УДК 517.9

Н. В. Скрипник

СХЕМА ЧАСТИЧНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

N. V. Skripnik. *The partial averaging scheme for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side*, Mat. Stud. **43** (2015), 129–139.

In this paper the justification of possibility of application of partial averaging method on a final interval for impulse differential inclusions with the fuzzy right-hand side, containing small parameter is considered. In case of periodic right-hand side it is shown that the estimate can be specified.

Н. В. Скрипник. *Схема частичного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №2. – С.129–139.

В данной статье рассматривается обоснование возможности применения метода частичного усреднения на конечном промежутке для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр. В случае периодических правых частей показывается, что оценка может быть уточнена.

1. Введение. В 1990 году J. P. Aubin ([5]) и V. A. Baidosov ([7, 8]) ввели в рассмотрение дифференциальные включения с нечеткой правой частью, которые обобщают обыкновенные дифференциальные включения. Далее в работах [1]–[4], [9]–[16], [18] были рассмотрены различные свойства решений данных включений, а также возможность их применения при моделировании различных процессов естествознания. Так же в работе [19] показана актуальность использования импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью для моделирования многих процессов в биологии, теории управления, электронике.

В работах [21]–[24] была доказана возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр.

В данной статье рассмотрим обоснование возможности применения метода частичного усреднения на конечном промежутке для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр.

2. Основные определения. Пусть $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G) = \max\left\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\|\right\},$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 03E72, 34C27, 34A60.
Keywords: impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side; averaging method.
doi:10.15330/ms.43.2.129-139

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x — нормально, т.е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

2) x — нечетко выпукло, т.е. для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x — полунепрерывно сверху по Бэру, т.е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n\colon\ x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, \ y = 0, \\ 0, \ y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α — срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$* назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n\colon\ x(y) \geq \alpha\}$. *Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$* назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n\colon\ x(y) > 0\}$.

Теорема 1 ([20]). *Если $x \in \mathbb{E}^n$, то*

1) $[x]^\alpha \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ для всех $\alpha \in [0,1]$;

2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap_{k\geq 1} [x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha\colon \alpha \in [0,1]\}$ — семейство подмножеств $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям 1)–3), то существует $x \in \mathbb{E}^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $\alpha \in (0,1]$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D\colon \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(x, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$.

Определение 2 ([20]). Отображение $F\colon I \to \mathbb{E}^n$ называется *непрерывным на I*, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $[F(t)]^\alpha$ непрерывно.

Определение 3 ([20]). *Интегралом от отображения $F\colon I \to \mathbb{E}^n$ по множеству I* называется элемент $G \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[G]^\alpha = \int_I [F(t)]^\alpha dt$ для всех $\alpha \in (0,1]$, где интеграл от многозначного отображения $[F(t)]^\alpha$ понимается в смысле Ауманна ([6]).

Теорема 2 ([20]). *Если отображение $F\colon I \to \mathbb{E}^n$ непрерывно, то оно интегрируемо на I.*

Определение 4 ([20]). Говорят, что отображение $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ *удовлетворяет условию Липшица по x*, если существует постоянная $\lambda \geq 0$ такая, что

$$h([F(t,x)]^\alpha, [F(t,\bar{x})]^\alpha)) \leq \lambda \|x - \bar{x}\|$$

для всех $\alpha \in [0,1]$.

Определение 5. Говорят, что отображение $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ *вогнутозначно по* x, если

$$\beta[F(t,x)]^\alpha + (1-\beta)[F(t,y)]^\alpha \subset [F(t,\beta x + (1-\beta)y)]^\alpha$$

для любых $\beta \in [0,1]$ и $\alpha \in [0,1]$.

Рассмотрим дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in I \subset \mathbb{R}$ — время, $F\colon I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение.

Определение 6 ([12])**.** *α — решением включения (1) назовем абсолютно непрерывную функцию $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую включению $\dot{x} \in [F(t,x)]^\alpha,\ x(t_0) = x_0$ почти всюду на I.*

Множество всех α-решений включения (1) в момент времени t обозначим $X_\alpha(t)$. В случае, если семейство $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, оно определяет нечеткое множество $X(t)$, которое называется множеством решений включения (1) в момент времени t.

Вопросы существования множества $X(t)$ и его свойства рассматривались в работах [11, 12, 16, 17] и др.

3. Основные результаты. Рассмотрим импульсное дифференциальное включения с нечеткой правой частью

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0,\quad \Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x), \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $F\colon \mathbb{R}_+\times G \to \mathbb{E}^n$, $I_i\colon G \to \mathbb{E}^n$ — нечеткие отображения, моменты импульсов τ_i занумерованы в возрастающем порядке.

В соответствие включению (2) поставим следующее дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{y} \in \varepsilon \bar{F}(t,y),\ t \neq \sigma_s,\ y(0) = x_0,\quad \Delta y|_{t=\sigma_s} \in \varepsilon \bar{I}_s(y), \tag{3}$$

где нечеткие отображения $\bar{F}\colon \mathbb{R}_+\times G \to \mathbb{E}^n$, $\bar{I}_s\colon G \to \mathbb{E}^n$ и моменты импульсов σ_s таковы, что для любых $t \geq 0, x \in G$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \bar{F}(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\sigma_s<t+T} \bar{I}_s(x)\right) = 0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, где G выпукло, выполняются следующие условия:*

1) нечеткие отображения $F, \bar{F}\colon Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i, \bar{I}_s\colon G \to \mathbb{E}^n$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ и вогнутозначны по x;

2) равномерно относительно $t \geq 0$ и $x \in G$ существует предел (4) и

$$\frac{1}{T}\ i(t,t+T) \leq \nu, \frac{1}{T}\ s(t,t+T) \leq \nu, \nu < \infty,$$

где $i(t,t+T), s(t,t+T)$ — количество точек последовательностей τ_i, σ_s на промежутке $(t,t+T]$;

3) для любых $x_0 \in G' \subset G$, $t \geq 0$ и $\varepsilon \in (0,\sigma]$ α — решения включения (3) вместе с ρ-окрестностью принадлежат области G для всех $\alpha \in [0,1]$.

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0(\eta, L) \in (0,\sigma]$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$D(X(t), Y(t)) < \eta, \tag{5}$$

где $X(t)$ — множество решений включения (2), $Y(t)$ — множество решений включения (3).

Доказательство. В силу условий теоремы множества решений включений (2) и (3) существуют ([19]). Выберем произвольное $\alpha \in [0,1]$. Для начала докажем справедливость включения $[X(t)]^\alpha \subset [Y(t)]^\alpha + S_\eta(0)$, где $S_\eta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| \leq \eta\}$ — шар радиуса η с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $x(t)$ — решение включения

$$\dot{x} \in \varepsilon[F(t,x)]^\alpha,\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0,\quad \Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon[I_i(x)]^\alpha. \tag{6}$$

Разобъем промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом $\gamma(\varepsilon)$ таким, что $\gamma(\varepsilon) \to \infty$ и $\varepsilon\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (в качестве $\gamma(\varepsilon)$ можно выбрать, например, $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$). Тогда найдутся измеримый селектор $u(t)$ многозначного отображения $[F(t,x(t))]^\alpha$ и векторы $q_i \in [I_i(x(\tau_i))]^\alpha$ такие, что

$$x(t) = x(t_j) + \varepsilon\int_{t_j}^{t} u(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \leq \tau_i < t} q_i,\ t \in (t_j, t_{j+1}],\ x(0) = x_0, \tag{7}$$

где $t_j = j\gamma(\varepsilon),\ j = \overline{0,m},\ m\gamma(\varepsilon) \leq L\varepsilon^{-1} < (m+1)\gamma(\varepsilon)$.

Рассмотрим функцию

$$x^1(t) = x^1(t_j) + \varepsilon\int_{t_j}^{t} u_j(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \leq \tau_i < t} q_{ij},\ t \in (t_j, t_{j+1}],\ x^1(0) = x_0, \tag{8}$$

где измеримый селектор $u_j(t)$ многозначного отображения $[F(t,x^1(t_j))]^\alpha$ и векторы $q_{ij} \in [I_i(x^1(t_j))]^\alpha$ удовлетворяют условиям

$$\|u_j(t) - u(t)\| = \min_{u \in [F(t,x^1(t_j))]^\alpha} \|u - u(t)\|,\ \|q_{ij} - q_i\| = \min_{q \in [I_i(x^1(t_j))]^\alpha} \|q - q_i\|. \tag{9}$$

Обозначим через $\delta_j = \|x(t_j) - x^1(t_j)\|$. При $t \in (t_j, t_{j+1}]$ используя (7) и (8), имеем

$$\begin{gathered}\|x(t) - x(t_j)\| \leq M_1\varepsilon(t - t_j) \leq M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon),\\ \|x^1(t) - x^1(t_j)\| \leq M_1\varepsilon(t - t_j) \leq M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon),\ M_1 = M(1+\nu).\end{gathered} \tag{10}$$

Следовательно, при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ выполняются следующие неравенства

$$\begin{gathered}\|x(t) - x^1(t_j)\| \leq \|x(t_j) - x^1(t_j)\| + \|x(t) - x(t_j)\| \leq \delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j),\ \|u(t) - u_j(t)\| \leq\\ \leq h([F(t,x(t))]^\alpha,\ \ [F(t,x^1(t_j))]^\alpha \leq \lambda\|x(t) - x^1(t_j)\| \leq \lambda(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)),\\ \|q_i - q_{ij}\| \leq h([I_i(x(\tau_i))]^\alpha, [I_i(x^1(t_j))]^\alpha) \leq \lambda\|x(\tau_i) - x^1(t_j)\| \leq\\ \leq \lambda(\delta_j + \varepsilon M_1(\tau_i - t_j)) \leq \lambda(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)).\end{gathered} \tag{11}$$

В силу (7), (8) и (11) получаем

$$\delta_{j+1} \le \delta_j + \varepsilon\lambda \left(\delta_j \gamma(\varepsilon) + \varepsilon M_1 \frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2}\right) + \nu\varepsilon\lambda\gamma(\varepsilon)\left(\delta_j + \varepsilon M_1 \gamma(\varepsilon)\right) \le$$
$$\le (1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))\delta_j + \lambda_1 M_1 \varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon), \qquad (12)$$

где $\lambda_1 = \lambda(1+\nu)$.

Из неравенств (12), принимая во внимание, что $\delta_0 = 0$, получаем

$$\delta_1 \le \lambda_1 M_1 \varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon), \quad \delta_2 \le (1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))\delta_1 + \lambda_1 M_1\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon) \le \lambda_1 M_1 \varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)((1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))+1),$$

и т.д.

$$\delta_{j+1} \le \lambda_1 M_1\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)((1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^i + (1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{i-1} + \ldots + 1) = M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)\times$$
$$\times\left((1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{i+1} - 1\right) \le M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)\left((1+\lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{\frac{L}{\varepsilon\gamma(\varepsilon)}} - 1\right) \le M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)(e^{\lambda_1 L} - 1). \qquad (13)$$

Учитывая неравенства (10), справедлива оценка

$$\|x(t) - x^1(t)\| \le \|x(t) - x(t_j)\| + \|x(t_j) - x^1(t_j)\| + \|x^1(t_j) - x^1(t)\| \le$$
$$\le 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)(e^{\lambda_1 L} - 1) \le M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)(e^{\lambda_1 L} + 1). \qquad (14)$$

Из условия 2) теоремы следует, что для любого $\eta_1 > 0$ существует $\varepsilon_1(\eta_1) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_1(\eta_1)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\gamma(\varepsilon)} h\Bigg(\int_{t_j}^{t_{j+1}} [F(s, x^1(t_j))]^\alpha ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} [I_i(x^1(t_j))]^\alpha,$$
$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [\bar F(s, x^1(t_j))]^\alpha ds + \sum_{t_j \le \sigma_s < t_{j+1}} [\bar I_s(x^1(t_j))]^\alpha\Bigg) < \eta_1. \qquad (15)$$

Таким образом, существуют измеримый селектор $v_j(t) \in [\bar F(t, x^1(t_j))]^\alpha$ и векторы $p_{sj} \in [\bar I_s(x^1(t_j))]^\alpha$ такие, что

$$\frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u_j(s) - v_j(s))ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} q_{ij} - \sum_{t_j \le \sigma_s < t_{j+1}} p_{sj} \right\| < \eta_1. \qquad (16)$$

Рассмотрим функцию

$$y^1(t) = y^1(t_j) + \varepsilon \int_{t_j}^{t} v_j(s)ds + \varepsilon \sum_{t_j \le \sigma_s < t} p_{sj}, \ t \in (t_j, t_{j+1}], \ y^1(0) = x_0. \qquad (17)$$

Из (8), (17) и (16), учитывая, что $x^1(0) = y^1(0)$ при $j = \overline{1, m}$ имеем

$$\|x^1(t_j) - y^1(t_j)\| \le \|x^1(t_{j-1}) - y^1(t_{j-1})\| + \eta_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) \le \ldots \le j\eta_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) \le L\eta_1. \qquad (18)$$

Так как при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ $\|y^1(t) - y^1(t_j)\| \le M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)$, то, учитывая неравенства (10) и (18), получаем

$$\|y^1(t) - x^1(t)\| \le L\eta_1 + 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon), \quad \|y^1(t) - x^1(t_j)\| \le L\eta_1 + M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon). \qquad (19)$$

Покажем, что существует решение $y(t)$ включения

$$\dot{y} \in \varepsilon[\bar{F}(t,y)]^\alpha,\ t \neq \sigma_s,\ y(0) = x_0, \quad \Delta y|_{t=\sigma_s} \in \varepsilon[\bar{I}_s(y)]^\alpha \tag{20}$$

достаточно близкое к $y^1(t)$.

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — моменты импульсов σ_s, попадающие в промежуток $(t_j, t_{j+1}]$. Для удобства обозначим $\theta_0 = t_j$, $\theta_{p+1} = t_{j+1}$. Пусть $\mu_k^+ = \|x^1(\theta_k + 0) - x(\theta_k + 0)\|$, $\mu_k^- = \|x^1(\theta_k) - x(\theta_k)\|$, $k = \overline{0, p+1}$.

Пусть $\rho(x, A)$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Используя условие Липшица, имеем

$$\rho\left(\dot{y}^1(t), \varepsilon[\bar{F}(t, y^1(t))]^\alpha\right) \leq \varepsilon h\left([\bar{F}(t, x^1(t_j))]^\alpha, [\bar{F}(t, y^1(t))]^\alpha\right) \leq$$
$$\leq \varepsilon\lambda\|x^1(t_j) - y^1(t)\| \leq \varepsilon\lambda(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1) = \eta^*.$$

В силу теоремы А.Ф.Филиппова между точками импульсов существует решение $y(t)$ включения (20) такое, что при $t \in (\theta_k, \theta_{k+1}]$ справедливо неравенство $\|y(t) - y^1(t)\| \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda(t-\theta_k)} + \int_{\theta_k}^t e^{\varepsilon\lambda(t-s)}\eta^* ds$.

Обозначим через $\gamma_k = \theta_{k+1} - \theta_k \leq \gamma(\varepsilon)$, $\gamma_0 + \ldots + \gamma_p = \gamma(\varepsilon)$. Тогда

$$\mu_{k+1}^- \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma_k} - 1\right). \tag{21}$$

При переходе через точку импульса выберем $\Delta y|_{t=\theta_{k+1}} \in \varepsilon[\bar{I}_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha$ $(\theta_{k+1} = \sigma_s)$ такое, чтобы $\|\Delta y|_{t=\theta_{k+1}} - \Delta y^1|_{t=\theta_{k+1}}\| = \rho\left(\Delta y^1|_{t=\theta_{k+1}}, \varepsilon[\bar{I}_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha\right)$.

Тогда

$$\mu_{k+1}^+ \leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left([\bar{I}_s(x^1(t_j))]^\alpha, [\bar{I}_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) \leq$$
$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left([\bar{I}_s(y^1(\theta_{k+1}))]^\alpha, [\bar{I}_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) + \varepsilon h\left([\bar{I}_s(x^1(t_j))]^\alpha, [\bar{I}_s(y^1(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) \leq$$
$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left([\bar{I}_s(x^1(t_j))]^\alpha, [\bar{I}_s(y^1(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) \leq (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- +$$
$$+\varepsilon\lambda\|x^1(t_j) - y^1(\theta_{k+1})\| \leq (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1) = (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \eta^*. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что $\mu_{k+1}^+ \leq \alpha_k\mu_k^+ + \beta_k$, $\alpha_k = (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_k}$,

$$\beta_k = \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(1+\varepsilon\lambda)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma_k} - 1\right) + \eta^* = \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}\left((1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma_k} - 1\right) = \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\alpha_k - 1).$$

Таким образом, $\mu_1^+ \leq \alpha_0\mu_0^+ + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\alpha_0 - 1)$,

$$\mu_2^+ \leq \alpha_1\mu_1^+ + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\alpha_1 - 1) \leq \alpha_1\alpha_0\mu_0^+ + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\alpha_1(\alpha_0 - 1) + (\alpha_1 - 1)) = \alpha_1\alpha_0\mu_0^+ + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\alpha_1\alpha_0 - 1),$$

и т.д.

$$\mu_{k+1}^+ \leq \alpha_k\alpha_{k-1}\cdot\ldots\cdot\alpha_0\mu_0^+ + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\alpha_k\alpha_{k-1}\cdot\ldots\cdot\alpha_0 - 1) = e^{\lambda\varepsilon(\gamma_k+\ldots+\gamma_0)}(1+\varepsilon\lambda)^{k+1}\mu_0^+ +$$
$$+\frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}\left(e^{\lambda\varepsilon(\gamma_k+\ldots+\gamma_0)}(1+\varepsilon\lambda)^{k+1} - 1\right) \leq e^{\lambda(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}\left(e^{\lambda\varepsilon(1+\nu)\gamma(\varepsilon)} - 1\right) = \kappa\mu_0^+ + \beta,$$

где $\kappa = e^{\lambda(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}$, $\beta = \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(\kappa - 1)$.

Следовательно, $\delta_{j+1}^+ = \|y(t_{j+1}) - y^1(t_{j+1})\| \leq \kappa\delta_j^+ + \beta$.

Получаем следующую последовательность оценок $\delta_0^+ = 0,\ \delta_1^+ \le \beta,\ \delta_2^+ \le \kappa\beta + \beta = (\kappa+1)\beta, \ldots,$

$$\delta_{j+1}^+ \le (\kappa^j + \ldots + 1)\beta = \frac{\kappa^{j+1}-1}{\kappa-1}\beta \le \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}(e^{\lambda L(1+\nu)}-1) = (e^{\lambda L(1+\nu)}-1)(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1).$$

Поэтому при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$\|y(t)-y^1(t)\| \le \|y(t)-y(t_j)\| + \|y(t_j)-y^1(t_j)\| + \|y^1(t)-y^1(t_j)\| \le$$
$$\le 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+(e^{\lambda L(1+\nu)}-1)(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1) = M_1(e^{\lambda L(1+\nu)}+1)\varepsilon\gamma(\varepsilon)+(e^{\lambda L(1+\nu)}-1)L\eta_1. \quad (23)$$

В силу неравенств (14), (19) и (23) получаем, что $\|x(t)-y(t)\|$ может быть сделано меньше η за счет выбора $\varepsilon \le \varepsilon_0$ и η_1.

Справедливость включения $[Y(t)]^\alpha \subset [X(t)]^\alpha + S_\eta(0)$ доказывается аналогично. □

Если нечеткие отображения $F(t,x), \bar F(t,x)$ и $I_i(x), \bar I_s(x)$ периодичны по t, можно получить более точную оценку.

Теорема 4. *Пусть в области $Q = \{t \ge 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, где G выпукло, выполняются следующие условия:*

1) нечеткие многозначные отображения $F, \bar F\colon Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i, \bar I_s\colon G \to \mathbb{E}^n$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ;

2) нечеткие многозначные отображения $F(t,x), \bar F(t,x)$ 2π-периодичны по t и существуют такие $\nu, \bar\nu \in \mathbb{N}$, что для всех $i \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $\tau_{i+\nu} = \tau_i + 2\pi,\ \sigma_{s+\bar\nu} = \sigma_s + 2\pi,\ I_{i+\nu}(x) \equiv I_i(x),\ \bar I_{s+\bar\nu}(x) \equiv \bar I_s(x)$;

3) для любых $x_0 \in G' \subset G,\ t \ge 0$ и $\varepsilon \in (0,\sigma]$ α-решения включения (3) вместе с некоторой ρ-окрестностью принадлежат области G.

Тогда для любого $L > 0$ существуют $\varepsilon^0(L) \in (0,\sigma]$ и $C(L) > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$D(X(t), Y(t)) \le C\varepsilon, \quad (24)$$

где $X(t)$ — множество решений включения (2), $Y(t)$ — множество решений включения (3).

Доказательство. В силу условий теоремы множества решений включений (2) и (3) существуют ([19]). Выберем произвольное $\alpha \in [0,1]$. Для начала докажем справедливость включения

$$[X(t)]^\alpha \subset [Y(t)]^\alpha + S_{C\varepsilon}(0). \quad (25)$$

Пусть $x(t)$ — решение включения (20). Разобъем промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом 2π точками $t_j = 2\pi j,\ j = \overline{0,m}$, где $m\colon\ t_m \le L\varepsilon^{-1} < t_{m+1}$. Тогда найдутся измеримый селектор $u(t)$ многозначного отображения $[F(t,x(t))]^\alpha$ и векторы $q_i \in [I_i(x(\tau_i))]^\alpha$ такие, что

$$x(t) = x(t_j) + \varepsilon\int_{t_j}^t u(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} q_i,\ t \in (t_j, t_{j+1}],\ x(0) = x_0. \quad (26)$$

Рассмотрим функцию

$$x^1(t) = x^1(t_j) + \varepsilon \int_{t_j}^{t} u_j(s)ds + \varepsilon \sum_{t_j \le \tau_i < t} q_{ij}, \ t \in (t_j, t_{j+1}], \ x^1(0) = x_0, \tag{27}$$

где измеримый селектор $u_j(t)$ многозначного отображения $[F(t, x^1(t_j))]^\alpha$ и векторы $q_{ij} \in [I_i(x^1(t_j))]^\alpha$ удовлетворяют условиям (9).

Обозначим через $\delta_j = \|x(t_j) - x^1(t_j)\|$. При $t \in (t_j, t_{j+1}]$ используя (7) и (8), имеем

$$\|x(t) - x(t_j)\| \le \varepsilon M_1(t - t_j) \le 2\pi M_1 \varepsilon, \ \|x^1(t) - x^1(t_j)\| \le \varepsilon M_1(t - t_j) \le 2\pi M_1 \varepsilon, M_1 = M(1+\nu). \tag{28}$$

Следовательно, при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ выполняются следующие неравенства

$$\begin{gathered} \|x(t) - x^1(t_j)\| \le \|x(t_j) - x^1(t_j)\| + \|x(t) - x(t_j)\| \le \delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j), \ \|u(t) - u_j(t)\| \le \\ \le h\left([F(t, x(t))]^\alpha, [F(y, x^1(t_j))]^\alpha\right) \le \lambda \|x(t) - x^1(t_j)\| \le \lambda(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)), \\ \|q_i - q_{ij}\| \le h\left([I_i(x(\tau_i))]^\alpha, [I_i(x^1(t_j))]^\alpha\right) \le \lambda \|x(\tau_i) - x^1(t_j)\| \le \\ \le \lambda(\delta_j + \varepsilon M_1(\tau_i - t_j)) \le \lambda(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)). \end{gathered} \tag{29}$$

В силу (7), (8) и (11) получаем

$$\delta_{j+1} \le \delta_j + \varepsilon\lambda\left(2\pi\delta_j + 2\pi^2 M_1 \varepsilon\right) + 2\pi\varepsilon d\lambda\left(\delta_j + 2\pi M_1 \varepsilon\right) l \le (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)\delta_j + 4\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2, \tag{30}$$

где $\lambda_1 = \lambda(1 + d)$.

Из неравенств (30), принимая во внимание, что $\delta_0 = 0$, получаем

$$\delta_1 \le 4\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2, \quad \delta_2 \le (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)\delta_1 + 4\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2 \le 4\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon) + 1),$$

и т.д.

$$\begin{gathered} \delta_{j+1} \le 4\pi^2\lambda_1 M_1 \varepsilon^2((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^i + (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{i-1} + \ldots + 1) = \\ = 2\pi M_1 \varepsilon\left((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{i+1} - 1\right) \le 2\pi M_1 \varepsilon\left((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{\frac{L}{2\pi\varepsilon}} - 1\right) \le 2\pi M_1\varepsilon(e^{\lambda_1 L} - 1). \end{gathered} \tag{31}$$

Учитывая неравенства (10), справедлива оценка

$$\begin{gathered} \|x(t) - x^1(t))\| \le \|x(t) - x(t_j)\| + \|x(t_j) - x^1(t_j)\| + \|x^1(t_j) - x^1(t)\| \le \\ \le 4\pi M_1 \varepsilon + 2\pi M_1 \varepsilon(e^{\lambda_1 L} - 1) \le 2\pi M_1 \varepsilon(e^{\lambda_1 L} + 1). \end{gathered} \tag{32}$$

Из условия 2) теоремы следует, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [F(s, x^1(t_j))]^\alpha ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} [I_i(x^1(t_j))]^\alpha = \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\bar{F}(s, x^1(t_j))]^\alpha ds + \sum_{t_j \le \sigma_s < t_{j+1}} [\bar{I}_s(x^1(t_j))]^\alpha, \tag{33}$$

поэтому существуют измеримый селектор $v_j(t) \in [\bar{F}(t, x^1(t_j))]^\alpha$ и $p_{sj} \in [\bar{I}_s(x^1(t_j))]^\alpha$ такие, что

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} u_j(s)ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} q_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j(s)ds + \sum_{t_j \le \sigma_s < t_{j+1}} p_{sj}. \tag{34}$$

Рассмотрим отображение

$$y^1(t) = y^1(t_j) + \varepsilon \int_{t_j}^{t} v_j(s)ds + \varepsilon \sum_{t_j \le \sigma_s < t} p_{sj},\ t \in (t_j, t_{j+1}],\ y^1(0) = x_0. \tag{35}$$

Из (27), (35) и (34), учитывая, что $x^1(0) = y^1(0)$, при $j = \overline{1,m}$ имеем

$$x^1(t_j) = y^1(t_j),\ \|y^1(t) - y^1(t_j)\| \le \varepsilon M(1+\bar\nu)(t-t_j) \le 2\pi \bar M_1 \varepsilon,\ \bar M_1 = M(1+\bar\nu), \tag{36}$$
$$\|y^1(t) - x^1(t)\| \le \varepsilon M_1(t-t_j) + \varepsilon \bar M_1 (t-t_j) \le 2\pi(M_1 + \bar M_1)\varepsilon.$$

Покажем, что существует решение $y(t)$ включения (20) достаточно близкое к $y^1(t)$.

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_{\bar\nu}$ — моменты импульсов σ_s, попадающие в промежуток $(t_j, t_{j+1}]$. Для удобства обозначим $\theta_0 = t_j$, $\theta_{\bar\nu+1} = t_{j+1}$. Пусть $\mu_k^+ = \|x^1(\theta_k+0) - x(\theta_k+0)\|$, $\mu_k^- = \|x^1(\theta_k) - x(\theta_k)\|$, $k = \overline{0, \bar\nu+1}$.

Используя условие Липшица, имеем $\rho(\dot y^1(t), \varepsilon[\bar F(t, y^1(t))]^\alpha) \le \varepsilon h([\bar F(t, x^1(t_j))]^\alpha, [\bar F(t, y^1(t))]^\alpha) \le \varepsilon\lambda \|y^1(t) - x^1(t_j)\| \le 2\pi\lambda \bar M_1 \varepsilon^2 = \eta^*$.

В силу теоремы А. Ф. Филиппова между точками импульсов существует решение $y(t)$ включения (20) такое, что при $t \in (\theta_k, \theta_{k+1}]$ справедливо неравенство $\|y(t) - y^1(t)\| \le \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda(t-\theta_k)} + \int_{\theta_k}^t e^{\varepsilon\lambda(t-s)}\eta^* ds$.

Обозначим через $\gamma_k = \theta_{k+1} - \theta_k \le 2\pi,\ \gamma_0 + \ldots + \gamma_p = 2\pi$. Тогда

$$\mu_{k+1}^- \le \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} + \frac{\eta^*}{\lambda\varepsilon}\left(e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} - 1\right). \tag{37}$$

При переходе через точку импульса выберем $\Delta y|_{t=\theta_{k+1}} \in \varepsilon[\bar I_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha$ $(\theta_{k+1} = \sigma_s)$ такие, чтобы $\|\Delta y|_{t=\theta_{k+1}} - \Delta y^1|_{t=\theta_{k+1}}\| = \rho\left(\Delta y^1|_{t=\theta_{k+1}}, \varepsilon[\bar I_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}^+ &\le \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left([\bar I_s(x^1(t_j))]^\alpha, [\bar I_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) \le \\ &\le \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left([\bar I_s(y^1(\theta_{k+1}))]^\alpha, [\bar I_s(y(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) + \varepsilon h\left([\bar I_s(x^1(t_j))]^\alpha, [\bar I_s(y^1(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) \le \\ &\le \mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left([\bar I_s(x^1(t_j))]^\alpha, [\bar I_s(y^1(\theta_{k+1}))]^\alpha\right) \le \\ &\le (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\|x^1(t_j) - y^1(\theta_{k+1})\| \le (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + 2\pi\lambda\bar M_1\varepsilon^2 = \\ &= (1+\varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \eta^*. \end{aligned} \tag{38}$$

Из (21) и (22) следует, что $\mu_{k+1}^+ \le \alpha_k \mu_k^+ + \beta_k,\ \alpha_k = (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_k}$,

$$\beta_k = 2\pi\bar M_1\varepsilon(1+\varepsilon\lambda)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma_k} - 1\right) + 2\pi\lambda\bar M_1\varepsilon^2 = 2\pi\bar M_1\varepsilon\left((1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma_k} - 1\right) = 2\pi\bar M_1\varepsilon(\alpha_k - 1).$$

Таким образом, $\mu_1^+ \le \alpha_0\mu_0^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon(\alpha_0 - 1)$, $\mu_2^+ \le \alpha_1\mu_1^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon(\alpha_1 - 1) \le \alpha_1\alpha_0\mu_0^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon(\alpha_1(\alpha_0 - 1) + (\alpha_1 - 1)) = \alpha_1\alpha_0\mu_0^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon(\alpha_1\alpha_0 - 1)$, и т.д.

$$\mu_{k+1}^+ \le \alpha_k\alpha_{k-1}\cdot\ldots\cdot\alpha_0\mu_0^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon(\alpha_k\alpha_{k-1}\cdot\ldots\cdot\alpha_0 - 1) =$$

$$= e^{\lambda\varepsilon(\gamma_k+\ldots+\gamma_0)}(1+\varepsilon\lambda)^{k+1}\mu_0^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon\left(e^{\lambda\varepsilon(\gamma_k+\ldots+\gamma_0)}(1+\varepsilon\lambda)^{k+1} - 1\right) \le$$

$$\le e^{2\pi\lambda(1+\bar\nu)\varepsilon}\mu_0^+ + 2\pi\bar M_1\varepsilon\left(e^{2\pi\lambda(1+\bar\nu)\varepsilon} - 1\right) = \kappa\mu_0^+ + \beta,$$

где $\kappa = e^{2\pi\lambda(1+\bar\nu)\varepsilon}$, $\beta = 2\pi\bar M_1\varepsilon(\kappa - 1)$.

Следовательно, $\delta_{j+1}^+ = \|y(t_{j+1}) - y^1(t_{j+1})\| \le \kappa\delta_j^+ + \beta$.

Получаем следующую последовательность оценок $\delta_0^+ = 0$, $\delta_1^+ \le \beta$, $\delta_2^+ \le \kappa\beta + \beta = (\kappa+1)\beta, \dots, \delta_{j+1}^+ \le (\kappa^j + \ldots + 1)\beta = \frac{\kappa^{j+1}-1}{\kappa-1}\beta \le 2\pi\bar{M}_1\varepsilon(e^{\lambda L(1+\bar{\nu})} - 1) = 2\pi\bar{M}_1\varepsilon(e^{\lambda L(1+\bar{\nu})} - 1)$. Таким образом, при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\|y(t) - y^1(t)\| &\le \|y(t) - y(t_j)\| + \|y(t_j) - y^1(t_j)\| + \|y^1(t) - y^1(t_j)\| \le \\ &\le 2\pi\bar{M}_1\varepsilon + 2\pi\bar{M}_1\varepsilon + 2\pi\bar{M}_1\varepsilon(e^{\lambda L(1+\bar{\nu})} - 1) = 2\pi\bar{M}_1\varepsilon(e^{\lambda L(1+\bar{\nu})} + 1).\end{aligned} \tag{39}$$

В силу неравенств (32), (36) и (39) получаем, что $\|x(t) - y(t)\| \le C_1\varepsilon$, где $C_1 = 2\pi M_1\varepsilon(e^{\lambda_1 L} + 2) + 2\pi\bar{M}_1(e^{\lambda L(1+\bar{\nu})} + 2)$ и справедливость включения (25) доказана.

Аналогично доказывается справедливость включения $[Y(t)]^\alpha \subset [X(t)]^\alpha + S_{C_2\varepsilon}(0)$. Выбирая $C = \max(C_1, C_2)$, получаем справедливость утверждения теоремы. □

4. Заключение. Требование вогнутозначности правых частей исходного и усредненного включений является достаточно сильным и необходимо для обеспечения выпуклости множеств α-решений исходного и усредненного включений для любого $\alpha \in [0,1]$. Если решение рассматривать в пространстве Σ^n отображений $x\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям 1), 3) и 4) из определения пространства $\mathbb{E}^n$, то требование вогнутозначности можно отбросить, при этом утверждения теорем останутся в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abbasbandy S., Viranloo T.A., Lopez-Pouso O., Nieto J.J. *Numerical methods for fuzzy differential inclusions*// Computers Math. Appl. – 2004. – V.48. – P. 1633–1641.
2. Agarwal R.P., O'Regan D., Lakshmikantham V. *A stacking theorem approach for fuzzy differential equations*// Nonlinear Anal. – 2003. – V.55. – P. 299–312.
3. Agarwal R.P., O'Regan D., Lakshmikantham V. *Maximal solutions and existence theory for fuzzy differential and integral equations*// J. Appl. Analysis. – 2005. – V.11, №2. – P. 171–186.
4. Antonelli P.L., Krivan V. *Fuzzy differential inclusions as substitutes for stochastic differential equations in population biology*// Open Systems Information Dynamics. – 1992. – V.1, №2. – P. 217–232.
5. Aubin J.-P. *Fuzzy differential inclusions*// Problems of control and information theory. – 1990.– V.19, №1. – P. 55–67.
6. Aumann R.J. *Integrals of set-valued functions*// J. Math. Anal. Appl. – 1965. – №12. – P. 1–12.
7. Baĭdosov V.A. *Differential inclusions with fuzzy right-hand side*// Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1989. – V.309, №4. – P. 781–783. (in Russian)
8. Baĭdosov V.A. *Fuzzy differential inclusions*// Prikl. Mat. Mekh. – 1990. – V.54, №1. – P. 12–17. (in Russian)
9. Colombo G., Krivan V. *Fuzzy differential inclusions and nonprobabilistic likelihood*// S.I.S.S.A preprint 88/91/M.
10. Guo M., Xue X., Li R. *Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models*// Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – V.138. – P. 601–615.
11. Hullermeier E. *Towards modelling of fuzzy functions*// EUFIT'95. – 1995. – P. 150–154.
12. Hullermeier E. *An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system*// Internat. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems. – 1997. – №7. – P. 117–137.
13. Hullermeier E. *A fuzzy simulation method*// First International ICSC Symposium on Intelligent Industrial Automation (IIA'96) and Soft Computing (SOCO'96). – Reading, United Kingdom, 1996.
14. Laksmikantham V. *Set differential equations versus fuzzy differential equations*// Applied Mathematics and Computation. – 2005. – V.164. – P. 277–294.
15. Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J. Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge Scientific Publishers, 2006.

16. Laksmikantham V., Mohapatra R.N. Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor and Francis Publishers, 2003 – 178 p.
17. Laksmikantham V., Tolstonogov A.A. *Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations*// Nonlinear Analysis. – 2003. – V.55. – P. 255–268.
18. Majumdar K.K., Majumder D.D. *Fuzzy differential inclusions in atmospheric and medical cybernetics*// IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics. – 2004. – V.34, №2. – P. 877–887.
19. Mengshu Guo, Xiaoping Xue, Ronglu Li *Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models*// Fuzzy sets and system. – 2003. – V.138. – P. 601–615.
20. Park J.Y., Han H.K. *Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations*// Internat. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – V.22, №2. – P. 271–279.
21. Plotnikov A.V., Komleva T.A., Plotnikova L.I. *On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent*// Iranian J. Optimization. – 2010. – V.2, №3. – P. 506–517.
22. Plotnikov A.V. *Averaging of fuzzy integrodifferential inclusions*// Intern. J. Control Sci. Engineering. – 2011. – V.1, №1. – P. 8–14.
23. Plotnikov A.V., Komleva T.A. *Full averaging of control fuzzy integrodifferential inclusions with terminal criterion of quality*// Intern. J. Control Sci. Engineering. – 2013. – V.3, №2. — P. 68–72.
24. Plotnikov A.V. *Averaging of fuzzy controlled differential inclusions with terminal criterion of quality*// Nonlin. Oscill. – 2013. – V.16, №1. – P. 105–110. (in Russian)

Odessa I. I. Mechnikov National University
talie@ukr.net

Поступило 26.02.2014