УДК 517.584, 517.518.32

О. В. Шавала

ПРО ДЕЯКІ АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ З ІНДЕКСОМ $-5/2$

O. V. Shavala. *On some approximation properties of the Bessel functions of order* $-5/2$, Mat. Stud. **43** (2015), 180–184.

Completeness and minimality of the system of functions generated by the Bessel function of order $-5/2$ are studied.

Е. В. Шавала. *О некоторых аппроксимационных свойствах функций Бесселя с индексом* $-5/2$ // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №2. – С.180–184.

Исследуются полнота и минимальность системы функций, порожденных функцией Бесселя с индексом $-5/2$.

Нехай J_ν — функція Бесселя першого роду з індексом ν. Значна кількість праць присвячена дослідженню апроксимаційних властивостей системи $\{\sqrt{x}J_\nu(\rho_n x)\colon n\in\mathbb{N}\}$, якщо $\nu>-1$ ([1], [3], [6], [7], [13], [16], [21]). Зокрема, відомим є таке твердження.

Теорема A ([7])**.** *Нехай $\nu>-1$ і $\{\rho_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ — множина додатних нулів функції J_ν. Тоді система $\{\sqrt{x}J_\nu(\rho_n x)\colon n\in\mathbb{N}\}$ утворює ортогональний базис простору $L_2(0;1)$.*

Водночас, про апроксимаційні властивості цієї системи у випадку, коли $\nu<-1, \nu\notin\mathbb{Z}$ відомі лише окремі факти ([3], [14], [17], [18]). Інтерес до дослідження властивостей функцій Бесселя у випадку, коли $\nu<-1$, $\nu\notin\mathbb{Z}$ зріс у зв'язку з розглядом деяких крайових задач ([19], [20]) та узагальнених власних векторів ([15, c. 40]). Якщо $\nu<-1$ — неціле число, то за класичною теоремою Гурвіца ([2, c. 71], [8], [21, c. 483]), функція $J_\nu(z)$ має нескінченну множину простих нулів $\{\rho_{n,\nu}\}$, серед яких можуть бути і недійсні. Нехай $\{\rho_n=\rho_{n,\nu}\colon n\in\mathbb{N}\}$ множина тих нулів функції J_ν, для яких $\rho_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ і $\big\{\tau_n=\rho_{n,\nu}\colon n\in\{1,\dots,[-\nu]\}\big\}$ множина тих нулів функції J_ν, для яких $\operatorname{Im}\tau_n>0$. Зокрема, функція $J_{-5/2}$ має лише два нулі з додатною уявною частиною. Вважатимемо, що ними є τ_1 та τ_2. Нехай $L_2((0;1);x^p dx)$ — простір вимірних функцій, для яких

$$\int_0^1 t^p|F(t)|^2dt<+\infty$$

зі скалярним добутком $\langle u;v\rangle=\int_0^1 t^p u(t)\overline{v(t)}dt$ і нормою $\|u\|=\sqrt{\int_0^1 t^p|u(t)|^2dt}$. Систему елементів в банаховому просторі називатимемо *мінімальною,* якщо жоден елемент

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B60, 30D20, 33C10, 41A30.
Keywords: Bessel function; zeros of Bessel function; completeness and minimality of systems; biorthogonal system.
doi:10.15330/ms.43.2.180-184

цієї системи не належить до замкненої лінійної оболонки інших елементів ([9, с.65]). З доведеного у статті Б. В. Винницького і О. В. Шавали ([17]) елементарно випливає, що у випадку $\nu = -3/2$ система $\{\sqrt{x}J_{-3/2}(\rho_n x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в просторі $L_2((0;1);x^2dx)$, але не є базисом у цьому просторі. Поширити це твердження на довільне неціле $\nu < -1$ нам не вдалось. Ми отримали таку теорему.

Теорема. *Нехай (ρ_n) і (τ_n) — нулі функції $J_{-5/2}$. Тоді система $\{\sqrt{x}J_{-5/2}(\rho_n x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в просторі $L_2((0;1);x^4dx)$. Крім цього, біортогональною до неї є система $\{\gamma_k(x)\colon k \in \mathbb{N}\}$, де*

$$\overline{\gamma_k}(x) := \frac{2\sqrt{x}}{(\tau_1^2-\tau_2^2)\rho_k^{5/2}J^2_{-3/2}(\rho_k)x^4}\times$$
$$\times\Big((\rho_k^2-\tau_2^2)(\rho_k^{5/2}J_{-5/2}(\rho_k x)-\tau_1^{5/2}J_{-5/2}(\tau_1 x))-(\rho_k^2-\tau_1^2)(\rho_k^{5/2}J_{-5/2}(\rho_k x)-\tau_2^{5/2}J_{-5/2}(\tau_2 x))\Big).$$

Доведення. Скористаємось методом з [17]. Припустимо, що система $\{e_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$, де $e_n(x) = \sqrt{x}J_{-5/2}(\rho_n x)$ неповна. Оскільки $L_2((0;1);x^4dx)$ — гільбертовий простір ([10, с. 84]), то за теоремою Ріса лінійний функціонал у цьому просторі має вигляд $f(e_n) = \int_0^1 e_n(t)\phi(t)t^4dt$, де ϕ — фіксований елемент простору $L_2((0;1);x^4dx)$ і через неповноту системи $\{e_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$

$$\int_0^1 e_n(t)\phi(t)t^4dt = 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{або} \quad \int_0^1 t^{9/2}J_{-5/2}(\rho_n t)\phi(t)dt = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Нехай

$$Q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 t^{9/2}z^{5/2}J_{-5/2}(zt)\phi(t)dt. \tag{1}$$

Оскільки $z^{5/2}J_{-5/2}(z) = \sqrt{2/\pi}(-z^2\cos z + 3z\sin z + 3\cos z)$ ([4, с. 925]), то

$$Q(z) = 3Q_1(z) + 3zQ_2(z) - z^2Q_3(z),$$

де $Q_1(z) = \int_0^1 \widetilde{\phi}(t)\cos(zt)dt$, $Q_2(z) = \int_0^1 \widetilde{\phi}(t)t\sin(zt)dt$, $Q_3(z) = \int_0^1 \widetilde{\phi}(t)t^2\cos(zt)dt$, $\widetilde{\phi}(x) := x^2\phi(x)$. При цьому, $\widetilde{\phi} \in L_2(0;1)$ і Q — парна ціла функція, яка має нулі в точках ρ_n, $n \in \mathbb{N}$ і τ_n, $n \in \{1;2\}$. Функції Q_1, Q_2 та Q_3 є цілими функціями експоненційного типу $\sigma \le 1$, квадрат модуля яких є інтегрованим на дійсній осі, тобто, належать до класу Пелі-Вінера. За нерівністю Коші-Буняковського

$$|Q_j(z)| \le \frac{c_1e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}, \quad j \in \{1;2;3\}, \quad z \in \mathbb{C},$$
$$|Q(z)| \le c_2\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}(1+|z|)^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай $L(z) := -z^2\cos z + 3z\sin z + 3\cos z$, $Q_0(z) = L(z)/((z^2-\tau_1^2)(z^2-\tau_2^2))$, $\Omega = Q/Q_0$ і $G_k = \{z\colon |\arg z - k\pi/2| < \pi/4\}$, $k \in \{0;1;2;3\}$. Тоді, Ω є цілою парною функцією порядку $\widetilde{\rho} \le 1$. Крім цього, $|\Omega(z)| \le c_3(1+|z|)^{7/2}$, $\arg z = \pi/4 + k\pi/2$, $k \in \{0;1;2;3\}$.

Остання нерівність виконується для всіх $z \in \mathbb{C}$. Справді, візьмемо довільну однозначну вітку функції $\sqrt{i^k+z}$ в G_k і розглянемо аналітичну в області G_k функцію

$$\widetilde{\Omega}_k(z) = \frac{\Omega(z)}{(i^k+z)^3\cdot\sqrt{i^k+z}}\ .$$

На межі області G_k функція $\widetilde{\Omega}_k$ є обмеженою. Тому, за принципом Фрагмена–Ліндельофа, вона є обмеженою в G_k. Отже, $|\Omega(z)| \le c_3(1+|z|)^{7/2}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Але, Ω — парна ціла функція. Тому, $Q(z) = (a_1z^2 + a_2)Q_0(z)$, де a_1, a_2 — довільні комплексні числа. Отже, з (1) отримуємо

$$((a_1z^2+a_2)Q_0(z))' = \int_0^1 (zt^2\cos(zt) + z^2t^3\sin(zt))\widetilde{\phi}(t)dt,$$

$$\frac{\left(\frac{((a_1z^2+a_2)Q_0(z))'}{z}\right)'}{z} = \int_0^1 \widetilde{\phi}(t)t^4\cos(zt)dt. \tag{2}$$

За теоремою 1 зі статті [19], враховуючи рівності $-\tau_n^2\cos\tau_n + 3\tau_n\sin\tau_n + 3\cos\tau_n = 0$, $n \in \{1;2\}$, отримуємо

$$\frac{\left(\frac{(L(z)/(z^2-\tau_j^2))'}{z}\right)'}{z} = \frac{3}{\tau_j^4\cos\tau_j}\int_0^1 \widetilde{e}_j(t)\cos(zt)dt, \quad j \in \{1;2\},$$

де $\widetilde{e}_j(x) = -(\tau_jx)^2\cos(\tau_jx) + 3\tau_jx\sin(\tau_jx) + 3\cos(\tau_jx)$. Далі, виберемо A і B так, щоб $A(z^2-\tau_1^2) + B(z^2-\tau_2^2) = a_1z^2 + a_2$. Це можна зробити, оскільки $\tau_1^2 - \tau_2^2 \ne 0$ і, тому, система $\begin{cases} A+B = a_1, \\ -\tau_1^2A - \tau_2^2B = a_2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок. Тоді,

$$\frac{\left(\frac{((a_1z^2+a_2)Q_0(z))'}{z}\right)'}{z} = \frac{\left(\frac{((A(z^2-\tau_1^2)+B(z^2-\tau_2^2))Q_0(z))'}{z}\right)'}{z} = B\frac{\left(\frac{(L(z)/(z^2-\tau_1^2))'}{z}\right)'}{z} +$$
$$+A\frac{\left(\frac{(L(z)/(z^2-\tau_2^2))'}{z}\right)'}{z} = \frac{3B}{\tau_1^4\cos\tau_1}\int_0^1 \widetilde{e}_1(t)\cos(zt)dt + \frac{3A}{\tau_2^4\cos\tau_2}\int_0^1 \widetilde{e}_2(t)\cos(zt)dt =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{3B\widetilde{e}_1(t)}{\tau_1^4\cos\tau_1} + \frac{3A\widetilde{e}_2(t)}{\tau_2^4\cos\tau_2}\right)\cos(zt)dt. \tag{3}$$

Оскільки

$$\frac{\left(\frac{(L(z)/(z^2-\tau_j^2))'}{z}\right)'}{z} = \frac{-(24+\tau_j^4-12z^2+z^4-2\tau_j^2(z^2-2))\cos z + 4z(z^2-6-\tau_j^2)\sin z}{-(z^2-\tau_j^2)^3},$$

то функція

$$\frac{\left(\frac{((a_1z^2+a_2)Q_0(z))'}{z}\right)'}{z} = B\frac{\left(\frac{(L(z)/(z^2-\tau_1^2))'}{z}\right)'}{z} + A\frac{\left(\frac{(L(z)/(z^2-\tau_2^2))'}{z}\right)'}{z}$$

належить до класу Пелі-Вінера і для неї існує ([11, с. 17]) єдина функція $\varphi \in L_2(0;1)$ така, що

$$\frac{\left(\frac{((a_1z^2+a_2)Q_0(z))'}{z}\right)'}{z} = \int_0^1 \varphi(t)\cos(zt)dt.$$

Враховуючи (2) і (3), отримуємо $\widetilde{\phi}(t) = \left(\frac{3B\widetilde{e}_1(t)}{\tau_1^4\cos\tau_1} + \frac{3A\widetilde{e}_2(t)}{\tau_2^4\cos\tau_2}\right)/t^4$. Оскільки $\widetilde{\phi} \in L_2(0;1)$ і $\widetilde{e}_n(x) = 3 + \tau_n^2 x^2/2 + \tau_n^4 x^4/8 + O(x^6)$, $x \to 0$, то це можливо лише у випадку, коли

$$\begin{cases} \frac{B}{\tau_1^4\cos\tau_1} + \frac{A}{\tau_2^4\cos\tau_2} = 0, \\ \frac{B}{\tau_1^2\cos\tau_1} + \frac{A}{\tau_2^2\cos\tau_2} = 0. \end{cases}$$

Остання система має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\tau_1^2 = \tau_2^2$, що неможливо. Тому, $\widetilde{\phi} = 0$, що суперечить нашому припущенню. Отже, система $\{e_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ є повною в просторі $L_2((0;1); x^4dx)$.

Відомо ([9, с. 65]), що для того, щоб система $\{e_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ була мінімальною необхідно і достатньо, щоб існувала система лінійних функціоналів, яка утворює з даною системою біортогональну систему, тобто, $\langle e_n; \gamma_k\rangle = \delta_{kn}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Переконаємось, що система $\{\gamma_k(x)\colon k \in \mathbb{N}\}$ є біортогональною до системи $\{e_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$. Оскільки

$$x^{9/2}J_{-5/2}(\rho_n x)\overline{\gamma_k}(x) = \frac{3(\rho_k^2 - \tau_2^2)(\rho_k^2 - \tau_1^2)}{2\pi\rho_k^{5/2}\rho_n^{5/2}J_{-3/2}^2(\rho_k)} + o(1), \quad x \to 0$$

і ([2, с. 104], [4, с. 629], [12, с. 38])

$$\int tJ_{-5/2}(\alpha t)J_{-5/2}(\beta t)dt = t\frac{\alpha J_{-3/2}(\alpha t)J_{-5/2}(\beta t) - \beta J_{-3/2}(\beta t)J_{-5/2}(\alpha t)}{\alpha^2 - \beta^2} + c,\ \alpha^2 \neq \beta^2,$$

то $\langle\sqrt{x}J_{-5/2}(\rho_n x); \gamma_k(x)\rangle = 0$, якщо $k \neq n$. Далі, ([2, с. 104], [4, с. 629], [12, с. 38])

$$\int tJ_{-5/2}^2(\alpha t)dt = \frac{t^2}{2}(J_{-5/2}^2(\alpha t) - J_{-7/2}(\alpha t)J_{-3/2}(\alpha t)) + c$$

і ([21, с.45]) $J_{-7/2}(x) = -J_{-3/2}(x) - 5x^{-1}J_{-5/2}(x)$. Тому $\langle\sqrt{x}J_{-5/2}(\rho_n x); \gamma_n(x)\rangle = 1$. □

Зауваження 1. При доведенні повноти системи $\{e_n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ на відміну від того, як це робилося у статті [17], тут ми застосовуємо заміну $a_1z^2 + a_2 = A(z^2 - \tau_1^2) + B(z^2 - \tau_2^2)$. Це дає змогу, використовуючи результати статті [19], досліджувати повноту системи функцій Бесселя з довільним напівцілим індексом меншим за -1.

Зауваження 2. Отримані твердження можна переформулювати для сферичних функцій Бесселя ([5, с.437]) $j_{-3}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{-5/2}(z)$.

Подяки. Автор висловлює щиру подяку Б. В. Винницькому і Р. В. Хацю за їхні корисні зауваження щодо вигляду біортогональної системи та Рецензенту за змістовні зауваження, які посприяли покращенню тексту статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. L. Abreu, *Completeness, special functions and uncertainty principles over q-linear grids*, available at: http://arxiv.org/pdf/math/0602440.pdf.
2. H. Bateman, A. Erdélyi, Higher transcendental functions. – V.2, Nauka, Moscow, 1966. (in Russian)

3. R. Boas, H. Pollard, *Complete sets of Bessel and Legendre functions*, Annals of Math., **48** (1947), №2, 366–384.
4. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products. – Academic Press, Amsterdam, 2007.
5. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards – U.S. Government Printing Office, USA, 1972.
6. J.R. Higgins, Completeness and basis properties of sets of special functions. – Cambridge university press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1977.
7. H. Hochstadt, *The mean convergence of Fourier-Bessel series*, SIAM Review, **9** (1967), №2, 211–218.
8. A. Hurwitz, *Uber die Nullstellen der Bessel'schen Function*, Math. Ann., **33** (1889), 246–266.
9. S. G. Krein (editor and coauthor), Functional Analysis. – Nauka, Moskow, 1972. (in Russian)
10. L.A. Lyusternik, V.I. Sobolev, Elements of functional analysis. – Nauka, Moskow, 1965. (in Russian)
11. L.S. Maergoiz, N.N. Tarkhanov, *An analogue of the Paley-Winer theorem and its applications to optimal recovery of entire functions*, Ufimsk. Mat. Zh., **3** (2011), №1, 16–30. (in Russian)
12. A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, Integrals and Series. – V.2: Special Functions, FIZMATLIT, Moscow, 2003. (in Russian)
13. V.S. Vladimirov, The equations of mathematical physics. – Nauka, Moscow, 1981. (in Russian)
14. B.V. Vynnyts'kyi, V.M. Dilnyi, *On some analogues of Paley-Wiener theorem and one boundary value problem for Bessel operator*, Int. conf. on complex analysis in memory of A.A. Gol'dberg, Lviv, 2010, 63–64.
15. B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats', *A note concerning generalized eigenvectors of linear differential operators*, Actual problems of physics, mathematics and informatics, **5** (2013), 38–41. (in Ukrainian)
16. B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats', *Completeness and minimality of systems of Bessel functions*, Ufimsk. Mat. Zh., **5** (2013), №2, 132–141.
17. B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala, *Boundedness of solutions of a second-order linear differential equation and a boundary value problem for Bessel's equation*, Mat. Stud., **30** (2008), №1, 31–41. (in Ukrainian)
18. B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala, *On completeness of the system* $\{\cos(\rho_n x)+\rho_n x\sin(\rho_n x)\}$ *and a boundary value problem for Bessel operator*, Int. conf. Analysis and Topology, Lviv, 2008, 54–55.
19. B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala, *Some properties of boundary value problems for Bessel's equation*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka, **10** (2013), 189–192.
20. B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala, Some properties of boundary value problems generated by Bessel's equation, Int. conf. dedicated to the 120th anniversary of S. Banach, Lviv, 2012, 70 p.
21. G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. – Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University
Shavala@ukr.net

Надійшло 12.06.2012
Після переробки 14.08.2013
Після переробки 28.11.2014