УДК 512.552.13

Б. М. Кузніцька, Б. В. Забавський

РОЗДІЛЬНІ КІЛЬЦЯ

B. M. Kuznitska, B. V. Zabavsky. *Avoidable rings*, Mat. Stud. **43** (2015), 153–155.

In this article we introduce a new class of rings, so called avoidable rings, which are generalizations of adequate rings and neat rings while in these rings every nonzero prime ideal is contained in a unique maximal ideal.

Б. Н. Кузницка, Б. В. Забавский. *Раздельные кольца* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №2. – С.153–155.

В статье рассматривается новый класс колец, так называемых раздельных колец, обобщающий классы адекватных колец и аккуратных колец, в которых их произвольный ненулевой простой идеал содержится в единственном максимальном идеале.

Під кільцем будемо розуміти комутативне кільце з одиницею. *Адекватні області* введені О.Хелмером в [1]. Кільце R називається *адекватним*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, де $a \neq 0$, існують такі $r, s \in R$, що $a = rs$, $rR{+}bR = R$ і для необоротного дільника s' елемента s виконується $s'R + bR \neq R$.

І. Капланський в [2] довів, що адекватне кільце, дільники нуля якого містяться в радикалі Джекобсона, є кільцем елементарних дільників. Зі статті [5] відмітимо той факт, що лише адекватне кільце Безу, дільники нуля якого містяться в радикалі Джекобсона, є або областю цілісності, або кільцем нормування.

Зі статті [4] відомо, що кожний ненульовий простий ідеал адекватного кільця міститься в єдиному максимальному ідеалі. В статті [5] сформульовано таке *запитання:* якщо R є областю Безу з властивістю, що кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, то чи R буде адекватним кільцем?

Кільцем Безу є кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним. У статті [6] встановлено, що існує кільце елементарних дільників, яке не є адекватним, але є кільцем, в якому кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі. У цій статті введемо новий клас кілець, так званих *роздільних кілець*, які є узагальненням адекватних кілець.

Нагадаємо, що кільце називається *чистим*, якщо кожний елемент є сумою ідемпотента та одиниці ([7]). Усі необхідні означення і факти є в [10, 11].

Означення 1. Комутативне кільце називається *роздільним*, якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ таких, що $aR + bR + cR = R$, існують елементи $r, s \in R$ такі, що $c = rs$, де $rR + aR = R, sR + bR = R$ і $rR + sR = R$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 13F99.
Keywords: avoidable ring; Bezout domain; clean ring; adequate domain.
doi:10.15330/ms.43.2.153-155

Теорема 1. *Комутативна область Безу є роздільним кільцем тоді і тільки тоді, коли для довільного $c \in R \setminus \{0\}$ фактор-кільце R/cR є чистим кільцем.*

Доведення. Нехай $\overline{R} = R/cR$ і $\overline{a} = a + cR$, $\overline{b} = b + cR$. Оскільки R є чистим кільцем, то існує ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$ такий, що $\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}$ і $\overline{1} - \overline{e} \in \overline{b}\overline{R}$ (див. [7]).

Ми маємо, що $e + ap = s$ для деяких елементів $p, s \in R$. Подібно, $1 - e + b\alpha = c\beta$ для деяких елементів $\alpha, \beta \in R$. Співставляючи $e = s - ap$ і $1 - e + b\alpha = c\beta$, отримаємо $apR + bR + cR = R$.

Оскільки $\overline{e} = \overline{e}^2$, то отримаємо, що $e(1 - e) = ct$ для деякого елемента $t \in R$. Нехай $eR + cR = dR$. Тоді, $e = de_0, c = dc_0$, де $e_0R + c_0R = R$ для деяких елементів $b_0, c_0 \in R$. Звідси, $e + c_0j = 1$ для деякого елемента $j \in R$. Візьмемо $r = c_0, s = d$ і запишемо розклад на множники $c = rs$, де $rR + cR = R$ і $cR \subset sR$. Оскільки, $e = ap + cs$, то отримаємо $rR + apR = R, sR \subset apR$. Очевидно, що $sR + bR = R, rR + sR = R$ і $rR + aR = R$.

Нехай $aR + bR + cR = R$, $c \neq 0$ і $c = rs$, де $rR + sR = R$, $rR + aR = R$ і $sR + bR = R$. Візьмемо $\overline{r} = r + cR$, $\overline{s} = s + cR$. Оскільки $rR + sR = R$, то отримаємо $ru + sv = 1$ і $\overline{r}^2\overline{u} = \overline{r}, \overline{s}^2\overline{v} = \overline{s}$. Нехай $\overline{s} \cdot \overline{v} = \overline{e}$. Очевидно, що $\overline{e}^2 = \overline{e}$ і $\overline{1} - \overline{e} = \overline{ru}$. Враховуючи, що $rR + aR = R$, отримаємо $\overline{a}\overline{\beta}\overline{e} = \overline{e}$ для деякого елемента $\overline{\beta} \in \overline{R}$.

Подібно, $\overline{b}\overline{x}(\overline{1} - \overline{e}) = \overline{1} - \overline{e}$ для деякого елемента $\overline{x} \in \overline{R}$. Ми довели, що якщо $\overline{a}\overline{R} + \overline{b}\overline{R} = \overline{R}$, то існує такий ідемпотент $\overline{e} \in \overline{R}$, що $\overline{e} \in \overline{a}\overline{R}$ і $\overline{1} - \overline{e} \in \overline{b}\overline{R}$. Згідно з [8], R є чистим кільцем. □

Теорема 2. *Комутативна адекватна область Безу є роздільною областю.*

Доведення. Нехай $aR + bR + cR = R$ і $c \neq 0$. Оскільки R є адекватною областю, то $c = rs$, де $rR + aR = R$ і $s'R + aR \neq R$ для довільного необоротного елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq R$. Очевидно, що $rR + sR = R$. Нехай $sR + bR = dR \neq R$. Так як d є дільником елемента s, то $dR + aR = hR \neq R$. Оскільки $cR \subset dR \subset hR$, $bR \subset dR \subset hR$ і $aR \subset hR$ маємо, що $aR + bR + cR \subset hR \neq R$. А це неможливо, бо $aR + bR + cR = R$. □

Кільце називається *pm-кільцем*, якщо кожний простий ідеал кільця міститься в єдиному максимальному ідеалі. Відмітимо, що комутативне чисте кільце є pm-кільцем ([8]).

Кільце називається *акуратним*, якщо кожний його нетривіальний скінченний гомоморфний образ є чистим кільцем. Очевидно, що акуратне кільце є роздільним. Безпосередньо з теореми 2 випливає таке твердження.

Теорема 3. *В роздільній області кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

В даний час відкрите таке **питання:** *Чи є акуратним довільне роздільне кільце?*

Кільце називається *FGC кільцем*, якщо кожний скінченно породжений модуль ізоморфний до прямої сумі циклічних модулів (інформацію про FGC кільця можна також знайти в [9]).

Теорема 4. *Довільна FGC область Безу R, в якій кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі є роздільною тоді і тільки тоді, коли R є адекватною областю.*

Доведення. Довільна FGC область Безу є областю, в якій кожний ненульовий елемент міститься лише в скінченному числі максимальних ідеалів ([9]). Оскільки в кільці R кожний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, то за теоремою 4.1 з [5] R є адекватною областю. Використовуючи теорему 3, завершуємо доведення даної теореми. $\square$

Теорема 5. *Будь-яка роздільна область Безу є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Нехай $a, b, c \in R$ і $aR + bR + cR = R, c \neq 0$. Розглянемо $c = rs$, де

$$rR + aR = R, \quad sR + bR = R \quad \text{i} \quad rR + sR = R.$$

Очевидно, що $(sa+rb)R+rcR = R$. Згідно з [2], R є кільцем елементарних дільників. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition*// Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V.49. – P. 225–236.
2. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.66. – P. 464–491.
3. Gillman L., Henriksen M. *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V.82. – P. 366–391.
4. Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – V.82. – P. 362–365.
5. Larsen M.D., Levis W.J., Shores T. *Elementary divisor rings, finitely presented modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – V.187. – P. 231–248.
6. Brewer J.W., Conrad P.F., Montgomery P.R. *Lattice-ordered groups and a conjecture for adequate domains*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – V.43, №1. – P. 31–35.
7. McGovern W.Wm. *Neat rings*// J. Pure Appl. Algebra. – 2006. – V.205. – P. 243–265.
8. Nicholson W.K. *Lifting idempotents and exchange rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V.229. – P. 269–278.
9. Brandal W. *Almost maximal integral domains and finitely generated modules*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – V.183. – P. 203–222.
10. Zabavsky B.V. Diagonal reduction of matrices over rings. – Mat. Studies, Monograph Series, XVI, VNTL, Lviv, 2012. – 251 p.
11. Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings*// Mat. Stud. – 2014. – V.41, №1. – P. 101–108.

Ivan Franko National University of Lviv
kuznitska@ukr.net
zabavskii@gmail.com

Надійшло 23.05.2014
Після переробки 5.02.2015