УДК 517.574

$\boxed{\text{А. Ф. Гришин}}$, Н. В. Куинь

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА АЗАРИНА ДЛЯ МЕР РАДОНА. II

$\boxed{\text{A. F. Grishin}}$, N. V. Quynh. *Azarov limit sets for Radon measures. II*, Mat. Stud. **43** (2015), 189–219.

In this part of the work we prove theorems 1–9 which have been formulated in the first part (Mat. Stud. 2015, **43**(1), 94–99).

$\boxed{\text{А. Ф. Гришин}}$, Н. В. Куинь. *Предельные множества Азарина для мер Радона. II* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №2. – С.189–219.

В этой части работы будут доказаны теоремы 1–9, которые были сформулированы в первой части (Mat. Stud. 2015, **43**(1), 94–99).

Эта статья содержит доказательства теорем, анонсированных в первой части нашей работы [1].

1. Необходимые определения и обозначения, предварительные сведения. Через $\|x-x_0\|$ обозначаем евклидово расстояние в m-мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m\ge 2)$ между точками $x, x_0\in\mathbb{R}^m$. В случае комплексной плоскости $\mathbb{C}$ используем стандартное обозначение $|z-z_0| := \|z-z_0\|$. Для $x_0\in\mathbb{R}^m$ ($x_0\in\mathbb{C}$ в случае $m=2$) и $r>0$ положим

$$B(x_0,R)=\{x\in\mathbb{R}^m:\ \|x-x_0\|\le r\},\quad C(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^m:\ \|x-x_0\|<r\},$$
$$S(x_0,R)=\{x\in\mathbb{R}^m:\ \|x-x_0\|=r\},$$

а для $0<a\le b$

$$R([a,b])=B(0,b)\setminus C(0,a),\quad R((a,b])=B(0,b)\setminus B(0,a),$$
$$R([a,b))=C(0,b)\setminus C(0,a),\quad R((a,b))=C(0,b)\setminus B(0,a).$$

Непрерывно дифференцируемая функция $\rho(r)$ на полуоси $(0,\infty)$ называется *уточнённым порядком*, если выполняются два условия:

1) существует предел $\rho=\rho(\infty)=\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)$; 2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\ln r\rho'(r)=0$.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется *нулевым уточнённым порядком*, если выполняется равенство $\rho=0$.

В случае нулевого уточнённого порядка $\rho(r)$, кроме условий 1) и 2) из определения уточнённого порядка мы будем требовать, чтобы выполнялось условие $\rho\left(\frac{1}{r}\right)=-\rho(r)$. Это условие множно также записать в виде $V(\frac{1}{r})=V(r)$, где $V(r)=r^{\rho(r)}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31A05, 31B05.
Keywords: proximate order; limit set of Azarin.
doi:10.15330/ms.43.2.189-219

В случае произвольного уточнённого порядка $\rho(r)$ мы будем считать, что произвольный уточнённый порядок $\rho(r)$ представляется в виде $\rho(r) = \rho + \rho_1(r)$, где $\rho_1(r)$ — нулевой уточнённый порядок.

Пусть $\rho(r)$ — нулевой уточнённый порядок. Обозначим

$$\gamma(t) = \sup_{r>0} \frac{V(rt)}{V(r)}.$$

Если $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок, то выполняется неравенство

$$V(rt) \le \gamma(t) t^{\rho} V(r), \tag{1}$$

где функция $\gamma(t)$ построена с помощью нулевого уточнённого порядка $\rho_1(r)$. Получение неравенства (1) подробно описано в [2, раздел 2].

В следующем утверждении, доказательство которого можно найти в [3], формулируется наиболее часто используемое свойство уточнённого порядка.

Предложение 1. *Пусть $\rho(r)$ — уточнённый порядок, $\rho = \rho(\infty)$. Тогда для любого $t > 0$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^{\rho}.$$

Этот предел равномерный по t на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Символы $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{D}'(G)$ — стандартные обозначения для пространств основных и обобщённых функций Шварца в области $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \ge 2$. Напомним, что пространство $\mathcal{D}(G)$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в G, а пространство $\mathcal{D}'(G)$ определяется как пространство линейных непрерывных функционалов над пространством $\mathcal{D}(G)$. Изложение теории обобщённых функций можно найти в [4].

Пространство $\Phi(G)$ определяется как пространство непрерывных функций $\varphi(x)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$ таким, что $\operatorname{supp}\varphi \subset G$. *Пространство радоновых мер* $\mathcal{M}(G)$ определяется как пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $\Phi(G)$. Изложение теории радоновых мер можно найти в [5].

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется *широко ограниченным*, если для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ множество вещественных чисел $\{(\mu, \varphi) : \ \mu \in \mathfrak{M}\}$ является ограниченным.

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется *сильно ограниченным*, если для любого компакта $K \subset G$ множество $\{|\mu|(K) : \ \mu \in \mathfrak{M}\}$ является ограниченным.

Сходимость последовательности радоновых мер в пространстве $\mathcal{M}(G)$ мы, следуя Бурбаки, будем называть *широкой сходимостью. Широкая сходимость* последовательности μ_n радоновых мер к радоновой мере μ *означает*, что для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n, \varphi) = (\mu, \varphi).$$

В работе используются различные виды сходимости. Поскольку каждая радонова мера μ является обобщённой функцией, то можно рассматривать сходимость последовательности μ_n в пространстве $\mathcal{D}'(G)$. Если последовательность μ_n радоновых мер в G сходится к радоновой мере μ в пространстве $\mathcal{D}'(G)$, то это мы будем обозначать

$$\mu = \tau \lim_{n\to\infty} \mu_n.$$

Очевидно, что из широкой сходимости последовательности радоновых мер следует её сходимость в пространстве $\mathcal{D}'(G)$. Обратное утверждение не верно.

Семейство $\mathfrak{M}$ радоновых мер в G называется *компактным*, если всякая последовательность мер $\mu_n \in \mathfrak{M}$ имеет сходящуюся подпоследовательность.

Для нас важен следующий результат, доказательство которого можно найти в [5] (глава 3, §1, предложение 15 и примечание к нему).

Предложение 2. *Семейства широко ограниченных, сильно ограниченных и компактных множеств в пространстве $\mathcal{M}(G)$ совпадают.*

Нам будут нужны следующие предложения.

Предложение 3. *Для того, чтобы последовательность μ_n положительных радоновых мер в G широко сходилась к радоновой мере μ, достаточно, чтобы соотношение $(\mu_n, \varphi) \to (\mu, \varphi)$ выполнялось на всюду плотном множестве в пространстве $\Phi(G)$.*

Предложение 4. *Пусть радоновы меры μ и ν в пространстве $\mathcal{M}(G)$ таковы, что равенство $(\mu, \varphi) = (\nu, \varphi)$ выполняется на всюду плотном множестве в пространстве $\Phi(G)$. Тогда $\mu = \nu$.*

Доказательство этих предложений можно найти в [6] (введение, §1).

Обычно мы будем использовать широкую сходимость радоновых мер. Между тем, часто рассуждения удобнее проводить в метрических пространствах. Поэтому мы будем использовать в пространстве $\mathcal{M}(G)$ следующие известные метрики. Пусть $\{\varphi_n,\ n \in \{1, 2, \dots\}\}$ — счётное всюду плотное множество в пространстве $\Phi(G)$. Это означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi(G)$ существует подпоследовательность φ_{n_k} последовательности φ_n такая, что $\varphi_{n_k} \to \varphi$ в пространстве $\Phi(G)$. Далее по последовательности φ_n определяем функцию

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\mu_2 - \mu_1, \varphi_n)|}{2^n(1 + |(\mu_2 - \mu_1, \varphi_n)|)},$$

где $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathcal{M}(G)$. Легко проверяется что d — метрика в пространстве $\mathcal{M}(G)$.

Более того, легко видеть, что из соотношения $\mu_k \to \mu$ следует, что $d(\mu_k, \mu) \to 0$. Однако, обратное утверждение неверно. Пусть, например, все функции φ_n непрерывно дифференцируемы, а

$$\mu_k = k\Big(\delta\Big(x - 1 - \frac{1}{2k}\Big) - \delta\Big(x - 1 + \frac{1}{2k}\Big)\Big) - \sqrt{2}k\Big(\delta\Big(x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}k}\Big) - \delta\Big(x - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}k}\Big)\Big),$$

где $\delta(x-a)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке a. Тогда $d(\mu_k, 0) \to 0$, в то время как соотношение $\mu_k \to 0$ не выполняется. Однако, справедливо следующее предложение.

Предложение 5. *Если μ_k — компактная последовательность в $\mathcal{M}(G)$ и $d(\mu_k, \mu) \to 0$, то μ_k широко сходится к μ.*

Доказательство. Если утверждение предложения неверно, то существует функция $\varphi \in \Phi(G)$ и две подпоследовательности $\mu_{k_p^1},\ \mu_{k_p^2}$ последовательности μ_k такие, что

$$\lim_{p\to\infty} (\mu_{k_p^1}, \varphi) \neq \lim_{p\to\infty} (\mu_{k_p^2}, \varphi).$$

Пусть $\nu_p = \mu_{k_p^1} - \mu_{k_p^2}$, а φ_n-та последовательность функций из $\Phi(G)$, которая определяет метрику d. Поскольку последовательность φ_n всюду плотная в $\Phi(G)$, то существует подпоследовательность ψ_n последовательности φ_n, которая сходится к φ в пространстве $\Phi(G)$. Существует компакт $K \subset G$ такой, что $\operatorname{supp} \psi_n \subset K$ для любого n. При этом из условия следует, что $d(\mu_{k_p^1}, \mu_{k_p^2}) \to 0$, поэтому для любой функции φ_n, определяющей метрику d, имеем $(\nu_p, \varphi_n) \to 0$ при $p \to \infty$ и фиксированном n. Ввиду предложении 2 с некоторой константой M, не зависящей от n, выполняется неравенство $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}} |(\nu_p, \varphi)| \le M\|\varphi - \psi_n\|$. Из этого следует, что $(\nu_p, \varphi) \to 0$. Это противоречит выбору φ. □

Таким образом, в общем случае сходимость в метрике d слабее широкой сходимости в $\mathcal{M}(G)$, в то время как на компактных множествах в $\mathcal{M}(G)$ оба вида сходимости эквивалентны. Метрика d определяется счётной всюду плотной последовательностью φ_n. Следовательно существует бесконечное число метрик такого типа. В общем случае из сходимости последовательности μ_n в одной метрике не следует сходимости в другой метрике. Однако на компактных множествах в $\mathcal{M}(G)$ сходимость последовательности μ_n в одной из метрик влечёт широкую сходимость этой последовательности и, значит, сходимость μ_n в любой метрике рассматриваемого типа.

Предложение 6. *Пусть последовательность μ_n радоновых мер в области G сходится к радоновой мере μ в пространстве $\mathcal{D}'(G)$ и пусть последовательность μ_n сильно ограничена в пространстве $\mathcal{M}(G)$. Тогда последовательность μ_n широко сходится к мере μ.*

Это следствие теоремы 3.8 ([7]).

Пусть μ_n — последовательность борелевских мер на компакте K, т.е функционалов на пространстве $C(K)$ непрерывных функций на K. Говорят, что последовательность μ_n *слабо сходится* к μ (обозначение $\mu = \mathrm{w}\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$), если для любой функции $\varphi \in C(K)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_K \varphi(x) d\mu_n(x) = \int_K \varphi(x) d\mu(x).$$

Предложение 7. *Пусть последовательность радоновых мер $\mu_n \in \mathcal{M}(G)$ сходится к радоновой мере μ, а последовательность $|\mu_n|$ сходится к мере $\hat{\mu}$. Пусть K — компакт такой, что $K \subset G$ и $\hat{\mu}(\partial K) = 0$. Тогда последовательность μ_n, рассматриваемая как последовательность борелевских мер на K, слабо сходится к мере μ.*

Доказательство. То, что для случая положительных мер теорема справедлива, следует из теоремы 0.5 из [6]. Доказательство сформулированного предложения получается применением теоремы 0.5 из [6] к мерам $(\mu_n)_+$ и $(\mu_n)_-$. □

Предложение 8. *Пусть A — компактное множество в пространстве $\mathcal{M}(G)$ и $\bar{A}$ — замыкание A в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(G), d)$. Тогда $\bar{A}$ — компактное множество в пространстве $(\mathcal{M}(G), d)$.*

Доказательство. Поскольку A — компактное множество в $\mathcal{M}(G)$, то по предложению 2 это сильно ограниченное множество. Поэтому для любого компакта $K \subset G$ выполняется неравенство $c(K) = \sup\{|\nu|(K) : \ \nu \in A\} < \infty$. Пусть α — произвольная мера из $\bar{A}$. Тогда существует последовательность мер (α_n) из A такая, что $\alpha = d\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

По предложению 5 последовательность мер (α_n) широко сходится к мере α. Тем более, выполняется равенство $\alpha = d\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Пусть (γ_n) — произвольная последовательность мер из $\bar{A}$. По доказанному существует мера λ_n из A такая, что $d(\gamma_n, \lambda_n) < \frac{1}{n}$. Поскольку A — компактное множество в пространстве $\Phi(G)$, то у последовательности (λ_n) есть широко сходящаяся подпоследовательность (λ_{n_k}). Пусть $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k}$. Также выполняется равенство $\lambda = d\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k}$. Из этого следует, что $\lambda = d\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{n_k}$. □

Предложение 9. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, содержащая шар (круг) $B(0,1)$. Пусть μ_n такая последовательность радоновых мер в G, что $\mu_n \to \mu$, $|\mu_n| \to \hat{\mu}$, причём $\hat{\mu}(S(0,1)) = 0$. Пусть φ — ограниченная финитная в G борелевская функция в $\mathbb{R}^m$, непрерывная на множестве $\mathbb{R}^m \setminus S(0,1)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \varphi(x) d\mu_n(x) = \int_G \varphi(x) d\mu(x).$$

Доказательство. Пусть $1 = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ такое непрерывное разбиение единицы, что $\operatorname{supp} \psi_1 \cap R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon]) = \varnothing$, $\operatorname{supp} \psi_2 \subset R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$. Имеем

$$\left| \int_G \varphi(x) d(\mu_n - \mu)(x) \right| \leq \left| \int_G \varphi(x)\psi_1(x) d(\mu_n - \mu)(x) \right| + \left| \int_G \varphi(x)\psi_2(x) d(\mu_n - \mu)(x) \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_G \varphi(x)\psi_1(x) d(\mu_n - \mu)(x) \right| + \|\varphi\| (|\mu_n|(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])) + |\mu|(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]))).$$

Поскольку функция $\varphi(x)\psi_1(x)$ принадлежит множеству $\Phi(G)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \varphi(x)\psi_1(x) d(\mu_n - \mu)(x) = 0.$$

Если число ε выбрать так, чтобы выполнялись равенства $\hat{\mu}(S(0, 1-2\varepsilon)) = \hat{\mu}(S(0, 1+2\varepsilon)) = 0$, то из теоремы 0.5 ([5]) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = \hat{\mu}(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]).$$

Поскольку $\hat{\mu}(S(0,1)) = 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{\mu}(R([1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = 0$.

Следовательно, величину $|\mu_n|(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$ выбором ε и n можно сделать сколь угодно малой. То же самое верно и для величины $\mu_n(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) = \mu_n^+(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon]) - \mu_n^-(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$ и, следовательно, для $\mu(R[1-2\varepsilon, 1+2\varepsilon])$.

Из этого, как легко усмотреть из предыдущих рассуждений следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \varphi(x) d\mu_n(x) = \int_G \varphi(x) d\mu(x).$$ □

2. Предельные множества Азарина радоновых мер. В этом разделе предполагаем, что уточнённый порядок $\rho(r)$ удовлетворяет условию $\rho = \rho(\infty) > 0$. В дальнейшем это условие дополнительно не оговаривается.

Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок. Величина

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{|\mu|(B(0,r))}{V(r)}$$

называется *типом меры* μ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Если $\sigma < \infty$, то мера μ называется мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$.

Если мера μ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, то существует постоянная C такая, что при $r \geq 1$ выполняется неравенство

$$|\mu|(B(0,r)) \leq CV(r). \tag{2}$$

Если при этом мера μ *не нагружает* шар (круг) $B(0,1)$, то неравенство (2) выполняется при $r > 0$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок. Обозначим через μ_t $(t > 0)$ следующую меру $\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)}$. Будем также писать $\mu_t = A_t\mu$. Если $\rho(r) \equiv \rho$, то наряду с обозначением A_t будем употреблять обозначение F_t. Отображение $A_t:\ \mu \to \mu_t$ мы будем называть *отображением Азарина* (порождённым уточнённым порядком $\rho(r)$).

Множество $\{\mu_t:\ t > 0\}$ называется *траекторией* меры μ.

Множество $\{\mu_t:\ t \geq 1\}$ называется *положительной полутраекторией* меры μ.

Множество мер ν вида $\nu = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}$, где $t_n \to \infty$, будем называть *предельным множеством Азарина* меры μ (относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и обозначать $\mathrm{Fr}[\mu]$ или если нужно $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)]$.

Меру μ_t можно рассматривать как значение отображения $A(t,\mu) : (0,\infty)\times\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ в точке (t,μ).

Приведем нужные нам леммы, которые, по существу, вытекают из предыдущих определений и утверждений.

Лемма 1. *Отображение $A(t,\mu)$ непрерывно по совокупности переменных. Это означает, что если $t \to t_0$, $\mu_n \to \mu$, то $(\mu_n)_t \to \mu_{t_0}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^m)$. Имеем

$$((\mu_n)_t, \varphi) = \frac{1}{V(t)} \int \varphi\Big(\frac{x}{t}\Big) d\mu_n(x) = \frac{1}{V(t_0)} \int \varphi\Big(\frac{x}{t_0}\Big) d\mu_n(x) +$$
$$+ \int \left(\frac{1}{V(t)} \varphi\Big(\frac{x}{t}\Big) - \frac{1}{V(t_0)} \varphi\Big(\frac{x}{t_0}\Big) \right) d\mu_n(x) := J_1(n,t_0) + J_2(n,t,t_0).$$

Справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n,t_0) = (\mu_{t_0}, \varphi)$;

2) $|J_2(n,t,t_0)| \leq \sup\left\{ \Big| \frac{1}{V(t)} \varphi\Big(\frac{x}{t}\Big) - \frac{1}{V(t_0)} \varphi\Big(\frac{x}{t_0}\Big) \Big| |\mu_n|(K) \colon |t - t_0| \leq \delta, x \in \operatorname{supp} \varphi \right\}$,

где K такой компакт, что $\operatorname{supp} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \subset K$.

Из предложения 2 следует, что последовательность $|\mu_n|(K)$ ограничена. Из сказанного выше легко следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2. *Пусть μ — финитная конечная борелевская мера, $\rho(r)$ — уточнённый порядок. Тогда для любого $r > 0$ выполняется $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_t(B(0,r)) = 0$.*

Утвеждение леммы очевидно.

Лемма 3. *Пусть μ — радонова мера, λ — ограничение меры μ на множество $CB(0,1)$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок. Тогда множества $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)]$ и $\mathrm{Fr}[\lambda, \rho(r)]$ совпадают.*

Доказательство. Пусть λ_1 — ограничение меры μ на шар (круг) $B(0,1)$. Справедливо равенство $\mu = \lambda_1 + \lambda$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 2. $\square$

Лемма 4. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Тогда существует постоянная C такая, что при $t > 0$ и $r > 0$ выполняется неравенство*

$$|\mu_t|(B(0,r)) \le C\gamma(r)r^{\rho},\ \ \rho = \rho(\infty).$$

Доказательство. Имеем, учитывая неравенство (2),

$$|\mu_t|(B(0,r)) = |\mu|(B(0,rt))/V(t) \le CV(rt)/V(t).$$

Осталось применить неравенство (1). $\square$

Лемма 5. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, имеющаяся не более чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть мера μ_t строится с помощью уточнённого порядка $\rho(r)$. Тогда положительная полутраектория меры μ есть компактное множество в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$.*

Замечание. На языке теории динамических систем это означает, что мера μ положительно устойчива по Лагранжу.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что лемму достаточно доказать для случая, когда мера не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Теперь утверждение леммы следует из леммы 4 и предложения 2. $\square$

Обозначим через $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ множество тех функций φ из $\Phi(\mathbb{R}^m)$, для которых $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$.

Лемма 6. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, являющаяся мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть мера μ_t построена с помощью уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть ν — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, не нагружающая точку ноль. Пусть последовательность $t_n \to \infty$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_{t_n},\varphi) = (\nu,\varphi)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{t_n} = \nu$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что доказательство достаточно проводить для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$, $1 = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ — такое непрерывное разбиение единицы, что $\operatorname{supp}\psi_1 \cap B(0,\varepsilon) = \varnothing$, $\operatorname{supp}\psi_2 \subset B(0,2\varepsilon)$. Имеем

$$|(\mu_{t_n} - \nu,\varphi)| \le |(\mu_{t_n} - \nu,\varphi\psi_1)| + |(\mu_{t_n} - \nu,\varphi\psi_2)| = J_1(n) + J_2(n).$$

Поскольку функция $\varphi\psi_1 \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n) = 0$.

Для величины $J_2(n)$ с использованием леммы 4 получаем оценку

$$J_2(n) \le \|\varphi\|\left(|\mu_{t_n}|(B(0,2\varepsilon)) + |\nu|(B(0,2\varepsilon))\right) \le \|\varphi\|\left(C\gamma(2\varepsilon)(2\varepsilon)^{\rho} + |\nu|(B(0,2\varepsilon))\right).$$

Так как мера ν не нагружает точку 0, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|\nu|(B(0,2\varepsilon)) = 0$

Из приведенных рассуждений легко следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_{t_n},\varphi) = (\nu,\varphi)$. Следовательно, $\mu_{t_n} \to \nu$. $\square$

Иногда бывает полезен следующий аналог доказанной леммы.

Лемма 7. *Пусть последовательность μ_n радоновых мер в пространстве $\mathbb{R}^m$ такова, что величина $|\mu_n|(B(0,\varepsilon))$ равномерно относительно n стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Пусть для любой функции φ из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n, \varphi) = (\mu, \varphi)$, где $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ и $\mu(\{0\}) = 0$. Тогда $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$.*

Нетрудно изменить доказательство предыдущей леммы 6, чтобы получить доказательство леммы 7.

Лемма 8. *Пусть радонова мера μ в пространстве $\mathbb{R}^m$ имеет тип σ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть мера μ_t строится с помощью уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $\nu \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Тогда для любого $r > 0$ выполняется неравенство*

$$|\nu|(B(0,r)) \le \sigma r^\rho.$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что лемму достаточно доказывать при дополнительном предположении, что мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Имеем $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n}$, где $t_n \to \infty$. Из леммы 4 и предложения 2 следует, что дополнительно можно считать, что $|\mu|_{t_n} \to \lambda$. Теперь из предложения 7 следует, что если $\lambda(S(0,r)) = 0$, то

$$\lambda(B(0,r)) = \lim_{n\to\infty} |\mu|_{t_n}(B(0,r)).$$

Поэтому для всех r, за возможным исключением счётного множества, ввиду предложение 1, выполняется неравенство

$$|\nu|(B(0,r)) \le \lambda(B(0,r)) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mu|(B(0,t_n r))}{V(t_n)} \le \sigma r^\rho.$$

Из этого следует утверждение леммы. □

Лемма 9. *Пусть $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ — уточнённые порядки такие, что $\rho_1(\infty) = \rho_2(\infty)$. Пусть радонова мера μ в $\mathbb{R}^m$ является мерой не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho_1(r)$, а мера λ определяется формулой*

$$d\lambda(x) = \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d\mu(x).$$

Тогда при $t_n \to \infty$ соотношение $\mu_{t_n} \to \nu$ эквивалентно соотношению $\lambda_{t_n} \to \nu$. При этом имеется в виду, что

$$\mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V_1(t)}, \quad \lambda_t(E) = \frac{\lambda(tE)}{V_2(t)}.$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что доказательство достаточно проводить для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Пусть $\mu_{t_n} \to \nu$. Из леммы 8 следует, что мера ν не нагружает точку ноль. Пусть $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $0 < a < b < \infty$ такие числа, что $\operatorname{supp} \varphi \subset R([a,b])$. Имеем

$$\int \varphi(x) d\lambda_{t_n}(x) = \frac{1}{V_2(t_n)} \int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\lambda(x) =$$

$$= \frac{1}{V_2(t_n)} \int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) \frac{V_2(\|x\|)}{V_1(\|x\|)} d\mu(x) = \frac{V_1(t_n)}{V_2(t_n)} \int \varphi(x) \frac{V_2(t_n\|x\|)}{V_1(t_n\|x\|)} d\mu_{t_n}(x) =$$

$$= \int \varphi(x) d\mu_{t_n}(x) + \int_{R[a,b]} \varphi(x) \left(\frac{V_2(t_n\|x\|)V_1(t_n)}{V_1(t_n\|x\|)V_2(t_n)} - 1\right) d\mu_{t_n}(x) := J_1(n) + J_2(n).$$

Так как $\mu_{t_n} \to \nu$, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_1(n) = (\nu, \varphi)$. Для $J_2(n)$ справедлива оценка

$$|J_2(n)| \leq \|\varphi\| \max_{x \in R([a,b])} \left| \frac{V_2(t_n\|x\|)V_1(t_n)}{V_1(t_n\|x\|)V_2(t_n)} - 1 \right| |\mu_{t_n}|(B(0,b)).$$

Теперь из оценки $|\mu_{t_n}|(B(0,b)) \leq M\gamma(b)b^\rho$, полученной из леммы 4, и предложения 1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_2(n) = 0$.

Мы доказали, что для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_{t_n}, \varphi) = (\nu, \varphi).$$

Из леммы 6 следует, что $\lambda_{t_n} \to \nu$. В приведенном рассуждении меры μ и λ можно поменять местами. □

Обычно ([8], глава 5) динамическая система в метрическом пространстве X определяется так. Это однопараметрическая система отображений $\Phi_t,\ t \in (-\infty, \infty),\ \Phi_t : X \to X$, обладающая свойствами:
1) если $t \to t_0,\ x \to x_0$, то $\Phi_t x \to \Phi_{t_0} x_0$ (условие непрерывности по совокупности переменных);
2) $\Phi_0 x = x$ для любого $x \in X$ (начальное условие);
3) $\Phi_{t_1+t_2} x = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1} x)$ (групповое условие).

Нам будем удобно пользоваться другим определением динамической системы, в котором аддитивная группа вещественных чисел t заменяется на мультипликативную группу строго положительных вещественных чисел.

Ясно, что любое утверждение о динамической системе в смысле первого определения стандартным образом переводится в аналогичное утверждение для динамической системы в смысле, второго определения и наоборот.

В дальнейшем нам будет нужен следующий факт из теории динамических систем

Лемма 10. *Пусть* $\Phi_t,\ t \in (0, \infty)$ — *динамическая система на метрическом компакте* (X, ρ). *Пусть* $[a, b]$ — *произвольный сегмент на полуоси* $(0, \infty)$ *и пусть*

$$g(\delta) = \sup\{\rho(\Phi_t x, \Phi_t y) :\ x, y \in X,\ \rho(x, y) \leq \delta,\ t \in [a, b]\}.$$

Тогда $\lim\limits_{\delta\to 0} g(\delta) = 0$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности x_n и y_n из пространства X, последовательность $t_n \in [a, b]$ такие, что $\rho(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$,

$$\rho(\Phi_{t_n} x_n, \Phi_{t_n} y_n) \geq \varepsilon_0. \tag{3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \xi \in X,\ \lim_{n\to\infty} t_n = \tau \in [a, b].$$

Имеет место неравенство

$$\rho(\Phi_{t_n} x_n, \Phi_{t_n} y_n) \leq \rho(\Phi_{t_n} x_n, \Phi_{t_n} \xi) + \rho(\Phi_{t_n} \xi, \Phi_{t_n} y_n).$$

Так как функция $\Phi_t x$ непрерывна по совокупности переменных t и x, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\Phi_{t_n} x_n, \Phi_{t_n} \xi) = \lim_{n\to\infty} \rho(\Phi_{t_n} y_n, \Phi_{t_n} \xi) = 0.$$

Это противоречит неравенству (3). □

Определим понятие компакта в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ следующим образом: подмножество M множества $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ назовём компактом, если M компактное множество и для любой сходящейся последовательность μ_n мер из M её предел принадлежит M.

Теперь мы можем доказать теорему 1 из первой части нашей работы [1].

Доказательство теоремы 1 ([1]). Из леммы 3 следует, что теорему достаточно доказывать для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Из леммы 9 следует, что теорему достаточно доказывать для случая, когда $\rho(r) \equiv \rho$. В этом случае из леммы 1 следует, что система отображений $A_t = F_t,\ t > 0$ является динамической системой (в смысле второго определения) в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$.

Из леммы 5 следует, что положительная полутраектория меры μ является компактным множеством в пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. Множество $\mathrm{Fr}[\mu]$ совпадает с ω-предельным множеством траектории $F_t\mu$. Теперь из теорем 10 и 13 из [8, глава 5] следует что:

1) $\mathrm{Fr}[\mu]$ есть непустой и связный компакт в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$;

2) $F_t(\mathrm{Fr}[\mu]) \subset \mathrm{Fr}[\mu]$.

Так как отображение F_t имеет обратное отображение равное $F_{\frac{1}{t}}$, то из 2) следует, что F_t есть взаимнооднозначное отображение множества $\mathrm{Fr}[\mu]$ на себя.

Утверждения 1)–3) теоремы доказаны. Утверждение 4) следует из леммы 8. □

Радонова мера μ в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется периодической мерой порядка ρ с периодом $T > 1$, если для любого компактного борелевского множества E выполняется равенство $\mu(TE) = T^\rho \mu(E)$.

Построим пример положительной радоновой меры μ порядка ρ с периодом $T > 1$.

Пример. Рассмотрим шаровой слой (кольцо) $R([1,T))$. Пусть μ_1 — некоторая положительная борелевская мера на $R([1,T))$. Определим теперь на борелевской σ-алгебре в пространстве $\mathbb{R}^m$ функцию множеств μ следующим образом. Если $E \subset R([1,T))$, то положим $\mu(E) = \mu_1(E)$. Если $E \subset R([T^n, T^{n+1})),\ n \in \mathbb{Z}$, то положим $\mu(E) = T^{n\rho}\mu_1(T^{-n}E)$.

Пусть теперь E — произвольное борелевское множество в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $E_n = E \cap R([T^n, T^{n+1}))$. Выполняется равенство $E \setminus \{0\} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E_n$.

Положим $\mu(E) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mu(E_n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} T^{n\rho}\mu_1(T^{-n}E_n)$. Имеем $\mu(TE) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mu(TE_n)$.

Поскольку $TE_n \subset R([T^{n+1}, T^{n+2}))$, то $\mu(TE_n) = T^{(n+1)\rho}\mu_1\left(T^{-(n+1)}TE\right) = T^{(n+1)\rho}\mu_1$ $(T^{-n}E)$. Отсюда следует, что $\mu(TE) = T^\rho\mu(E)$. Легко проверяется, что μ — положительная борелевская мера в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Нужный пример построен.

Если μ_1 и μ_2 — две такие меры, то мера $\mu = \mu_1 - \mu_2$ будет радоновой мерой порядка ρ с периодом T. Легко видеть, что любая радонова мера μ порядка ρ с периодом $T > 1$ получается из ограничения μ_1 меры μ на $R([1,T))$ с помощью изложенной процедуры.

Предложение 10. *Если μ — периодическая радонова мера порядка $\rho > 0$ с периодом T, то*

$$\mathrm{Fr}[\mu, \rho] = \{\mu_t :\ t \in [1,T)\}.$$

Доказательство. Пусть $\tau \in [1,T),\ t_n = \tau T^n$. Пусть E — компактное борелевское множество. Имеем

$$\mu_{t_n}(E) = \frac{\mu(\tau T^n E)}{\tau^\rho T^{n\rho}} = \frac{T^{n\rho}\mu(\tau E)}{\tau^\rho T^{n\rho}} = \mu_\tau(E).$$

Отсюда следует, что $\mu_{t_n} = \mu_\tau$. Поэтому $\mu_\tau \in \mathrm{Fr}[\mu]$.

Обратно, пусть $\nu \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\mu_{t_n} \to \nu$. Всякое число $t_n > 0$ однозначно представляется в виде $t_n = \tau_n T^{k(n)}$, где $\tau_n \in [1, T)$, $k(n)$ — целое число. Переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что $\tau_n \to \tau \in [1, T]$. Имеем $\mu_{t_n} = \mu_{\tau_n}$. По лемме 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\tau_n} = \mu_\tau$. Таким образом $\nu = \mu_\tau$. Учитывая равенство $\mu_1 = \mu_T$, можно считать, что $\tau \in [1, T)$. □

Замечание. Пусть $\tau > 0$, n — целое. Можно считать, что $\mathrm{Fr}[\mu] = \{\mu_t : t \in [\tau T^n, \tau T^{n+1})\}$.

С точки зрения предельных множеств наиболее простыми являются такие радоновы меры μ, для которых множества $\mathrm{Fr}[\mu]$ состоят из одного элемента. Такие меры называются *регулярными (в смысле Азарина) мерами*. Далее мы изучим регулярные меры.

Пусть $r > 0$, $E \subset S(0,1)$. Обозначим
$$K(r, E) = [0, r] \times E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \ \|x\| \le r, \ \tfrac{x}{\|x\|} \in E \right\}.$$
Множество $K(r, E)$ мы будем называть *пространственным сектором* радиуса r с основанием E.

Пусть $\triangle$ — конечная борелевская мера на сфере (окружности) $S(0,1)$. Борелевское множество $E \subset S(0,1)$ мы будем называть *измеримым по Жордану* относительно меры $\triangle$, если $|\triangle|(\partial E) = 0$, где ∂E — граница множества E в относительной топологии (порождённой эвклидовой топологией пространства $\mathbb{R}^m$) на сфере $S(0,1)$.

Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$. Говорят, что мера μ имеет конусную (угловую) плотность $\triangle$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, если для любого борелевского множества $E \subset S(0,1)$ измеримого по Жордану относительно меры $\triangle$ выполняется равенство
$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mu(K(r,E))}{V(r)} = \triangle(E).$$
Докажем теорему 2 из первой части работы [1].

Доказательство теоремы 2 ([1]). Из леммы 3 следует, что теорему достаточно доказать для случая, когда мера μ не нагружает шар (круг) $B(0,1)$. Пусть $\lambda \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\mu_{t_n} \to \lambda$. Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $0 < a < b < \infty$ такие числа, что $\mathrm{supp}\, \varphi \subset R((a,b])$. Имеем
$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \int_{R((a,b])} \varphi(x) d\mu_{t_n}(x).$$

Пусть $\delta > 0$. Множество $R((a,b])$ допускает разбиение $\prod$ вида $R((a,b]) = \bigsqcup_{k=1}^N H_k$, где H_k — дизъюнктная система множеств вида $H_k = (\alpha_k, \beta_k] \times E_k$, причём множества E_k измеримы по Жордану относительно меры $\triangle$ и диаметр $d(H_k)$ множества H_k не превышает δ. Пусть x_k — некоторая точка из H_k. Тогда
$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \sum_{k=1}^N \varphi(x_k) \mu_{t_n}(H_k) + \sum_{k=1}^N \int_{H_k} (\varphi(x) - \varphi(x_k))\, d\mu_{t_n}(x) = J_1 + J_2.$$

Исследуем первое слагаемое
$$J_1 = \sum_{k=1}^N \varphi(x_k) \frac{\mu((t_n\alpha_k, t_n\beta_k] \times E_k)}{V(t_n)} = \sum_{k=1}^N \varphi(x_k) \frac{\mu(K(t_n\beta_k, E_k)) - \mu(K(t_n\alpha_k, E_k))}{V(t_n)}.$$
Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu(K(t_n\beta_k, E_k))}{V(t_n)} = \beta_k^\rho \triangle(E_k)$, то $J_1 = \sum\limits_{k=1}^N \varphi(x_k) \left((\beta_k^\rho - \alpha_k^\rho) \triangle(E_k) + \varepsilon_k(n) \right)$,

где $\varepsilon_k(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим $h_n(\prod) := \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k)\varepsilon_k(n)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует число $n_0 = n_0(\varepsilon, \prod)$ такое что при $n > n_0$ будет выполняться неравенство $h_n(\prod) < \varepsilon$.

Рассмотрим ещё один интеграл

$$\int \varphi(x) d\nu(x) = \int_{R((a,b])} \varphi(x) d\nu(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_{H_k} \varphi(x) d\nu(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k)(\beta_k^\rho - \alpha_k^\rho) \bigtriangleup (E_k) + \sum_{k=1}^{N} \int_{H_k} (\varphi(x) - \varphi(x_k)) d\nu(x).$$

Обозначим последнюю сумму через J_3. Справедлива оценка

$$|J_3| \le \omega_\varphi(\delta) \sum_{k=1}^{N} |\nu|(H_k) = \omega_\varphi(\delta)|\nu|(R((a,b])),$$

где $\omega_\varphi(\delta)$ — модуль непрерывности функции φ. Мы получаем

$$J_1 = \int \varphi(x) d\nu(x) - J_3 + h_n\left(\prod\right).$$

Далее оцениваем J_2

$$|J_2| < \omega_\varphi(\delta) \sum_{k=1}^{N} |\mu|_{t_n}(H_k) = \omega_\varphi(\delta)|\mu|_{t_n}(R((a,b])) \le \omega_\varphi(\delta)|\mu|_{t_n}(B(0,b)) \le C\omega_\varphi(\delta)\gamma(b)b^\rho.$$

Последняя оценка следует из леммы 4. Таким образом, справедлива оценка

$$|(\mu_{t_n}, \varphi) - \int \varphi(x) d\nu(x)| \le |J_2| + |J_3| + \left|h_n\left(\prod\right)\right|.$$

Из полученных оценок легко следует, что $(\lambda, \varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mu_{t_n}, \varphi) = (\nu, \varphi)$.

Таким образом для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $(\lambda, \varphi) = (\nu, \varphi)$. Поскольку меры λ и ν не нагружают точку 0, то отсюда следует, что $\lambda = \nu$. □

Докажем теорему 3 из первой части работы [1].

Доказательство теоремы 3 ([1]). Из теоремы 1 следует, что $F_t(\mathrm{Fr}[\mu]) = \mathrm{Fr}[\mu]$. Поэтому выполняется равенство $F_t\nu = \nu$. Следовательно, $\nu(K(t,E)) = t^\rho \nu(K(1,E))$. Определим борелевскую меру $\bigtriangleup$ на сфере $S(0,1)$ формулой $\bigtriangleup(E) = \nu(K(1,E))$. Обозначим $\lambda = dt^\rho \times \bigtriangleup$. Меры λ и μ совпадают на множествах $K(t,E)$, $t \in (0,\infty)$, E — борелевское множество на сфере $S(0,1)$. Поэтому выполняется равенство $\nu = \lambda$. □

Лемма 11. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$, являющаяся мерой не выше чем нормальный тип относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)] = \{\nu\}$. Тогда для любой последовательности $t_n \to \infty$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n} = \nu$.*

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Это означает, что найдётся функция $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^m)$, для которой выполняется соотношение $\lim_{n\to\infty}(\mu_{t_n}, \varphi) \neq (\nu, \varphi)$. Это означает, что последовательность (μ_{t_n}, φ) является либо расходящейся либо сходящейся, но с пределом отличным от (ν, φ). Из этого, в свою очередь, следует, что у последовательности t_n есть подпоследовательность $t_n^{(1)}$ такая, что последовательность $(\mu_{t_n^{(1)}}, \varphi)$ будет сходящейся с пределом отличным от (ν, φ). Поскольку из леммы 5 положительная полутраектория меры μ есть компактное множество в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, то у последовательности $t_n^{(1)}$ есть подпоследовательность $t_n^{(2)}$ такая, что последовательность $\mu_{t_n^{(2)}}$ будет сходящейся. Пусть $\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n^{(2)}}$. Мера $\lambda \in \mathrm{Fr}[\mu]$. В силу условия леммы $\lambda = \nu$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}(\mu_{t_n^{(2)}}, \varphi) = (\nu, \varphi)$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Предложение 11. *Пусть μ — положительная борелевсккая мера в пространстве $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$. Пусть выполняется равенство $\mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)] = \{\nu\}$. Тогда мера μ имеет конусную (угловую) плотность.*

Доказательство. По теореме 3 (из первой части работы) мера ν имеет вид $\nu = dt^\rho \times \triangle$, где $\triangle$ — положительная борелевская мера на сфере (окружности) $S(0, 1)$. Пусть борелевское множество $E \subset S(0, 1)$ измеримо по Жордану относительно меры $\triangle$. Имеем $\partial K(1, E) = K(1, \partial E) \cup E$. Поэтому множество $K(1, E)$ измеримо по Жордану относительно меры ν.

Пусть $t_n \to \infty$ — произвольная последовательность. По лемме 11 $\mu_{t_n} \to \nu$. Из теоремы 0.5 ([6]) или из теоремы 3.4 ([7]) следует, что

$$\triangle(E) = \nu(K(1, E)) = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(K(1, E)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(K(t_n, E))}{V(t_n)}.$$

Тем самым доказано, что мера μ имеет конусную (угловую) плотность $\triangle$. □

Заметим, что предложение 11 для знакопеременных мер не верно. Это следует из примера, приведенного в первой части работы.

3. Расстояние Хаусдорфа. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, M_1, M_2 — подмножества X. Введём следующие величины

$$\delta_1 = \sup\{\rho(x, M_2)\colon x \in M_1\},\ \delta_2 = \sup\{\rho(x, M_1)\colon x \in M_2\},\ H(M_1, M_2) = \max\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Величина $H(M_1, M_2)$ называется *расстоянием Хаусдорфа* между множествами M_1 и M_2.

На множестве компактов в X, расстояние Хаусдорфа является метрикой.

Пусть $(M)_\varepsilon = \{x \in X:\ \rho(x, M) < \varepsilon\}$ — открытая ε-окрестность множества M.

Выполняются соотношения $\delta_1 = \inf\{\varepsilon > 0\colon M_1 \subset (M_2)_\varepsilon\}$, $\delta_2 = \inf\{\varepsilon > 0\colon M_2 \subset (M_1)_\varepsilon\}$.

Нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 12. *Пусть (X, ρ) — метрический компакт. Для того, чтобы последовательность компактов $M_k \subset X$ сходилась в метрике Хаусдорфа к компакту $M \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) если x_k такая последовательность точек, что $x_k \in M_{n_k}$, $n_k \to \infty$ и такая, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, то $x \in M$;

2) если $x \in M$, то существует последовательность точек $x_n \in M_n$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $M = \lim_{n\to\infty} M_n$ и пусть $x_k \in M_{n_k},\ n_k \to \infty,\ x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Имеем $\rho(x_k, M) \le \sup_{x\in M_{n_k}} \rho(x, M) \le H(M_{n_k}, M)$. Поэтому во множестве M найдётся точка y_k такая, что $\rho(x_k, y_k) \le 2H(M_{n_k}, M)$. Поскольку M — компакт, то переходя, если нужно, к подпоследовательности можно считать, что выполняется неравенство $y = \lim_{k\to\infty} y_k$, где $y \in M$. Выполняется неравенство $\rho(x, y) \le \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, y) \le \rho(x, x_k) + \rho(y_k, y) + 2H(M_{n_k}, M)$. Отсюда следует, что $\rho(x, y) = 0,\ x = y \in M$. Условие 1) предложения доказано.

Пусть теперь $x \in M$. Имеем

$$\rho(x, M_n) \le \sup_{y\in M} \rho(y, M_n) \le H(M, M_n).$$

Поэтому в множестве M_n найдётся точка такая x_n, что $\rho(x, x_n) \le H(M, M_n)$. Таким образом $x_n \in M_n,\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Доказательство части предложения в сторону необходимости завершено.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1) и 2) предложения. Покажем, что выполняется соотношение

$$\delta_{1,n} = \sup_{x\in M_n} \rho(x, M) \to 0\ (n \to \infty). \tag{4}$$

Если это не так, то найдутся число $\delta > 0$ и последовательность $n_k \to \infty$ такие, что $\delta_{1,n} > \delta$. Поэтому найдётся точка $x_{n_k} \in M_{n_k}$ такая, что $\rho(x_{n_k}, M) \ge \frac{\delta}{2}$. Поскольку X — компакт, то переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняется равенство $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. По условию 1) теоремы $x \in M$. Это противоречит неравенству $\rho(x_{n_k}, M) \ge \frac{\delta}{2}$. Тем самым соотношение (4) доказано.

Докажем ещё, что выполняется соотношение

$$\delta_{2,n} = \sup_{x\in M} \rho(x, M_n) \to 0. \tag{5}$$

Если это не так, то существуют число $\delta_0 > 0$ и последовательность $n_k \to \infty$ такие, что для любого выполняется неравенство $\delta_{2,n_k} \ge 4\delta_0$. Из этого следует, что существует точка $x_{n_k} \in M$ такая, что выполняется неравенство $\rho(x_{n_k}, M_{n_k}) \ge 2\delta_0$.

Поскольку множество M есть компакт, то переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняется равенство $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in M$. Далее имеем $\rho(x, M_{n_k}) \ge \rho(x_{n_k}, M_{n_k}) - \rho(x_{n_k}, x) \ge \delta_0$ для всех $k \ge k_1$, где k_1 — некоторые число, зависящее от δ_0. Полученное неравенство противоречит условию 2) теоремы. Тем самым соотношение (5) доказано. Из соотношений (4), (5) следует, что $H(M_n, M) \to 0$. □

4. Периодические предельные множества для радоновых мер. Мы начнём с вспомогательных утверждений.

Лемма 12. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка ρ и пусть $\mathrm{Fr}[\mu] = \mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)]$ — её предельное множество. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} d(\mu_t, \mathrm{Fr}[\mu]) = 0$$

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Тогда существуют число δ и последовательность $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ такие, что выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty} d(\mu_{t_n}, \mathrm{Fr}[\mu]) \ge \delta. \tag{6}$$

Из леммы 5 следует, что существует подпоследовательность $t_n^{(1)}$ последовательности t_n такая, что $\mu_{t_n^{(1)}} \to \nu$. Мера ν принадлежит множеству $\mathrm{Fr}[\mu]$. Это противоречит неравенству (6). $\square$

Обозначим $\mathcal{L}(\tau_1, \tau_2) = \{\mu_t :\ \tau_1 \le t \le \tau_2\}$ — дугу траектории меры μ.

Лемма 13. *Пусть μ — радонова мера в $\mathbb{R}^m$ не выше чем нормального типа относительно уточнённого порядка $\rho(r)$ и пусть $\mathrm{Fr}[\mu] = \mathrm{Fr}[\mu, \rho(r)]$ — её предельное множество. Тогда для любых $\tau_1 > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует число $\tau_2 > \tau_1$ такое, что выполняется соотношение*

$$\mathrm{Fr}[\mu] \subset \left(\mathcal{L}(\tau_1, \tau_2)\right)_\varepsilon .$$

Доказательство. Из теоремы 1 (из первой части работы) следует, что множество $\mathrm{Fr}[\mu]$ есть компакт в пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. Пусть $\{\nu_k,\ k \in \{1, \dots, N\}\}$ есть $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть для множества $\mathrm{Fr}[\mu]$. Существует последовательность $t_n^{(k)} \to \infty$ такая, что $\mu_{t_n^{(k)}} \to \nu_k$ $(n \to \infty)$. Пусть $t_{n_k}^{(k)}$ такое число, что выполняется соотношения: $t_{n_k}^{(k)} > \tau_1,\ d(\mu_{t_{n_k}^{(k)}}, \nu_k) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда можно взять $\tau_2 = \max\{t_k^{(k)} :\ k \in \{1, \dots, N\}\}$. $\square$

Обозначим через $\mathcal{M}(\rho, \sigma)$ множество тех радоновых мер μ из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, для которых выполняется неравенство: $|\mu|(B(0,r)) \le \sigma r^\rho,\ r \in (0, \infty)$.

Докажем теорему 4 из первой части.

Доказательство теоремы 4 ([1]). Из леммы 9 следует, что дополнительно можно предположить, что $\rho(r) \equiv \rho$. Тогда имеем

$$\sigma = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{|\mu|(B(0,r))}{r^\rho}.$$

Поэтому существует число $r_0 > 0$ такое, что при $r \ge r_0$ будет выполняться неравенство $|\mu|(B(0,r)) \le (\sigma + 1) r^\rho$.

Пусть μ_1 — ограничение μ на множество $CB(0, r_0)$. Тогда для всех $r > 0$ будет выполняться неравенство $|\mu_1|(B(0,r)) \le (\sigma+1) r^\rho$. Из леммы 3 следует, что $\mathrm{Fr}[\mu] = \mathrm{Fr}[\mu_1]$.

Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем будет считать, что выполняются условия:

1) $\rho(r) \equiv \rho$,

2) для любого $r > 0$ выполняется неравенство $|\mu|(B(0,r)) \le (\sigma + 1) r^\rho$.

Пусть ν — некоторая мера из множества $\mathrm{Fr}[\mu]$. Существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что выполняются условия $\mu_{t_k} \to \nu,\ |\mu|_{t_k} \to \hat{\nu}$, где $\hat{\nu}$ — некоторая положительная борелевская мера в $\mathbb{R}^m$. Дополнительно можно считать, что выполняется равенство $\hat{\nu}(S(0,1)) = 0$. Если это не так, то меру ν следует заменить на меру ν_τ с подходящим τ.

Построим теперь три последовательность $r_n,\ a_n,\ b_n$ следующим образом. В качестве r_1 возьмём некоторое $t_k > 2$. Далее положим $a_1 = 2r_1$. В качестве b_1 возьмём такое число $b_1 > a_1$, что будет выполняется соотношение $\mathrm{Fr}[\mu] \subset \left(\mathcal{L}(a_1, b_1)\right)_1$. Из леммы 13 следует, что такие числа существуют. В качестве r_2 возьмём такое t_k, чтобы выполнялось неравенство $r_2 \ge 3b_1$.

Пусть мы уже определим r_n. Тогда выбираем $a_n = (n+1) r_n$. В качестве b_n выбираем такое число, чтобы выполнялись условия: $b_n > a_n,\ \mathrm{Fr}[\mu] \subset \left(\mathcal{L}(a_n, b_n)\right)_{\frac{1}{n}}$. Далее определяем r_{n+1} как одно из чисел t_k так, чтобы выполнялось неравенство $r_{n+1} \ge (n+2) b_n$.

Тем самым последовательности $r_n,\ a_n,\ b_n$ определены. Заметим, что r_n есть подпоследовательность последовательности t_k.

Теперь определим меру μ_n. Это периодическая мера порядка ρ, которая на множестве $R([r_n, r_{n+1}))$ совпадает с мерой μ и имеет период $T_n = \frac{r_{n+1}}{r_n} > 6$.

Пусть $r > 0$ и в остальном произвольно. Пусть k_0 — наибольшее из целых чисел, для которых выполняется неравенство $T_n^{k_0} r_{n+1} < r$. Имеем

$$|\mu_n|(C(0,r)) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} |\mu_n|(R([T_n^k r_n, T_n^{k+1} r_n))) + |\mu_n|(R([T_n^{k_0+1} r_n, r))) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{k_0} T_n^{k\rho} |\mu|(R([r_n, r_{n+1})) + T_n^{(k_0+1)\rho} |\mu|\Big(R\Big(\big[r_n, \frac{r}{T_n^{k_0+1}}\big)\Big)\Big).$$

Справедливы неравенства

$$|\mu|([r_n, r_{n+1})) \le (\sigma+1) r_{n+1}^\rho,\ \ |\mu|\Big(R\Big(\big[r_n, \frac{r}{T_n^{k_0+1}}\big)\Big)\Big) \le (\sigma+1)\frac{r^\rho}{T_n^{(k_0+1)\rho}}.$$

Из этого следует, что

$$|\mu_n|(C(0,r)) \le (\sigma+1) r_{n+1}^\rho \sum_{k=-\infty}^{k_0} T_n^{k\rho} + (\sigma+1) r^\rho = (\sigma+1) r_{n+1}^\rho \frac{T_n^{k_0\rho}}{1-\frac{1}{T_n^\rho}} +$$
$$+(\sigma+1) r^\rho \le \frac{\sigma+1}{1-\left(\frac{1}{6}\right)^\rho} r_{n+1}^\rho \left(\frac{r}{r_{n+1}}\right)^\rho + (\sigma+1) r^\rho = (\sigma+1) r^\rho \frac{2\cdot 6^\rho}{6^\rho - 1}.$$

Обозначим $\sigma_1 = (\sigma+1)\frac{2\cdot 6^\rho}{6^\rho-1}$.

Мы доказали, что любая мера μ_n принадлежит классу $\mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$. Осталось доказать равенство

$$\operatorname{Fr}[\mu] = H \lim_{n\to\infty} \operatorname{Fr}[\mu_n]. \tag{7}$$

Имеем для любого $r > 0$

$$|\mu_n|_t(B(0,r)) = \frac{|\mu_n|(B(0,tr))}{t^\rho} \le \frac{\sigma_1 t^\rho r^\rho}{t^\rho} = \sigma_1 r^\rho,$$
$$|\mu|_t(B(0,r)) = \frac{|\mu|(B(0,tr))}{t^\rho} \le \frac{(\sigma+1) t^\rho r^\rho}{t^\rho} = (\sigma+1) r^\rho.$$

Поэтому множества $D_1 = \{(\mu_n)_t:\ n \in \{1,2,\ldots\},\ t \in (0,\infty)\},\ D_2 = \{\mu_t:\ t \in (0,\infty)\}$ являются сильно ограниченным, а значит по предложению 2 и компактными множествами в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Так как из широкой сходимости следует сходимость в пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$, то множество $X = \overline{D_1 \cup D_2}$ является компактом в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. Следовательно, пространство (X, d) есть метрический компакт.

Система отображений $F_t,\ t \in (0,\infty)$ есть динамическая система в пространстве (X, d).

Как следует из предложения 12 для доказательства равенства (7) достаточно доказать, что выполняются условия 1), 2) этого предложения.

Пусть $\lambda_n \in \mathrm{Fr}[\mu_{k(n)}]$, где $k(n) \to \infty$ и пусть $\lambda_n \to \alpha$. Поскольку $\lambda_n \in \mathrm{Fr}[\mu_{k(n)}]$, то из замечания к предложению 10 следует, что $\lambda_n = \left(\mu_{k(n)}\right)_{\tau_{k(n)}}$, где $\tau_{k(n)} \in [r_{k(n)}, r_{k(n)+1})$. Не ограничивая общности, можно считать, что выполняется одно из трёх условий:

А) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}} = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)+1}} = 0;$

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}} = q_1 \in (1,\infty);$

В) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)+1}} = q_2 \in (0,1].$

Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset R([a,b])$. Дополнительно можно считать, что $a \in (0,1),\ b \in (1,\infty)$.

Предположим, что выполняется условие А). Имеем

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\tau^{\rho}_{k(n)}} \int_{R([a\tau_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{\tau_{k(n)}}(x). \tag{8}$$

Из условия А) следует, что для всех достаточно больших n выполняется соотношение.

$$R([a\tau_{k(n)}, b\tau_{k(n)}]) \subset R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1})).$$

На множестве $R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1}))$ меры $\mu_{k(n)}$ и μ совпадают. Поэтому существует число n_0 такое, что при $n \geq n_0$ выполняется равенство

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\tau^{\rho}_{k(n)}} \int_{R([a\tau_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu(x) = (\mu_{\tau_{k(n)}}, \varphi). \tag{9}$$

Из леммы 5 следует, что у последовательности $\tau_{k(n)},\ n \geq n_0$ есть подпоследовательность $\tau_{k(n(j))}$ такая, что $\mu_{\tau_{k(n(j))}} \to \beta$ $(j \to \infty)$, где β некоторая мера из $\mathrm{Fr}[\mu]$. Беря в равенстве (9) $n = n(j)$ и переходя к пределу при $j \to \infty$, получим равенство $(\alpha, \varphi) = (\beta, \varphi)$. Таким образом для любого $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $(\alpha, \varphi) = (\beta, \varphi)$. Так как меры α и β не нагружают нуля, то отсюда следует, что $\alpha = \beta$.

Мы доказали, что если выполняется условие А), то мера $\alpha \in \mathrm{Fr}[\mu]$.

Предположим теперь, что выполняется условие Б). В этом случае можно считать, что выполняется неравенство $a\tau_{k(n)} < r_{k(n)}$. Тогда равенство (8) можно переписать в виде

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\tau^{\rho}_{k(n)}} \int\limits_{R([a\tau_{k(n)}, r_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x) + \frac{1}{\tau^{\rho}_{k(n)}} \int\limits_{R([r_{k(n)}, b\tau_{k(n)}])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x). \tag{10}$$

Так как мера $\mu_{k(n)}$ имеет период $T_{k(n)}$, то выполняется равенство

$$\frac{1}{\tau^{\rho}_{k(n)}} \int_{R([a\tau_{k(n)}, r_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x) = \frac{1}{\tau^{\rho}_{k(n)}} \int_{R([a\tau_{k(n)}, r_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\left(\mu_{k(n)}\right)_{T_{k(n)}}(x) =$$
$$= \frac{1}{\left(\tau_{k(n)} T_{k(n)}\right)^{\rho}} \int_{R([a\tau_{k(n)} T_{k(n)}, r_{k(n)+1}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)} T_{k(n)}}\right) d\mu_{k(n)}(x).$$

Существует число n_1 такое, что при $n \geq n_1$ выполняются соотношения

$$R([a\tau_{k(n)} T_{k(n)}, r_{k(n)+1})) \subset R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1})),$$
$$R([r_{k(n)}, b\tau_{k(n)})) \subset R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1})).$$

Так как на множестве $R([r_{k(n)}, r_{k(n)+1}))$ меры $\mu_{k(n)}$ и μ совпадают, то равенство (10) можно записать при $n \geq n_1$ в виде

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{\left(\tau_{k(n)} T_{k(n)}\right)^\rho} \int_{R([a\tau_{k(n)} T_{k(n)}, r_{k(n)+1}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)} T_{k(n)}}\right) d\mu(x) +$$
$$+ \frac{1}{\tau_{k(n)}^\rho} \int_{R([r_{k(n)}, b\tau_{k(n)}))} \varphi\left(\frac{x}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu(x) = \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \int_{R\left(\left[a\frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}}, 1\right)\right)} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x) +$$
$$+ \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \int_{R\left(\left[1, b\frac{\tau_{k(n)}}{r_{k(n)}}\right)\right)} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x). \tag{11}$$

Учитывая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset R([a, b])$ равенство (11) при $n \geq n_1$ можно переписать в виде

$$(\lambda_n, \varphi) = \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \int\limits_{C(0,1)} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x) + \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \int\limits_{R([1,b_1))} \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x), \tag{12}$$

где b_1 — некоторое достаточно большое число. Далее преобразовываем формулу (12). Имеем

$$(\lambda_n, \varphi) = \frac{1}{q_1^\rho} \int_{C(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x) + \frac{1}{q_1^\rho} \int_{R([1,b_1))} \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x) + h_{1,n} + h_{2,n}, \tag{13}$$
$$h_{1,n} = \int_{C(0,1)} \left(\left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) - \frac{1}{q_1^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_1}\right)\right) d\mu_{r_{k(n)+1}}(x),$$
$$h_{2,n} = \int_{R([1,b_1))} \left(\left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) - \frac{1}{q_1^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_1}\right)\right) d\mu_{r_{k(n)}}(x).$$

Далее, справедлива оценка

$$|h_{2,n}| \leq \sup_{x \in R([1,b_1))} \left| \left(\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right)^\rho \varphi\left(x\frac{r_{k(n)}}{\tau_{k(n)}}\right) - \frac{1}{q_1^\rho}\varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) \right| (\sigma + 1) b_1^\rho.$$

Из этой оценки следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_{2,n} = 0$. Аналогично получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_{1,n} = 0$. Тогда равенство (13) можно записать в виде

$$(\lambda_n, \varphi) = \int \varphi_1(x) d\mu_{r(n)+1}(x) + \int \varphi_2(x) d\mu_{r(n)}(x) + o(1). \tag{14}$$

Поскольку r_n есть подпоследовательность последовательности t_k, то $\mu_{r_{k(n)}} \to \nu$, $\mu_{r_{k(n)+1}} \to \nu$ $(n \to \infty)$. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные финитные функции на множестве $\mathbb{R}^m \setminus C(0, a)$. По предложению 9 выполняются равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_1(x) d\mu_{r_{k(n)+1}} = \int \varphi_1(x) d\nu(x), \quad \lim_{n\to\infty} \int \varphi_2(x) d\mu_{r_{k(n)}} = \int \varphi_2(x) d\nu(x).$$

Переходя в равенстве (14) к пределу при $n \to \infty$ получим равенство

$$(\alpha, \varphi) = \int (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) d\nu(x) = \frac{1}{q_1^\rho} \int \varphi\left(\frac{x}{q_1}\right) d\nu(x) = (\nu_{q_1}, \varphi).$$

Мы доказали, что для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$ выполняется равенство $(\alpha, \varphi) = (\nu_{q_1}, \varphi)$. Поскольку меры α и ν_{q_1} не нагружают нуля, то отсюда следует, что $\lambda = \nu_{q_1} \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Таким образом, если выполняется условие Б), то мера $\lambda \in \mathrm{Fr}[\mu]$.

Аналогично доказывается, что если выполняется условие В), то $\lambda \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Тем самым доказано, что условие 1) предложения 12 выполняется.

Далее покажем, что выполняется условие 2) предложения 12. Пусть λ — произвольная мера из множества $\mathrm{Fr}[\mu]$. Поскольку $\mathrm{Fr}[\mu] \subset (\mathcal{L}[a_n, b_n])_{\frac{1}{n}}$, то существует точка $t_n \in [a_n, b_n]$ такая, что $d(\lambda, \mu_{t_n}) < \frac{1}{n}$. Поэтому $\lambda = d \lim\limits_{n\to\infty} \mu_{t_n}$. Из предложения 5 следует, что последовательность μ_{t_n} широко сходится к мере λ. Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset R([a, b])$. Имеем

$$(\lambda, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\mu_{t_n}, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n^\rho} \int_{R([at_n, bt_n])} \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\mu(x).$$

Существует число n_2 такое, что при $n \geq n_2$ будет выполняться соотношение

$$R([at_n, bt_n]) \subset R([r_n, r_{n+1})).$$

На множестве $R([r_n, r_{n+1}))$ меры μ и μ_n совпадают. Поэтому

$$(\lambda, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n^\rho} \int \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} ((\mu_n)_{t_n}, \varphi).$$

Из леммы 6 следует, что $(\mu_n)_{t_n} \to \lambda$. Поскольку мера μ_n является периодической, то $(\mu_n)_{t_n} \in \mathrm{Fr}[\mu_n]$.

Тем самым условие 2) из предложения 12 выполняется. Из сказанного следует справедливость равенства (7). $\square$

Докажем теорему 5 из первой части.

Доказательство теоремы 5 ([1]). Докажем сначала теорему при предположении, что $\rho(r) \equiv \rho$. Из предложения 12 следует, что множество мер $\{(\mu_n)_t : \ n \in \{1, 2, \ldots\},\ t \in (0, \infty)\}$ компактно в метрическом пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Поэтому замыкание X этого множества в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$ есть компакт в этом пространстве. Мы будем рассматривать динамическую систему F_t, $t \in (0, \infty)$ на метрическом компакте (X, d).

Поскольку μ_n — компактная последовательность в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, то переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что выполняются равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \lambda$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n| = \hat{\lambda}$. Кроме того дополнительно можно считать, что $\hat{\lambda}(C(0, 1)) = 0$. Из предложения 12 следует, что $\lambda \in M$. Отметим ещё, что компакт M инвариантен относительно преобразования F_t.

Если $T_n > 1$ — период меры μ_n, то при любом натуральном k число T_n^k также будет периодом μ_n. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Далее построим три последовательности r_n, m_n, j_n следующим образом. Возьмём $r_1 = T_1$, $j_1 = 1$. В качестве r_2 возьмём число $r_2 = T_2^{j_2}$, причём натуральное число j_2 выберем так, чтобы выполнялись такие условия:

1. $j_2 \geq 2$;
2. $r_2 \geq r_1^2$;

3. существует натуральное число m_1 такое, что $\frac{T_1^{m_1}}{T_2^{j_2}} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Как следует из теоремы 5, глава 1, [9] для любого $\theta > 0$ существуют последовательности $q_n \to \infty$, $p_n \to \infty$ натуральных чисел такие, что выполняется неравенство

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}, \quad n \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Применим это неравенство к числу $\theta = \frac{\ln T_2}{\ln T_1}$ и перепишем его в эквивалентном виде

$$T_1^{\frac{-1}{\sqrt{5}p_n q_n}} < \frac{T_1^{p_n}}{T_2^{q_n}} < T_1^{\frac{1}{\sqrt{5}p_n q_n}}.$$

Из сказанного следует существование чисел m_1 и j_2 с перечисленными для них свойствами.

Пусть мы уже определили числа $r_1, \ldots, r_n, m_1, \ldots, m_n, j_1, \ldots, j_n$. Далее положим $r_{n+1} = T_{n+1}^{j_{n+1}}$, где натуральное число j_{n+1} выберем так, чтобы выполнялись такие условия:

1. $j_{n+1} \geq n + 1$;
2. $r_{n+1} \geq r_n^2$;
3. Существует натуральное число m_n такое, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{T_n^{m_n}}{T_{n+1}^{j_{n+1}}} \in \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Из уже цитировавшейся теоремы 5 ([9, глава 1]) следует, что числа m_n и j_{n+1} с перечисленными выше свойствами существует. Тем самым процесс построения последовательностей $r_n,\ m_n,\ j_n$ описан.

Выполняются следующие условия:

i1) m_n и j_n — это последовательности натуральных чисел;
i2) выполняется неравенство $j_n \geq n$;
i3) выполняется равенство $r_n = T_n^{k_n}$;
i4) выполняется неравенство $r_{n+1} \geq r_n^2$;
i5) выполняется соотношение $\frac{T_n^{m_n}}{T_{n+1}^{j_{n+1}}} \in \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

Определим теперь радонову меру μ в $\mathbb{R}^m$ следующим образом. Ограничение на шар (круг) $C(0, r_1)$ есть нулевая мера. Ограничения мер μ и μ_n на шаровой слой (кольцо) $R([r_n, r_{n+1}))$ совпадают.

Пусть $r \in [r_n, r_{n+1})$. Имеем

$$|\mu|(B(0,r)) = \sum_{n=1}^{k-1} |\mu| \left(R([r_n, r_{n+1})) + |\mu|(R([r_k, r])\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1} |\mu_n| \left(R([r_n, r_{n+1})) + |\mu_k|(R([r_k, r])\right) \leq \sigma \sum_{n=1}^{k-1} r_{n+1}^{\rho} + \sigma r^{\rho}.$$

Из неравенства $r_{n+1} \geq r_n^2$ следует, что при n достаточно больших $r_n^{\rho} \leq \frac{1}{2} r_{n+1}^{\rho}$. Из этого, в свою очередь следует существование постоянной C такой, что для любого натурального k будет выполняться неравенство $\sum_{n=1}^{k} r_n^{\rho} \leq C r_k^{\rho}$. Поэтому $|\mu|(B(0,r)) \leq \sigma M r_k^{\rho} + \sigma r^{\rho} \leq \sigma(M+1) r^{\rho}$.

Мы получим, что для любого $r > 0$ выполняется неравенство $|\mu|(B(0,r)) \leq \sigma_1 r^{\rho}$, где $\sigma_1 = \sigma(M+1)$. Это означает, что $\mu \in \mathcal{M}(\rho, \sigma_1)$.

Теперь докажем, что имеет место равенство $\mathrm{Fr}[\mu, \rho] = M$. Пусть $\nu \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что $\mu_{t_k} \to \nu$. Не ограничивая общность, можно считать, что на каждом полуинтервале $[r_n, r_{n+1})$ лежит не более чем одна точка t_k. Пусть $t_k \in [r_{n(k)}, r_{n(k)+1})$. Дополнительно можно считать, что выполняется одно из трёх условий:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)}} = \infty, \ \lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)+1}} = 0, \tag{15}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)}} = q_1 \in [1, \infty), \tag{16}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{r_{n(k)+1}} = q_2 \in [0, 1). \tag{17}$$

Пусть φ — произвольная функция из пространстве $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и пусть $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в $R([a,b])$. Можно считать, что $a \in (0,1),\ b \in (1,\infty)$. Имеем

$$(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\mu_{t_k}, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int_{R([at_k, bt_k])} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu(x). \tag{18}$$

Предположим, что выполняется условие (15). Тогда для всех достаточно больших k выполняется соотношение $R([at_k, bt_k]) \subset R([r_{n(k)}, r_{n(k)+1}))$.

На множестве $R([r_{n(k)}, r_{n(k)+1}))$ меры μ и $\mu_{n(k)}$ совпадают. Тогда из равенства (18) следует, что

$$(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} ((\mu_{n(k)})_{t_k}, \varphi) \tag{19}$$

Имеем $|(\mu_{n(k)})_{t_k}|(B(0,\varepsilon)) = \frac{|\mu_{n_k}|(B(0,t_k\varepsilon))}{t_k^\rho} \le \sigma\varepsilon^\rho$. Равенство (19) выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Из леммы 7 следует, что

$$\nu = \lim_{k\to\infty} (\mu_{n(k)})_{t_n}.$$

Из предложения 12 следует, что $\nu \in M$. Мы показали, что если выполняется условие (15), то $\nu \in M$.

Предположим теперь, что выполняется условие (17). В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что выполняется неравенство $bt_k > r_{n(k)+1}$. Из равенства (18) следует, что

$$(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int_{R([at_k, r_{n(k)+1}))} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu(x) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int_{R([r_{n(k)+1}, bt_k])} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu(x). \tag{20}$$

Для всех достаточно больших k выполняются соотношения

$$R([at_k, r_{n(k)+1})) \subset R([r_{n(k)}, r_{n(k)+1})),\ R([r_{n(k)+1}, bt_k]) \subset R([r_{n(k)+1}, r_{n(k)+2}))$$

Поэтому равенство (20) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}(\nu, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int_{C(0, r_{n(k)+1})} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu_{n(k)}(x) + \\ + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k^\rho} \int_{CB(0, r_{n(k)+1})} \varphi\left(\frac{x}{t_k}\right) d\mu_{n(k)+1}(x) = \lim_{k\to\infty} (J_{1,k} + J_{2,k}).\end{gathered} \tag{21}$$

Имеем

$$J_{2,k} = \frac{r_{n(k)+1}^{\rho}}{t_k^{\rho}} \int_{CB(0,1)} \varphi\left(x\frac{r_{n(k)+1}}{t_k}\right) d(\mu_{n(k)+1})_{r_{n(k)+1}}(x).$$

Так как число $r_{n(k)+1}$ является периодом меры $\mu_{n(k)+1}$, то выполняется равенство

$$\left(\mu_{n(k)+1}\right)_{r_{n(k)+1}} = \mu_{n(k)+1}.$$

Таким образом, так как $\frac{q_2 r_{n(k)+1}}{t_k} \to 1$, а массы мер $\mu_{n(k)+1}$ равномерно ограничены на носителе функции φ, то можно в интеграле заменить $\frac{r_{n(k)+1}}{t_k}$ на $\frac{1}{q_2}$.

Итак

$$J_{2,k} = \frac{1}{q_2^{\rho}} \int_{CB(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) \mu_{n(k)+1}(x).$$

Обозначим $\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & \|x\| < 1 \\ \frac{1}{q_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right), & \|x\| \geq 1. \end{cases}$ Тогда $J_{2,k} = \int \varphi_2(x) d\mu_{n(k)+1}(x)$. По предложению 9, $\lim\limits_{k\to\infty} J_{2,k} = \displaystyle\int \varphi_2(x) d\lambda(x)$. Далее находим

$$J_{1,k} = \frac{r_{n(k)+1}^{\rho}}{t_k^{\rho}} \int_{C(0,1)} \varphi\left(x\frac{r_{n(k)+1}}{t_k}\right) d(\mu_{n(k)})_{r_{n(k)+1}}(x).$$

Так как $T_{n(k)}$ есть период меры $\mu_{n(k)}$, то рассуждая как и выше, имеем

$$(\mu_{n(k)})_{r_{n(k)+1}} = (\mu_{n(k)})_{r_{n(k)}\frac{r_{n(k)+1}}{r_{n(k)}}} = (\mu_{n(k)})_{\frac{r_{n(k)+1}}{r_{n(k)}}}.$$

По условию i5 следует, что $\beta_k = \dfrac{r_{n(k)+1}}{r_{n(k)}} = T_{n(k)+1}^{j_{n(k)+1}} / T_{n(k)}^{j_{n(k)}} \to 1$ $(k \to \infty)$. Следовательно,

$$J_{1,k} = \frac{1}{q_2^{\rho}} \int_{C(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) d(\mu_{n(k)})_{\beta_k}(x) = \frac{1}{q_2^{\rho}\beta_k^{\rho}} \int_{C(0,\beta_k)} \varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) d\mu_{n(k)}(x).$$

Представим $J_{1,k}$ в виде $J_{1,k} = J_{3,k} + J_{4,k} + J_{5,k}$, где

$$J_{3,k} = \frac{1}{q_2^{\rho}} \int_{C(0,1)} \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) d\mu_{n(k)}(x),\ J_{4,k} = \int_{C(0,1)} \left(\frac{1}{q_2^{\rho}\beta_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) - \frac{1}{q_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right)\right) d\mu_{n(k)}(x),$$

$$J_{5,k} = \begin{cases} \int_{C(0,\beta_k)\setminus C(0,1)} \frac{1}{q_2^{\rho}\beta_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) d\mu_{n(k)}(x), & \text{если } \beta_k \geq 1, \\ -\int_{C(0,1)\setminus C(0,\beta_k)} \frac{1}{q_2^{\rho}\beta_2^{\rho}}\varphi(\frac{x}{q_2\beta_k}) d\mu_{n(k)}(x), & \text{если } \beta_k \leq 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{q_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right), \text{ если } \|x\| < 1, \\ 0, \text{ если } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Тогда $J_{3,k} = \int \varphi_1(x) d\mu_{n(k)}(x)$. По предложению 9, $\lim\limits_{k\to\infty} J_{3,k} = \int \varphi_1(x) d\lambda(x)$. Справедлива оценка

$$|J_{4,k}| \leq \max_{\|x\|\leq 1} \left|\frac{1}{q_2^{\rho}\beta_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2\beta_k}\right) - \frac{1}{q_2^{\rho}}\varphi\left(\frac{x}{q_2}\right)\right| |\mu_{n(k)}|(B(0,1)).$$

Так как $|\mu_{n(k)}|(B(0,1)) \le \sigma$, то $\lim\limits_{k\to\infty} J_{4,k} = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$|J_{5,k}| \le \frac{1}{q_2^\rho \beta_2^\rho}\|\varphi\||\mu_{n(k)}|(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon]).$$

Если число ε таково, что выполняются равенства $\hat{\lambda}(S(0,1-\varepsilon)) = 0,\ \hat{\lambda}(S(0,1+\varepsilon)) = 0$, тогда из предложению 7 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |\mu_{n(k)}|(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])) = \hat{\lambda}(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])).$$

Так как $\hat{\lambda}(S(0,1)) = 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{\lambda}(R([1-\varepsilon, 1+\varepsilon])) = 0$.

Из сказанного легко следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} J_{5,k} = 0$.

Теперь равенство (21) переписывается в виде

$$(\nu, \varphi) = \int (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) d\lambda(x) = \frac{1}{q_2^\rho}\int \varphi\left(\frac{x}{q_2}\right) d\lambda(x) = (\lambda_{q_2}, \varphi). \tag{22}$$

Равенство (22) выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Так как $\nu(\{0\}) = 0$, $\lambda(\{0\}) = 0$, то отсюда следует, что $\nu = \lambda_{q_2}$. Так как $\lambda_{q_2} \in M$, то $\nu \in M$. Мы доказали, что если выполняется условие (17), то $\nu \in M$.

Аналогично доказывается, что если выполняется условие (16), то $\nu \in M$. Таким образом в любом случае $\nu \in M$. Мы доказали соотношение $\mathrm{Fr}[\mu] \subset M$.

Пусть теперь $\nu \in M$. По предложению 12 существует последовательность мер $\nu_n \in \mathrm{Fr}[\mu_n]$ такая, что $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n$.

Имеем $r_n = T_n^{j_n},\ r_{n+1} = T_{n+1}^{j_{n+1}}$. Так как выполняется неравенство $r_{n+1} \ge r_n^2$, то $r_{n+1} \ge T_n^{2j_n}$. При $n \ge 3$ выполняется соотношение $j_n + 3 \le 2j_n$. Поэтому при $n \ge 3$ выполняется соотношение $R\left([T_n^{j_n+1}, T_n^{j_n+3}]\right) \subset R([r_n, r_{n+1}))$.

Мера ν_n имеет вид $\nu_n = (\mu_n)_{t_n}$. Как следует из замечания к предложению 10 можно считать, что $t_n \in \left[T_n^{j_n+1}, T_n^{j_n+2}\right]$. Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Имеем при подходящих $a,\ b$

$$(\nu_n, \varphi) = \frac{1}{t_n^\rho}\int_{R([at_n, bt_n])} \varphi\left(\frac{x}{t_n}\right) d\mu_n(x). \tag{23}$$

При всех достаточно больших n выполняется соотношение $R([at_n, bt_n]) \subset R([r_n, r_{n+1}))$. На множестве $R([r_n, r_{n+1}))$ функции μ_n и μ совпадают. Поэтому равенство (23) можно переписать в виде

$$(\nu_n, \varphi) = (\mu_{t_n}, \varphi). \tag{24}$$

Существует подпоследовательность натуральных чисел $n(k)$ такая, что $\mu_{t_{n(k)}} \to \alpha$, где α — некоторая мера из множества $\mathrm{Fr}[\mu]$. Беря в равенстве (24) $n = n(k)$ и переходя к пределу при $k \to \infty$ получим равенство $(\nu, \varphi) = (\alpha, \varphi)$. Это равенство выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Поскольку меры ν и α не нагружают нуля, то из этого равенства следует, что $\nu = \alpha$. Мы доказали включение $M \subset \mathrm{Fr}[\mu]$, а вместе с ним и теорему для случая $\rho(r) \equiv \rho$.

В общем случае теорема следует из доказанного и леммы 9. $\square$

5. Цепная рекурентность. Пусть $\Phi_t,\ t \in (0,\infty)$ — динамическая система в метрическом пространстве (X,d). Последовательность $p_0 = p, p_1, \dots, p_k = q$ точек из X называется (ω,ε)-цепью, соединяющей точки p и q, если существует последовательность $t_l,\ l \in \{0,\dots,k-1\}$ такая, что $t_l \ge \omega$ и $d(\Phi_{t_l}p_l, p_{l+1}) < \varepsilon$.

Динамическая система Φ_t в метрическом пространстве (X,d) называется цепной рекурентностью, если для любых точек p и q из X и для любых $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует (ω,ε)-цепь, соединяющая точки p и q.

Предложение 13. *Пусть Φ_t — динамическая система в метрическом пространстве (X,d), является цепной рекурентностью, и пусть q_n — произвольная последовательность точек из X. Тогда существуют последовательность p_n точек из X и последовательности $\omega_n > 0,\ \alpha_n > 0,\ \varepsilon_n > 0$ такие, что выполняются условия:*

1) q_n — подпоследовательность последовательности p_n;

2) $\alpha_n \le \frac{1}{2},\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;

3) $\omega_n \ge 2,\ \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = \infty$;

4) $d(\Phi_{\omega_n}p_n, \Phi_{\alpha_{n+1}}p_{n+1}) < \varepsilon_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Доказательство. Для любого $k \in \{1,2,\dots\}$ рассмотрим набор $\{\tau_k = \frac{1}{4^k}, T_k = 4^k, \gamma_k = 4^k, \delta_k = \frac{1}{4^k}\}$. Поскольку динамическая система Φ_t является цепной рекурентностью, то для любого $k \ge 1$ найдутся целое число $l_k \ge 1$, последовательность чисел $t_k(s),\ s \in \{0,\dots,l_k-1\}$ такая, что $t_k(s) \ge \sqrt{T_k}$, последовательность точек из X $r_k(s),\ s \in \{0,\dots,l_k\}$ такая, что $d(\Phi_{t_k(s)}r_k(s), r_k(s+1)) < \tau_k,\ s \in \{0,\dots,l_k-1\},\ r_k(0) = \Phi_{\gamma_k}q_k$, $r_k(l_k) = \Phi_{\delta_k}q_{k+1}$.

Далее образуем следующие последовательности.

1. $\nu_n:\ \nu_1 = 1,\ \nu_{n+1} = \nu_n + l_n + 1$.

2. $\varepsilon_j:\ \varepsilon_j = \tau_n$ при $j \in \{\nu_n,\dots,\nu_{n+1}-1\}$.

3. $\alpha_j:\ \alpha_{\nu_n} = \frac{1}{4^n},\ \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{t_n(s)}}$, если $j = \nu_n + s + 1,\ s \in \{0,\dots,l_n-1\}$.

4. $\omega_j:\ \omega_{\nu_n} = 4^n,\ \omega_j = \sqrt{t_n(s)}$, если $j = \nu_n + s + 1,\ s \in \{0,\dots,l_n-1\}$.

5. $p_j:\ p_{\nu_n} = q_n,\ p_j = \Phi_{\sqrt{t_n(s)}}r_n(s),\ j = \nu_n + s + 1,\ s \in \{0,\dots,l_n-1\}$.

Проверим, что для любого $j \ge 1$ выполняется неравенство

$$d(\Phi_{\omega_j}p_j, \Phi_{\alpha_{j+1}}p_{j+1}) < \varepsilon_j. \tag{25}$$

Пусть $j = \nu_n$. Имеем $\omega_j = 4^n = \gamma_n,\ p_j = q_n,\ \Phi_{\omega_j}p_j = \Phi_{\gamma_n}q_n = r_n(0)$. Далее находим $p_{j+1} = \Phi_{\sqrt{t_n(0)}}r_n(0),\ \alpha_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{t_n(0)}},\ \Phi_{\alpha_{j+1}}p_{j+1} = r_n(0)$.

Тем самым неравенство (25) при $j = \nu_n$ доказано.

Пусть теперь $j = \nu_n + s + 1,\ s \in \{0,\dots,l_n-1\}$. Имеем

$$p_j = \Phi_{\sqrt{t_n(s)}}r_n(s),\ \omega_j = \sqrt{t_n(s)},\ \Phi_{\omega_j}p_j = \Phi_{t_n(s)}r_n(s),$$

$$p_{j+1} = \Phi_{\sqrt{t_n(s+1)}}r_n(s+1),\ \alpha_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{t_n(s+1)}},\ \Phi_{\alpha_{j+1}}p_{j+1} = r_n(s+1).$$

Поэтому пользуясь определением величин $t_n(s),\ r_n(s),\ \tau_n,\ \varepsilon_j$ получаем

$$d(\Phi_{\omega_j}p_j, \Phi_{\alpha_{j+1}}p_{j+1}) = d(\Phi_{t_n(s)}r_n(s), r_n(s+1)) < \tau_n = \varepsilon_j.$$

Тем самым неравенство (25) выполняется для любого j. Для последовательностей p_n, $\omega_n, \alpha_n, \varepsilon_n$ выполняются все условия предложения. $\square$

Пусть $\alpha_n \in (0, \frac{1}{2}]$ — последовательность, сходящаяся к нулю, $\omega_n \in [2, \infty)$ — последовательность, сходящаяся к бесконечности. Образуем ещё две последовательности τ_n и σ_n следующим образом: $\tau_1 = 1$, $\sigma_n = \omega_n \tau_n$, $\tau_{n+1} = \frac{\sigma_n}{\alpha_{n+1}}$. Заметим, что $\tau_{n+1} = \frac{\omega_n}{\alpha_{n+1}} \tau_n$, $\sigma_{n+1} = \frac{\omega_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \sigma_n$.

Лемма 14. *Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция на оси $(-\infty, \infty)$ со значениями из сегмента $[0, 1]$, которая убывает на полуоси $[0, \infty)$. Пусть, кроме того выполняются условия $\chi(t) = 1$ при $t \in [-1, 1]$ и $\chi(t) = 0$ при $|t| \geq 2$. Пусть α_n и ω_n — две последовательности, удовлетворяющие сформулированным выше условиям, а τ_n и σ_n — две последовательности, построенные с помощью последовательностей α_n и ω_n указанным выше способом.*

Пусть $\chi_n(t) = \chi(\frac{t}{\sigma_n})$, $\psi_1(x) = \chi_1(\|x\|)$, $\psi_n(x) = \chi_n(x) - \chi_{n-1}(x)$, $n \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

1) $\psi_n(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция,

2) $\psi_n(x) \in [0, 1]$для любого $x \in \mathbb{R}^m$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) = 1, \ x \in \mathbb{R}^m$,

4) $\psi_n(x) = 1$, если $\|x\| \in [2\sigma_{n-1}, \sigma_n], \ n \geq 2$,

5) $\operatorname{supp} \psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^m : \ \sigma_{n-1} \leq \|x\| \leq 2\sigma_n\}, \ n \geq 2$,

6) $\operatorname{supp} \psi_{n_2} \cap \operatorname{supp} \psi_{n_1} = \varnothing$, если $|n_2 - n_1| \geq 2$,

7) существует постоянная C такая, что для любого $n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\| \operatorname{grad} \ \psi_n(x)\| \leq C/\|x\|.$$

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Функция $\chi_n(x)$ равна 1 в шаре $B(0, \sigma_n)$ в то время как $\chi_{n-1}(x) \leq 1$. Поэтому в шаре $B(0, \sigma_n)$ выполняется неравенство $\psi_n(x) \geq 0$. Если $\|x\| > \sigma_n$, то $\chi_{n-1}(x) = 0$. Поэтому неравенство $\psi_n(x) \geq 0$ выполняется во всём пространстве $\mathbb{R}^m$. Неравенство $\psi_n(x) \leq 1$ следует из того, что $\chi(t)$ убывающая на $(0, \infty)$ и $\sigma_n > \sigma_{n-1}$. Тем самым утверждение 2) доказано. Так как $\chi_{n-1}(x) = 0$ при $\|x\| \geq 2\sigma_{n-1}$, то $\psi_n(x) = 1$, если $\|x\| \in [2\sigma_{n-1}, \sigma_n]$. Тем самым утверждении 4) доказано. Если $\|x\| \geq 2\sigma_n$, то $\chi_n(x) = 0, \ \chi_{n-1}(x) = 0$. Если $\|x\| \leq \sigma_{n-1}$, то $\chi_n(x) = 1, \ \chi_{n-1}(x) = 1$. Тем самым утверждение 5) доказано. Утверждение 6) следует из утверждения 5). Далее,

$$\sum_{n=1}^{k} \psi_n(x) = \chi_k(x).$$

В шаре $B(0, \sigma_k)$ выполняется равенство $\chi_k(x) = 1$. Отсюда следует утверждение 3. Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \chi \left(\frac{\|x\|}{\sigma_n} \right) = \chi' \left(\frac{\|x\|}{\sigma_n} \right) \frac{x_j}{\|x\|} \frac{\|x\|}{\sigma_n} \frac{1}{\|x\|}.$$

Первая часть можем быть отлична от нуля только если выполняются неравенства $\sigma_n \leq \|x\| \leq 2\sigma_n$. Из этого следует утверждение 7) леммы. □

Докажем теорему 6 из первой части.

Доказательство теоремы 6 ([1]). Вначале предположим, что $\rho(r) \equiv \rho$. Поскольку M — компакт, то в M существует счётная всюду плотная последовательность q_n. По предложению 13 существуют последовательности $p_n \in M, \ \omega_n > 0, \ \alpha_n > 0, \ \varepsilon_n > 0$, обладающие свойствами, перечисленными в этом предложении. Пусть τ_n и σ_n — последовательности построенные с помощью последовательностей ω_n и α_n по способу, описанному в тексте перед леммой 14. Пусть $\psi_n(x)$ — последовательность из леммы 14. Обозначим

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) F_{\frac{1}{\tau_n}} p_n.$$

Нетрудно видеть, что $\mu \in \mathcal{M}(\rho, \sigma)$. Докажем, что $\mathrm{Fr}[\mu, \rho] = M$. Обозначим $H_n = F_{\tau_n}\mu - p_n$.

Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset R([a,b])$. Имеем

$$(F_{\tau_n}\mu, \varphi) = \frac{1}{\tau_n^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_n, b\tau_n])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_n}\right) d\mu(x) = \frac{1}{\tau_n^{\rho}} \int\limits_{R([a\tau_n, b\tau_n])} \varphi\left(\frac{x}{\tau_n}\right) d\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k F_{\frac{1}{\tau_k}} p_k\Big)(x). \quad (26)$$

Из леммы 14 следует, что выполняются соотношения $\operatorname{supp}\psi_k \subset R([\sigma_{k-1}, 2\sigma_k])$, $\psi_k(x) = 1$ при $x \in [2\sigma_{k-1}, \sigma_k]$. Если $k \le n-1$, то для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство $2\sigma_k < a\tau_n = a\frac{\sigma_{n-1}}{\alpha_n}$. Если $k \ge n+1$, то для всех достаточно больших n будет выполняться неравенство $b\tau_n < 2\sigma_{k-1} \le 2\sigma_n = 2\omega_n\tau_n$. Поэтому сумму в правой части неравенства (26) можно заменить на $\psi_n(x)F_{\frac{1}{\tau_n}}p_n$. Кроме того $\psi_n(x) = 1$ при $x \in R([a\tau_n, b\tau_n])$. Мы получим

$$(F_{\tau_n}\mu, \varphi) = \frac{1}{\tau_n^{\rho}} \int \varphi\left(\frac{x}{\tau_n}\right) d\left(F_{\frac{1}{\tau_n}} p_n\right)(x) = (p_n, \varphi), \ n \ge n_1. \quad (27)$$

Пусть ν — произвольная мера из M. Поскольку последовательность p_n всюду плотная в M, то существует последовательность $n = n(j)$ такая, что $\lim_{j\to\infty} p_{n(j)} = \nu$. Теперь из (27) следует, что $(\nu, \varphi) = \lim_{j\to\infty}(\mu_{\tau_{n(j)}}, \varphi)$.

Это равенство выполняется для любой функции $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Поскольку мера ν не нагружает точку ноль, то из этого равенства и леммы 6 следует, что

$$\nu = \lim_{j\to\infty} \mu_{\tau_{n(j)}} \in \mathrm{Fr}[\mu].$$

Мы доказали включение $M \subset \mathrm{Fr}[\mu]$. Теперь будем доказывать включение $\mathrm{Fr}[\mu] \subset M$.

Пусть $\nu \in \mathrm{Fr}[\mu]$. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что

$$\nu = \lim_{n\to\infty} F_{t_n}\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}.$$

Не ограничивая общность, можно считать, что на любом сегменте $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ находится не более одной точки t_n. Пусть $t_n \in [\sigma_{k(n)-1}, \sigma_{k(n)}]$. Дополнительно можно считать, что выполняется одно из трёх условий

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)-1}} = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)}} = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)-1}} = a_1 \in [1, \infty), \quad (29)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sigma_{k(n)}} = a_2 \in (0, 1]. \quad (30)$$

Пусть φ — произвольная функция из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset R([a,b])$. Тогда

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \frac{1}{t_n^{\rho}} \int_{R([at_n, bt_n])} \varphi\Big(\frac{x}{t_n}\Big) d\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k F_{\frac{1}{\tau_k}} p_k\Big)(x). \quad (31)$$

Предположим, что выполнено условие (28). Тогда существует число n_1 такое, что для всех $n \geq n_1$ будут выполняться неравенства $at_n > 2\sigma_{k(n)-1}$, $bt_n < \sigma_{k(n)}$. Из этих неравенств следует, что на множестве $R([at_n, bt_n])$ для любого $k = k(n)$ будет выполняться равенство $\psi_k(x) = 0$, а если $k = k(n)$, то $\psi_k(x) = 1$. Поэтому равенство (31) можно переписать в виде

$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \frac{1}{t_n^\rho} \int_{R([at_n, bt_n])} \varphi\Big(\frac{x}{t_n}\Big) d\Big(F_{\frac{1}{\tau_{k(n)}}} p_{k(n)}\Big)(x) = (\lambda_n, \varphi), \tag{32}$$

где $\lambda_n = \big(p_{k(n)}\big)_{\frac{t_n}{\tau_{k(n)}}}$.

Мера λ_n принадлежат компакту M. Поэтому найдётся последовательность $n = n(j)$ такая, что $\lambda_{n(j)} \to \lambda \in M$ $(j \to \infty)$. Беря в равенстве (32) $n = n(j)$ и переходя к пределу при $j \to \infty$ получим, что $(\nu, \varphi) = (\lambda, \varphi)$. Это равенство для любой φ функции из пространства $\Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Однако, поскольку меры ν и λ не нагружают нуля, из него следует, что $\nu = \lambda \in M$. Мы показали, что если выполняется условие (28), то $\nu \in M$.

Предположим теперь, что выполняется условие (29). Тогда равенство (31) переписывается в виде

$$\begin{aligned}(\mu_{t_n}, \varphi) &= \frac{1}{t_n^\rho} \int \varphi\Big(\frac{x}{t_n}\Big) \psi_{k(n)-1}(x) d\Big(F_{\frac{1}{\tau_{k(n)-1}}} p_{k(n)-1}\Big)(x) + \\ &\quad + \frac{1}{t_n^\rho} \int \varphi\Big(\frac{x}{t_n}\Big) \psi_{k(n)}(x) d\Big(F_{\frac{1}{\tau_{k(n)}}} p_{k(n)}\Big)(x) = \\ &= \frac{\sigma_{k(n)-1}^\rho}{t_n^\rho} \int \varphi\Big(x\frac{\sigma_{k(n)-1}}{t_n}\Big) \psi_{k(n)-1}(\sigma_{k(n)-1}x) d\Big((p_{k(n)-1})_{\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)-1}}}\Big)(x) + \\ &\quad + \frac{\sigma_{k(n)-1}^\rho}{t_n^\rho} \int \varphi\Big(x\frac{\sigma_{k(n)-1}}{t_n}\Big) \psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) d\Big((p_{k(n)})_{\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)}}}\Big)(x).\end{aligned} \tag{33}$$

Как следует из леммы 1 в рассматриваемом случае, не ограничивая общности, можно считать, что выполняется равенство $t_n = a_1\sigma_{k(n)-1}$. Учитывая это равенство, также равенства

$$\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)-1}} = \omega_{k(n)-1}, \ \ \frac{\sigma_{k(n)-1}}{\tau_{k(n)}} = \alpha_{k(n)},$$

(33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(\mu_{t_n}, \varphi) &= \frac{1}{a_1^\rho} \int \varphi\Big(\frac{x}{a_1}\Big) \psi_{k(n)-1}(\sigma_{k(n)-1}x) d((p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}})(x) + \\ &\quad + \frac{1}{a_1^\rho} \int \varphi\Big(\frac{x}{a_1}\Big) \psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) d((p_{k(n)})_{\omega_{k(n)}})(x).\end{aligned} \tag{34}$$

Имеем

$$\psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) = \chi\Big(\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\sigma_{k(n)}}\|x\|\Big) - \chi(\|x\|).$$

В интегралах из равенства (34) интегрирование можно вести по шару $B(0, ba_1)$. Если $x \in B(0, ba_1)$ то для всех достаточно больших n будет выполняться равенство $\chi\left(\frac{\sigma_{k(n)-1}}{\sigma_{k(n)}}\|x\|\right) = 1$. Обозначим второе слагаемое из правой части равенства (34) $J_{2,n}$. Его можно преобразовать следующим образом

$$J_{2,n} = \frac{1}{a_1^\rho} \int \varphi\Big(\frac{x}{a_1}\Big) \psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) d(p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}(x) + h_n,$$

где
$$h_n = \frac{1}{a_1^\rho}\int \varphi\Big(\frac{x}{a_1}\Big)(1-\chi(\|x\|))d((p_{k(n)})_{\alpha_{k(n)}} - (p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}})(x).$$
Из предложения 1 следует, что мера $(p_{k(n)})_{\alpha_{k(n)}} - (p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Теперь, учитывая равенство $\psi_{k(n)-1}(\sigma_{k(n)-1}x) + \psi_{k(n)}(\sigma_{k(n)-1}x) = 1$, равенство (34) можно переписать в виде
$$(\mu_{t_n}, \varphi) = \frac{1}{a_1^\rho}\int \varphi\Big(\frac{x}{a_1}\Big)d(p_{k(n)-1})_{\omega_{k(n)-1}}(x) + h_n = \int \varphi(x)d(p_{k(n)-1})_{a_1\omega_{k(n)-1}}(x) + h_n. \quad (35)$$

Меры $\lambda_n = (p_{k(n)-1})_{a_1\omega_{k(n)-1}}$ лежат а компакте M. Поэтому существует последовательность $n = n(j)$ такая, что $\lambda_{n(j)} \to \lambda \in M$. Беря в равенстве (35) $n = n(j)$ и переходя к пределу при $j \to \infty$ получим равенство $(\nu, \varphi) = (\lambda, \varphi)$. Это равенство выполняется для всех $\varphi \in \Phi_0(\mathbb{R}^m)$. Поскольку меры ν и λ не нагружают точку ноль, то отсюда следует, что $\nu = \lambda \in M$. Мы доказали, что если выполняется условие (29), то мера $\nu \in M$. Аналогично показывается, что если выполняется условие (30), то в этом случае мера также принадлежит M. Таким образом соотношение $\nu \in M$ выполняется в любом случае. Тем самым доказано включение $\mathrm{Fr}[\mu] \subset M$, а вместе с ним и теорема для случая когда $\rho(r) \equiv \rho$. Теперь утверждение теоремы следует из доказанного и леммы 9. $\square$

6. Псевдотраектории. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $\lambda(t) : (0, \infty) \to X$ (не обязательно непрерывное) мы будем называть кривой в метрическом пространстве X.

Кривая $\lambda(t)$ называется всюду плотной на бесконечности в пространстве X, если для любой точки $x \in X$ существует $t_n \to \infty$ такая, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n)$.

Отображение $\lambda(t)$ будем называть кусочно непрерывным, если множество точек разрыва этого отображения не имеет конечных предельных точек.

Пусть Φ_t — динамическая система на метрическом пространстве (X, ρ). Кривая $\lambda(t)$ называется псевдотраекторией, если для любого $\tau > 0$ выполняется равенство
$$\lim_{t\to\infty} \rho(\Phi_t\lambda(t), \lambda(t\tau)) = 0,$$
и этот предел равномерный на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

Докажем теорему 7 из первой части.

Доказательство теоремы 7 ([1]). Из леммы 9 следует, что не ограничивая общности можно считать, что $\rho(r) \equiv \rho$.

Из леммы 3 следует, что дополнительно можно считать, что $\mu \in \mathcal{M}(\rho, \sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. В этом случае траектория μ_t, $t \in (0, \infty)$ будет сильно ограниченным, а следовательно, согласно предложению 2 и компактным множеством в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через X замыкание праектории μ_t, $t \in (0, \infty)$ в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^m), d)$. По предложению 8 множество X будет компактом в пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ и d-сходимость на X будет эквивалентна широкой сходимости.

Так как траектория μ_t, $t \in (0, \infty)$ инвариантна относительно преобразования F_t, то множество X будет также инвариантным относительно этого преобразования. Поэтому система отображений F_t, $t \in (0, \infty)$ будет динамической системой на метрическом компакте (X, d).

Обозначим через $\tilde{\mu}_n$ точку из M ближайшую к точке $\mu_n = F_n\mu$. По лемме 12 $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mu_n, \tilde{\mu}_n) = 0$. Определим теперь кривую $\lambda(t)$ в метрическом пространстве (M, d) следующим образом $\lambda = \begin{cases} \tilde{\mu}_n, \ t \in [n, n+1), \ n \geq 1; \\ \tilde{\mu}_1, \ t \in (0, 1). \end{cases}$

Очевидно, что $\lambda(t)$ — кусочно непрерывная кривая.

Пусть ν — произвольная мера из M. Существует последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\nu = \lim_{k\to\infty} \mu_{t_k}$. Пусть $n_k = [t_k]$. Очевидно, что $\frac{n_k}{t_k} \to 1$ $(k \to \infty)$. Далее имеем $\mu_{n_k} = (\mu_{t_k})_{\frac{n_k}{t_k}}$. Из леммы 1 следует, что $\mu_{n_k} \to \nu$. Поэтому

$$\nu = d \lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} = d \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}_{n_k} = d \lim_{k\to\infty} \lambda(n_k).$$

Тем самым доказано, что кривая $\lambda(t)$ плотна на бесконечности в пространстве M.

Пусть теперь $[a, b]$ — произвольный сегмент, лежащий на полуоси $(0, \infty)$ и пусть $\tau \in [a, b]$. Имеем

$$A(t,\tau) = d\big(F_\tau\lambda(t), \lambda(t\tau)\big) = d\big((\tilde{\mu}_n)_\tau, \tilde{\mu}_{[t\tau]}\big) \leq d\big((\tilde{\mu}_n)_\tau, (\mu_n)_\tau\big) + d\big((\mu_n)_\tau, \mu_{[t\tau]}\big) + d\big(\mu_{[t\tau]}, \tilde{\mu}_{[t\tau]}\big),$$

где $n = [t]$. Пусть g — функция из леммы 10. Выполняется неравенство $d\left((\tilde{\mu}_n)_\tau, (\mu_n)_\tau\right) \leq g\left(d\left(\tilde{\mu}_n, \mu_n\right)\right)$ Из леммы 10 следует, что функция $d\left((\tilde{\mu}_n)_\tau, (\mu_n)_\tau\right)$ равномерно относительно τ на сегменте $[a, b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Докажем теперь, что функция $d\big((\mu_n)_\tau, \mu_{[t\tau]}\big)$ равномерно относительно $\tau \in [a, b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Если это не так, то существуют число $\varepsilon_0 > 0$, последовательности $t_k \to \infty$ и $\tau_k \in [a, b]$ такие, что выполняется неравенство

$$d\left((\mu_{[t_k]})_{\tau_k}, \mu_{[t_k\tau_k]}\right) \geq \varepsilon_0. \tag{36}$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\mu_{t_k} \to \alpha \in M, \ \tau_k \to \tilde{\tau} \in [a, b]$. Так как функция $F_t\mu$ непрерывна по совокупности переменных, то

$$\mu_{t_k\tilde{\tau}} = F_{\tilde{\tau}}(\mu_{t_k}) \to F_{\tilde{\tau}}\alpha = \alpha_{\tilde{\tau}}, \ (\mu_{[t_k]})_{\tau_k} = F_{\frac{[t_k]\tau_k}{t_k\tilde{\tau}}}\left(\mu_{t_k\tilde{\tau}}\right) \to \alpha_{\tilde{\tau}}, \ \mu_{[t_k\tau_k]} = F_{\frac{[t_k\tau_k]}{t_k\tilde{\tau}}}\left(\mu_{t_k\tilde{\tau}}\right) \to \alpha_{\tilde{\tau}}.$$

Справедливо неравенство $d\left((\mu_{[t_k]})_{\tau_k}, \mu_{[t_k\tau_k]}\right) \leq d((\mu_{[t_k]})_{\tau_k}, \alpha_{\tilde{\tau}}) + d(\alpha_{\tilde{\tau}}, \mu_{[t_k\tau_k]})$. Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$. Это противоречит неравенству (36). Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Тем самым доказано, что функция $A(t, \tau)$ равномерно относительно τ на сегменте $[a, b]$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Это означает, что кривая $\lambda(t)$ является псевдотраекторией. □

Докажем теорему 8 из первой части.

Доказательство теоремы 8 ([1]). Пусть p и q — произвольные точки из M, а ω и ε — произвольные строго положительные числа. По теореме 7 в множестве M существует кусочно непрерывная псевдотраектория $\lambda(t)$ плотная на бесконечности в пространстве M. Поэтому существуют две последовательности $t_n^{(1)} \to \infty$ и $t_n^{(2)} \to \infty$ такие, что выполняются равенства $p = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n^{(1)}), \ q = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(t_n^{(2)})$.

Пусть числа $t_{n_1}^{(1)}$ и $t_{n_2}^{(1)}$ связаны соотношением

$$\frac{\ln t_{n_2}^{(2)} - \ln t_{n_1}^{(1)}}{\ln(\omega + 1)} = k + \theta, \tag{37}$$

где k — натуральные число, $\theta \in [0,1)$. Найдём число x такое, чтобы выполнялось равенство $\frac{\ln t^{(2)}_{n_2} - \ln t^{(1)}_{n_1}}{\ln(\omega+x)} = k$. Тогда $\frac{\ln(\omega+x)}{\ln(\omega+1)} = 1 + \frac{\theta}{k}$, $\omega + x = (\omega+1)^{1+\frac{\theta}{k}}$. Если число k таково, что выполняется неравенство

$$k > \frac{\ln(\omega+1)}{\ln\frac{\omega+2}{\omega+1}}, \tag{38}$$

то будет выполняться соотношение $x \in [1,2]$.

В дальнейшем будем считать, что числа $t^{(1)}_{n_1}$ и $t^{(1)}_{n_2}$ таковы, что выполняется неравенство (38). В этом случае $t^{(2)}_{n_2} = t^{(1)}_{n_1}\tau^k$, $\tau = \omega + x$.

Построим теперь последовательность p_j, $j \in \{0,\dots,k\}$ следующим образом: $p_0 = p$, $p_k = q$, $p_j = \lambda(\tau^j t^{(1)}_n)$, $j \in \{1,\dots,k-1\}$.

Так как кривая $\lambda(t)$ является псевдотраекторией то существует число T такое, что для всех $t \geq T$ и для всех $\tau_1 \in [\omega+1,\omega+2]$ будет выполняться неравенство

$$d(F_{\tau_1}\lambda(t),\lambda(\tau_1 t)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{39}$$

Нам будем нужна оценка величины $d(F_\tau p, F_\tau(\lambda(t^{(1)}_{n_1}))$. Считая, что $[a,b] = [\omega+1,\omega+2]$ рассмотрим функцию g из леммы 10. Справедлива оценка

$$d\left(F_\tau p, F_\tau\left(\lambda(t^{(1)}_{n_1})\right)\right) \leq g\left(d\left(p,\lambda\left(t^{(1)}_{n_1}\right)\right)\right). \tag{40}$$

Имеем $\lim_{n\to\infty} d(p,\lambda(t^{(1)}_n)) = 0$. Из леммы 10 следует, что $\lim_{n\to\infty} g(d(p,\lambda(t^{(1)}_n))) = 0$. Поэтому существует число N такое, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$g\left(d\left(p,\lambda\left(t^{(1)}_n\right)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

В качестве n_1 возьмём такое число, чтобы выполнялись неравенства $n_1 > N$, $t^{(1)}_{n_1} > T$. Очевидно, что такой выбор возможен. Теперь из неравенств (40) и (41) следует, что будет выполняться неравенство

$$d\left(F_\tau p, F_\tau\left(\lambda\left(t^{(1)}_{n_1}\right)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{42}$$

а из неравенства (39) следует, что будет выполняться неравенство

$$d\left(F_\tau\left(\lambda\left(t^{(1)}_{n_1}\right)\right), F_\tau\left(\lambda\left(t^{(1)}_{n_1}\right)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{43}$$

Число n_1 мы уже выбрали. Выберем теперь n_2. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} d\big(q,\lambda\big(t^{(2)}_n\big)\big) = 0$. Поэтому найдется число N_1 такое, что для всех $n > N_1$ будет выполняться неравенство

$$d\left(q,\lambda\left(t^{(2)}_n\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{44}$$

Пусть целое число k_n определяется равенством $\frac{\ln t^{(2)}_n - \ln t^{(1)}_{n_1}}{\ln(\omega+1)} = k_n + \theta_n$, где $\theta_n \in [0,1)$. Имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Поэтому существует число N_2 такое, что для всех $n > N_2$ будет выполняться неравенство

$$k_n > \frac{\ln(\omega+1)}{\ln\frac{\omega+2}{\omega+1}}. \tag{45}$$

Возьмем теперь в качестве n_2 какое-либо число, удовлетворяющее неравенсту $n_2 > \max\{N_1, N_2\}$. Тогда из неравенства (44) будет следовать неравенство

$$d\left(q, \lambda\left(t_{n_2}^{(2)}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{46}$$

Из неравенства (45) следует, что если число x определять из условия $\frac{\ln t_{n_2}^{(2)} - \ln t_{n_1}^{(1)}}{\ln(\omega+x)} = k_{n_2}$, то для x будет справедливо соотношение $x \in [1,2]$.

Мы выбрали числа n_1 и n_2. Будем считать, что последовательность p_j построена с помощью этих чисел. Справедливы следующие свойства этой последовательности

1. $d(F_\tau p_0, p_1) \leq d(F_\tau p, F_\tau(\lambda(t_{n_1}^{(1)}))) + d(F_\tau(\lambda(t_{n_1}^{(1)})), \lambda(\tau t_{n_1}^{(1)}))$.

Теперь из неравенств (42) и (43) следует неравенство $d(F_\tau p_0, p_1) < \varepsilon$.

2. $d(F_\tau p_{k-1}, p_k) \leq d(F_\tau(\lambda(\tau^{k-1} t_{n_1}^{(1)})), \lambda(\tau^k t_{n_1}^{(1)})) + d(\lambda(t_{n_2}^{(2)}), q)$.

Так как $\tau^{k-1} t_{n_1}^{(1)} > T$, то из неравенства (39) следует, что $d(F_\tau(\lambda(\tau^{k-1} t_{n_1}^{(1)})), \lambda(\tau^k t_{n_1}^{(1)})) < \frac{\varepsilon}{2}$, что вместе с неравенством (46) даёт $d(F_\tau p_{k-1}, p_k) < \varepsilon$.

3. Пусть $j \in \{1, \dots, k-2\}$. Тогда $d(F_\tau p_j, p_{j+1}) = d(F_\tau(\lambda(\tau^j t_{n_1}^{(1)})), \lambda(\tau^{j+1} t_{n_1}^{(1)}))$.

Так как $\tau^j t_{n_1}^{(1)} > T$, то из неравенства (39) следует, что $d(F_\tau p_j, p_{j+1}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Так как $\tau = \omega + x > \omega$, то последовательность $p_0,\ p_1, \dots,\ p_k$ есть (ω, ε)-цепь, соединяющая точки p и q.

Таким образом динамическая система $F_t,\ t \in (0, \infty)$ есть цепная рекурентность на метрическом пространстве (M, d). □

Из приведенного доказательства следует, что справедлива также и теорема 9 из первой части [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Grishin A.F., Quynh N.V. *Azarov limit sets for Radon measures. I*// Mat. Stud. – 2015. – V.43, №1. – P. 94–99. (in Russian)
2. Grishin A.F., Malyutina T.I. *On proximate order*// Complex analysis and mathematical physics, Krasnoyarsk. – 1998. – P. 10–24. (in Russian)
3. Levin B.Ja. Distribution of zeros of entire functions. – Moscow: Tehn. Teor. Lit., 1956. – 632 p. (in Russian)
4. Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics. – Moscow: Nauka, 1979. – 320 p. (in Russian)
5. Bourbaki N. Integration. – Moscow: Nauka, 1977. – 396 p. (in Russian)
6. Landkof N.S. Foundations of modern potential theory. – Moscow: Nauka, 1966. – 515 p. (in Russian)
7. Grishin A.F., Poedintseva I.V., *Abelian and Tauberian theorems for integrals*// Algebra i Analiz. – 2014. – V.26, №3. – P. 1–88. (in Russian)
8. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. – Moscow, Leningrad: Tehn. Teor. Lit., 1949. – 448 p. (in Russian)
9. Cassels J.W.S. An introduction to diophantine approximation. – Moscow: In. Lit., 1961. – 212 p. (in Russian)

Karazin Kharkiv National University
quynhsonla1988@gmail.com

Поступило 10.11.2014