УДК 512.552.13

І. С. Васюник, О. В. Домша

ДРОБОВО-НАПІВЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ

I. S. Vasiunyk, O. V. Domsha. *Fractionally-semilocal Bezout rings*, Mat. Stud. **43** (2015), 140–143.

It is proved that a fractionally-semilocal Bezout ring has stable range 3. It is proved that a fractionally-semilocal Bezout ring of stable range 2 is an elementary divisors ring. PM-ring which is a fractionally-semilocal Bezout ring is an elementary divisor ring.

И С. Васюнык, О В. Домша. *Дробно-полулокальные кольца Безу* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №2. – С.140–143.

Доказано, что стабильный ранг дробно-полулокальных колец Безу равен 3. Доказано, что дробно-полулокальное кольцо Безу стабильного ранга 2 является кольцом элементарных делителей. PM-кольцо, являющееся дробно-полулокальным кольцом Безу — кольцо элементарных делителей.

Метою даної статті є дослідження структури дробово-напівлокальних кілець Безу. У статті обчислено стабільний ранг дробово-напівлокального кільця Безу. Доведено, що дробово-напівлокальне кільце Безу стабільного рангу 2 є кільцем елементарних дільників. А також описано розклад головних ідеалів в скінченний добуток ко-максимальних ідеалів з деякими обмеженнями.

Під кільцем R розуміємо комутативне кільце з $1 \neq 0$. Позначимо через R_n кільце всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами з кільця R. *Нільрадикал* кільця R позначимо через $\operatorname{rad}(R)$.

Нехай P — деяка кільцева властивість, зокрема, у нашому випадку: P — властивість кільця бути напівлокальним. Згідно з означенням Вамоша, кільце R є дробово P, якщо класичне кільце дробів $Q(R/I)$ кільця R/I має властивість P для будь-якого ідеала I. Для прикладу, довільне нетерове кільце є дробово-напівлокальним. Очевидним прикладом дробово-напівлокального кільця є кільце, в якому довільний головний ідеал містить тільки скінченне число мінімальних простих ідеалів. Прикладами таких кілець є кільця з нетеровим спектром.

Матриця $A = (a_{ij})$ розміру $n \times m$ називається *діагональною*, якщо $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$. Скажемо, що матриця A над кільцем R *володіє діагональною редукцією*, якщо існують такі оборотні матриці P і Q відповідних розмірів, що PAQ є діагональною матрицею ([1]). Вслід за І. Капланським ([1]), скажемо, що кільце R є *кільцем елементарних дільників*, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією.

Під *кільцем Безу* розуміємо кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним. Рядок $(a_1, \ldots, a_n)$ над кільцем R називається *унімодулярним*, якщо $a_1R +$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 06F20, 13F99.
Keywords: fractionally-semilocal rings; stable range.
doi:10.15330/ms.43.2.140-143

© І. С. Васюник, О. В. Домша, 2015

$\ldots + a_nR = R$. Скажемо, що кільце R має *стабільний ранг* n, якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ існують такі елементи $b_1, \ldots, b_n$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним. Всі інші необхідні означення і факти можна знайти в [2,3].

Доведемо, що стабільний ранг (ст.р.) дробово-напівлокального кільця не перевищує 3, тобто, що справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай R — дробово-напівлокальне кільце Безу. Тоді стабільний ранг R не перевищує 3.*

Доведення. Нехай $a, b, c, d \in R$ такі, що $aR + bR + cR + dR = R$, а $\overline{R} = R/\operatorname{rad}(aR)$, де $\operatorname{rad}(aR)$ — нільрадикал ідеалу aR. Оскільки, $Q(\overline{R})$ — напівлокальне, то $\overline{R}$ є напівспадковим ([4]) і ст.р.$(R) =$ ст.р.$(\overline{R})$, звідки маємо, що стабільний ранг $\overline{R}$ дорівнює 2. Оскільки $\overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} + \overline{d}\overline{R} = \overline{R}$ і ст.р.$(\overline{R}) = 2$, то $(\overline{b} + \overline{d}\overline{x})\overline{R} + (\overline{c} + \overline{d}\overline{y})\overline{R} = \overline{R}$ для деяких $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{R}$.

Стверджуємо, що $(a + d \cdot 0)R + (b + d \cdot x)R + (c + d \cdot y)R = R$. Якщо би це було не так, то існував би максимальний ідеал M кільця R такий, що $a, b + dx, c + dy \in M$. Але, тоді, ідеал $M/\operatorname{rad}(aR)$ є максимальним ідеалом $\overline{R}$, який містить $\overline{b} + \overline{d}\overline{x}$ і $\overline{c} + \overline{d}\overline{y}$, що не можливо, оскільки $(\overline{b} + \overline{d}\overline{x})\overline{R} + (\overline{c} + \overline{d}\overline{y})\overline{R} = \overline{R}$. Отже, $(a + d \cdot 0)R + (b + d \cdot x)R + (c + d \cdot y)R = R$. Оскільки, всі можливі випадки розглянуто, то нерівність ст.р.$(R) \leq 3$ доведено. $\square$

Теорема 2. *Дробово-напівлокальне кільце Безу стабільного рангу 2 є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай R — дробово-напівлокальне кільце Безу стабільного рангу 2. Для доведення теореми достатньо переконатися, що модуль M визначений матрицею $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$, є прямою сумою циклічних. Легко перевірити, що M є $R/\operatorname{rad}(acR)$-модуль. Нехай $J = \operatorname{rad}(acR)$. Оскільки, R — дробово-напівлокальне, то кільце $\overline{R} = R/J$ — напівспадкове. Отже, $\overline{M} = M/J$ є модулем визначеним матрицею $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ \overline{b} & \overline{c} \end{pmatrix}$.

Оскільки, $\overline{R}$ — напівспадкове і $\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{0}$, то існує такий ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$, що $\overline{a} = \overline{e} \cdot \overline{a}$ і $\overline{b} = (\overline{1} - \overline{e}\overline{b})$. Легко побачити, що $\overline{M}\overline{e}$ — визначений матрицею $\overline{e}\overline{A}$, як $\overline{e}\overline{R}$-модуль і $\overline{M}(\overline{1} - \overline{e})$ — визначений матрицею $(\overline{1} - \overline{e})\overline{A}$ як $(\overline{1} - \overline{e})\overline{R}$ гомоморфний образ $\overline{R}$. Отже, вони є кільцями Ерміта, а, тому, існують зворотні матриці $\overline{P_1} \in M_2(\overline{e}\overline{R})$ і $\overline{Q_1} \in M_2((\overline{1} - \overline{e})\overline{R})$ такі, що $\overline{P_1}\overline{e}\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{s} & \overline{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $(\overline{1} - \overline{e})\overline{AQ_1} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & \overline{t} \end{pmatrix}$.

Покладемо $\overline{P} = (\overline{1} - \overline{e})\overline{E} + \overline{P_1}$, і $\overline{Q} = \overline{e}\overline{E} + \overline{P_1}$, де $\overline{E} \in 2 \times 2$ одинична матриця над $\overline{R}$. Тоді $\overline{P}, \overline{Q}$ такі зворотні матриці над $\overline{R}$, що $\overline{PAQ} = \begin{pmatrix} \overline{s} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{t} \end{pmatrix}$.

Ми можемо припустити, що s є дільником t. Очевидно, що $\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} + \overline{c}\overline{R} = \overline{s}\overline{R}$ і $\overline{s}$ є одиницею $\overline{R}$. Це означає, що $\overline{M}$ є циклічним над R/acR. Звідси M є циклічним над R. Отже, M, що є скінченнозображувальним R-модулем, є прямою сумою циклічних модулів. Тобто, остаточно отримуємо, що R є кільцем елементарних дільників. $\square$

Нагадаємо, що комутативне кільце є PM-кільцем, якщо довільний його простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Теорема 3. *Нехай R — дробово-напівлокальне PM-кільце Безу. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/\operatorname{rad}(aR)$ для довільного ненульового і незворотного елемента $a \in R$. Тоді, згідно з [3], ст.р.$(\overline{R}) = 1$. Нехай $aR + bR + cR = R$. Оскільки $\overline{bR} + \overline{c}\overline{R} = \overline{R}$ і ст.р.$(\overline{R}) = 1$, то існує такий $y \in R$, що $(\overline{b + cy})\overline{R} = \overline{R}$. Тоді, $(a + c \cdot 0)R + (b + c \cdot y)R = R$. Тобто, ми довели, що ст.р.$(R) \leq 2$ і, отже, R є кільцем елементарних дільників. □

Перш ніж перейти до доведення наступного твердження, розглянемо один приклад області Безу. Нехай $D = \{a_0 + b_1x + \ldots : a_0 \in Z, b_i \in Q\}$. Тоді, D — двовимірна область Безу, яка має єдиний простий ідеал $M = \{b_1x + b_2x^2 + \ldots | b_i \in Q\}$ висоти 1 і має нескінченне число максимальних ідеалів вигляду $pZ + xQ[[x]]$, де p — просте число в Z.

Елементи з M, що містяться в нескінченному числі максимальних ідеалів з D, в той же час є елементами з $D \backslash M$, які тільки містяться в скінченному числі максимальних ідеалів. Тому, D є дробово-напівлокальним кільцем.

Теорема 4. *Нехай D — область Безу, Q_i — ідеали області D. Наступні твердження еквівалентні:*

1. *Кожен ненульовий головний ідеал $aD \subset D$ може бути зображений у вигляді $aD = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n$, де кожен ідеал Q_i має простий радикал і (Q_i) є попарно комаксимальними.*
2. *D — дробово-напівлокальне кільце.*

Доведення. (1. $\Longrightarrow$ 2.) Припустимо, що M є максимальним ідеалом кільця D та P_1 і P_2 — не порівняльні прості ідеали з P, що містяться в M. Нехай $a \in P_1$ і $a \notin P_2$ та $b \in P_2$ і $b \notin P_1$. Головний ідеал abD може бути записаний у вигляді $Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n$, де (Q_i) — попарно комаксимальні. Оскільки, $abD \subseteq M$, то деяке з (Q_i) міститься в M, і нехай це Q_1. Окрім того, оскільки (Q_i) — попарно комаксимальні, то тільки Q_1 міститься в M. Отже, P_1 і P_2 містяться в M і містять abD, тоді, $Q_1 \subseteq P_1 \bigcap P_2$. Але Q_1 не може мати простого радикала. Припустимо, що $\sqrt{Q_1} = P$ — простий. Тоді, P міститься в $P_1 \bigcap P_2$. Крім цього, P повинен містити a або b. Це суперечить вибору a чи b.

Нехай $a \in D$ і $a \neq 0$. Запишемо $aD = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n$, де кожен Q_i має простий радикал P_i, і (Q_i) є попарно комаксимальні. Якщо P є мінімальним простим ідеалом над aD, то P містить деяке Q_i і відповідно $P = P_i$. З цього випливає, що $P_1, P_2, \ldots, P_n$ є множиною мінімальних простих ідеалів для aD.

(2. $\Longrightarrow$ 1.) Припустимо, що aD — ненульовий головний ідеал кільця D, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — мінімально прості ідеали над aD. Тому, (P_i) — попарно комаксимальні. Отже, існують $x_i \in P_i$ і $y_i \in P_i$ такі, що $x_i + y_i = 1$.

Нехай $D_i = D[1/y_i]$ — локалізація D за степенями елемента y_i. Якщо $Q_i = aD_i \bigcap D$, то Q_i має радикал P_i. Нехай M — максимальний ідеал D, тоді кожний aD або $aD \subseteq M$, або $aD \nsubseteq M$. Якщо $aD \nsubseteq M$, то $aD_M \bigcap D = D$. Якщо ж $aD \subseteq M$, то $M \supset P_i$, для деякого i, відповідно $y_i \notin M$. З цього випливає, що D_M є вираженим з перетину $D[1/y_i] = \bigcap D_P$, де P є простим і $y_i \notin P$. $D \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} D_i \bigcap D[1/a] \subseteq_{\text{Mmax}} D_M = D$. Отже, для кожного ідеалу A кільця D, $A = \bigcap_{\text{Mmax}} AD_M \bigcap D$. Звідси випливає, що $aD = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n$. Крім цього (Q_i) — попарно комаксимальні. Отже, розглянутий перетин є добутком. □

Розглянемо описане вище дробово-напівлокальне кільце, а саме

$$D = \{a_0 + b_1 x + \ldots : a_0 \in Z, b_i \in Q\}.$$

Якщо $f(x) = a_0 + b_1 x + \ldots$, де $a_0 \neq 0$, то, очевидно, що маємо представлення $f(x)D = a_0 D = p_1 p_2 \ldots p_n D = p_1 D \ldots p_n D$. (Оскільки ряди $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, $c_i \in Q$ є зворотніми елементами в D). Якщо $f(x) = a_0 + b_1 x + \ldots$ $a_0 = 0$, то $f(x) = b_{n(f)} x^{n(f)} + \ldots$, де $b_{n(f)}$ — перший ненульовий коефіцієнт ряду $f(x)$. Тоді, очевидно, що $f(x)D = x^{n(f)} D$ є представленням з теореми 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.66. – P. 464–491.
2. Zabavsky B.V. Diagonal reduction of matrices over ring. – Mat. Studies, Monograph series, XVI. – VNTL: Lviv, 2012. – 251 p.
3. Zabavsky B.V. *Fractionally regular Bezout ring*// Mat. Stud. – 2009. – V.32, №1. – P. 76–80.
4. Matlis E. *The minimal spectrum of a reduced ring*// Illinois J. Math. – 1983. – V.27, №3. – P. 353–391.

Ivan Franko National University of Lviv
mandaruna87@mail.ru

Надійшло 28.05.2014
Після переробки 23.04.2015