливає наступний наслідок.

**Наслідок 1.** *Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність пунктованих просторів. Тоді кожна сильно нарізно неперервна функція $f \colon \sigma(*) \to \mathbb{R}$ є неперервною на $\boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n$.*

Наступний приклад вказує на те, що обернене твердження не правильне.

**Приклад 2.** Нехай $X_n = \mathbb{R}$ для кожного $n$ і $* = (0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\omega}$. Існує неперервна функція $f \colon \boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$, яка не є сильно нарізно неперервною на $\sigma(*)$.

*Доведення.* Покладемо $x_n = (\frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \underbrace{n}_{n}, 0, \dots)$, $y_n = (0, \dots, 0, \underbrace{n}_{n}, 0, \dots)$ при $n \in \mathbb{N}$ і нехай $F_1 = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ і $F_2 = \{y_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Тоді множини $F_1$ і $F_2$ неперетинні і замкнені в $\boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Зауважимо, що оскільки простір $\boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n$ має зліченну сітку, він є спадково ліндел\-ефовим, а тому, досконало нормальним. Отже, існує неперервна функція $f \colon \boxdot_{n \in \mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$, така, що $F_1 = f^{-1}(0)$ і $F_2 = f^{-1}(1)$. Зауважимо, що $x_n \to *$ в просторі $\sigma(*)$ і $y_n = (x_n)_1^*$. Але, $f(x_n) - f(y_n) = 1$ для кожного $n$, звідки випливає, що функція $f$ не є сильно нарізно неперервною на $\sigma(*)$ в точці $*$ відносно першої змінної. □

**2.2. Обернена задача.** Нехай $(X_n, |\cdot|_n)$ — послідовність пунктованих метричних просторів, $\mathbb{R}_+^{\omega} = (0, +\infty)^{\omega}$, $u = (u_n)_{n=1}^{\infty} \in \sigma(*)$ і $r = (r_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_+^{\omega}$. Позначимо

$$B_n(u_n, r_n) = \{x \in X_n \colon |x - u_n|_n < r_n\},\ B_n[u_n, r_n] = \{x \in X_n \colon |x - u_n|_n \le r_n\},$$

$$B_\infty(u, r) = \Big(\prod_{n=1}^{\infty} B_n(u_n, r_n)\Big) \cap \sigma(*).$$

**Лема 1.** *Нехай* $r \in \mathbb{R}^\omega_+$ *і* $a = (0,0,\dots)$. *Існує сильно нарізно неперервна функція* $f\colon \mathbb{R}^\omega \to [0,1]$ *така, що* $B_\infty(a,r) = f^{-1}((0,1])$.

*Доведення.* Для кожного $n$ розглянемо простір

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \{a_k\}$$

з топологією добутку. Нехай $d_n$ — максимум-метрика на $Y_n$, тобто,

$$d_n(x,y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$$

для всіх $x, y \in Y_n$. Крім того, для всіх $x, y \in \mathbb{R}^\omega$ покладемо $d(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\cdot \frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$. Позначимо $B = (-1,1)^\omega \cap \sigma(a)$ і $U_n = B\cap Y_n$. Розглянемо неперервну функцію $g_n\colon Y_n \to [0,1]$,

$$g_n(x) = d_n(x, Y_n\setminus U_n) = \begin{cases} \min\limits_{1\le k\le n} |1-|x_k||, & \text{якщо } x\in U_n,\\ 0, & \text{якщо } x\notin U_n.\end{cases}$$

Зауважимо, що $g_{n+1}|_{Y_n} = g_n$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Справді, нехай $x\in Y_n$. Якщо $x\notin U_{n+1}$, то $g_{n+1}(x) = g_n(x) = 0$, а якщо $x\in U_{n+1}$, то $g_{n+1}(x) = \min\{g_n(x), 1\} = g_n(x)$. Тепер визначимо функцію $g\colon \mathbb{R}^\omega \to [0,1]$,

$$g(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{якщо } x\in Y_n \text{ для деякого } n,\\ 0, & \text{інакше.}\end{cases}$$

Оскільки множина $U_n$ відкрита в $Y_n$, то $U_n = g_n^{-1}((0,1])$ для кожного $n$. Звідси випливає, що

$$B = \bigcup_{n=1}^\infty U_n = g^{-1}((0,1]).$$

Зафіксуємо $u\in\mathbb{R}^\omega$, $k\in\mathbb{N}$ і переконємось, що функція $g\colon \mathbb{R}^\omega\to[0,1]$ сильно нарізно неперервна в точці $u$ відносно $k$-ої змінної. Нехай $\varepsilon\in(0,1)$. Виберемо базисний окіл $U$ точки $u$ в $\mathbb{R}^\omega$, такий, що $U\subseteq \{x\in X\colon d(x,u) < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\}$. Нехай $x\in U$. Якщо $x\notin\sigma(a)$, то і $x_k^u\notin\sigma(a)$, тоді $g(x) = g(x_k^u) = 0$. Якщо $x\in\sigma(a)$, то існує таке $n\in\mathbb{N}$, що $x, x_k^u\in Y_n$. Тоді,

$$|g(x) - g(x_k^u)| = |g_n(x) - g_n(x_k^u)| \le d_n(x, x_k^u) = |x_k - u_k|.$$

Зауважимо, що $d(x,x_k^u) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. З іншого боку, $d(x,x_k^u) = \frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-u_k|}{1+|x_k-u_k|}$. Звідси випливає, що $|x_k-u_k|<\varepsilon$. Отже, $|g(x)-g(x_k^u)|<\varepsilon$ для всіх $x\in U$.

Нехай $r = (r_n)_{n=1}^\infty\in\mathbb{R}^\omega_+$. Для кожного $x = (x_n)_{n=1}^\infty\in\mathbb{R}^\omega$ розглянемо гомеоморфізм $h\colon\mathbb{R}^\omega\to\mathbb{R}^\omega$, $h(x) = \big(\frac{x_n}{r_n}\big)_{n=1}^\infty$. Зрозуміло, що $h(B_\infty(a,r)) = B$. Для кожного $x\in\mathbb{R}^\omega$ покладемо $f(x) = g(h(x))$. Зауважимо, що $B_\infty(a,r) = f^{-1}((0,1])$. Враховуючи, що $h(x_n^u) = (h(x))_n^{h(u)}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$ та $u, x\in\mathbb{R}^\omega$, ми одержуємо, що

$$\lim_{x\to u} |f(x) - f(x_n^u)| = \lim_{h(x)\to h(u)} |g(h(x)) - g((h(x))_n^{h(u)})| = 0,$$

позаяк функція $g$ сильно нарізно неперервна в точці $h(u)$ відносно $n$-ої змінної. Отже, функція $f\colon\mathbb{R}^\omega\to[0,1]$ сильно нарізно неперервна. $\square$

**Лема 2.** *Нехай $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ — добуток послідовності пунктованих топологічних просторів $X_n$, $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність функціонально відкритих множин в $X_n$ і $W = \left(\prod_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap \sigma(*)$. Тоді існує scc-функція $f\colon X \to [0,1]$ така, що $W = f^{-1}((0,1])$.*

*Доведення.* Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо неперервну функцію $\varphi_n\colon X_n \to [0,1]$ таку, що $U_n = \varphi_n^{-1}((0,1])$ і розглянемо неперервне відображення $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^{\omega}$, $\varphi(x) = (\varphi_n(x_n) - 1)_{n=1}^{\infty}$. Тоді, $W = \varphi^{-1}(B_{\infty}(a,r))$, де $a = (0,0,\dots)$ і $r = (1,1,\dots)$.

За лемою 1 існує ssc-функція $g\colon \mathbb{R}^{\omega} \to [0,1]$, така, що $B_{\infty}(a,r) = g^{-1}((0,1])$. Для кожного $x \in X$ покладемо $f(x) = g(\varphi(x))$ і доведемо, що функція $f\colon X \to [0,1]$ сильно нарізно неперервна. Нехай $u \in X$, $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки функція $g\colon \mathbb{R}^{\omega} \to [0,1]$ сильно нарізно неперервна в точці $\varphi(u)$ відносно $n$-ої змінної, то існує такий окіл $V$ точки $\varphi(u)$ в $\mathbb{R}^{\omega}$, що $|g(y) - g(y_n^{\varphi(u)})| < \varepsilon$ для всіх $y \in V$. Розглянемо окіл $U = \varphi^{-1}(V)$ точки $u$ в $X$. Тоді, $|f(x) - f(x_n^u)| = |g(\varphi(x)) - g((\varphi(x))_n^{\varphi(u)})| < \varepsilon$ для всіх $x \in U$. □

**Теорема 3.** *Нехай $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ — добуток пунктованих просторів, кожний скінченний піддобуток яких є досконалим паракомпактом. Тоді:*

*а) якщо $W$ — відкрита множина в $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то існує ssc-функція $f\colon X \to [0,1]$ така, що $W = f^{-1}((0,1])$;*

*б) якщо $E$ — замкнена множина в $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$, то існує ssc-функція $f\colon X \to [0,1]$ така, що $E = f^{-1}(0)$.*

*Доведення.* а) Для кожного $n$ позначимо

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k,\ W_n = W \cap \bigl(Y_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \{*_{X_k}\}\bigr)$$

і нехай $G_n$ — така відкрита множина в $Y_n$, що $W_n = G_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty}\{*_{X_k}\}$. Для кожного $n$, використовуючи досконалу нормальність простору $Y_n$, виберемо послідовність $(F_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ замкнених множин в $Y_n$ таку, що

$$G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{n,m},$$

де $G_{n,m} = \operatorname{int}_{Y_n} F_{n,m}$. Зафіксуємо $n, m \in \mathbb{N}$. Оскільки множина $W$ відкрита в $\boxdot_{k\in\mathbb{N}} X_k$, то для кожного $m$ та $x \in F_{n,m}$ можна вибрати послідовність $(U_k^x)_{k=1}^{\infty}$ відкритих множин $U_k^x \subseteq X_k$, таку, що $(x, *_{X_{n+1}}, *_{X_{n+2}}, \dots) \in \left(\prod_{k=1}^{\infty} U_k^x\right) \cap \sigma(*) \subseteq W$. Позначимо $B^x = \prod_{k=1}^{n} U^x$. Сім'я $\mathcal{U} = \left(B^x\colon x \in F_{n,m}\right)$ утворює відкрите покриття паракомпактного простору $F_{n,m}$. Виберемо локально скінченне в $F_{n,m}$ (а, отже, і в $Y_n$) покриття $\mathcal{V}$ множини $F_{n,m}$ відкритими множинами, вписане в $\mathcal{U}$. Тоді сім'я $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cap G_{n,m}$ утворює локально скінченне в $Y_n$ покриття множини $G_{n,m}$ відкритими в $Y_n$ множинами, яке вписане в $\mathcal{U}$. Тепер для кожного $V \in \mathcal{V}'$ виберемо таке $x_V \in F_{n,m}$, що $V \subseteq B^{x_V}$, і позначимо $\mathcal{G}_{n,m} = (\bigl(V \times \prod_{k=n+1}^{\infty} U_k^{x_V}\bigr) \cap \sigma(*)\colon V \in \mathcal{V}')$. Зауважимо, що сім'я $\mathcal{G}_{n,m}$ є локально скінченною в $X$, при цьому $G \subseteq W$ для кожного $G \in \mathcal{G}_{n,m}$.

Перенумеруємо послідовність сімей $\mathcal{G}_{n,m}$ у послідовність $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ і отримаємо, що $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{G}_n$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ та $G \in \mathcal{G}_n$ за лемою 2 існує сильно нарізно неперервна функція $h\colon Y_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_n \to [0,1]$, така, що $G = h^{-1}((0,1])$. Для всіх $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ покладемо $f_{G,n}(x) = h((x_1,\dots,x_n), x_{n+1},\dots)$. Тоді функція $f_{G,n}\colon X \to [0,1]$ є сильно нарізно неперервною і $G = (f_{G,n})^{-1}((0,1])$.

Тепер для всіх $x \in X$ покладемо

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\Big(\sum_{G\in\mathcal{G}_n} f_{G,n}(x)\Big).$$

Зауважимо, що оскільки клас дійснозначних ssc-функцій замкнений відносно рівномірних границь і локально скінченних сум, то функція $f\colon X \to [0,1]$ є сильно нарізно неперервною. Крім того, легко бачити, що $W = f^{-1}((0,1])$.

б) Нехай тепер $F$ — замкнена множина в $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$ і $g\colon X \to [0,1]$ — така ssc-функція, що $\sigma(*) \setminus F = g^{-1}((0,1])$. Для кожного $x \in X$ покладемо $f(x) = g(x) + \chi_{X\setminus\sigma(*)}(x)$. Легко бачити, що функція $f$ є шуканою. □

**Теорема 4.** *Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність пунктованих просторів, кожний скінченний добуток яких є досконалим паракомпактом і $W \subseteq \sigma(*)$. Тоді наступні умови рівносильні:*

*1) $W$ — відкрита в $\boxdot_{n\in\mathbb{N}} X_n$;*

*2) $W = f^{-1}((0,1])$ для деякої ssc-функції $f\colon \sigma(*) \to [0,1]$.*

*Доведення.* Імплікацію 1) $\Rightarrow$ 2) отримуємо з теореми 3 і того факту, що звуження *ssc*-функції на множину $\sigma(*)$ залишається ssc-функцією.

Імплікацію 2) $\Rightarrow$ 1) отримуємо з наслідку 1. □

**3. Подяки.** Автор щиро вдячна Рецензентові за цінні поради та вказівки, які дозволили істотно покращити текст статті.

## ЛІТЕРАТУРА

1. J. Činčura, T. Šalát, T. Visnyai, *On separately continuous functions $f\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$*, Acta Acad. Paedagog. Agriensis, XXXI (2004), 11–18.
2. O. Dzagnidze, *Separately continuous function in a new sense are continuous*, Real Anal. Exchange, **24** (1998-99), 695–702.
3. O. Karlova, *On Baire classification of strongly separately continuous functions*, Real Anal. Exch. (accepted).
4. O. Karlova, V. Mykhaylyuk, *On strongly separately continuous mappings on products*, Math. Slovaca (accepted).
5. T. Visnyai, *Strongly separately continuous and separately quasicontinuous functions $f\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$*, Real Anal. Exchange, **38** (2013), №2, 499–510.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
Maslenizza.ua@gmail.com

*Надійшло 13.06.2014*
*Після переробки 27.11.2014*