УДК 517.95

А. М. Цебенко

ОПТИМАЛЬНЕ МЕЖОВЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ, СТАН ЯКИХ ВИЗНАЧАЄТЬСЯ ЗАДАЧЕЮ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

A. M. Tsebenko. *Boundary optimal control for systems described by parabolic problem without initial conditions*, Mat. Stud. **44** (2015), 89–103.

We prove the existence and uniqueness of the optimal control for systems described by mixed boundary problem for parabolic equation without initial conditions. We investigate the case of the boundary control and the final observation. We obtain a set of correlations that characterize the optimal controls for such problem.

А. М. Цебенко. *Оптимальное управление системами, которые описываются задачей без начальных условий для параболических уравнений со смешанными краевыми условиями* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №1. – С.89–103.

Доказано существование и единственность решений задач оптимального управления системами, которые описываются задачей без начальных условий для параболических уравнений со смешанными краевыми условиями. Рассмотрен случай граничного управления и финального наблюдения. Получено совокупность соотношений, которые характеризуют оптимальные управления для такой задачи.

Вступ. Основи теорії оптимального керування системами, що описуються рівняннями з частинними похідними, викладено в монографії [1]. Серед багатьох розглядуваних там проблем є задача оптимального межового керування з фінальним спостереженням системами, стан яких описується мішаною задачею для параболічних рівнянь (див. [1], п. 3.2.2). Наведемо модельний приклад цієї задачі. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$. Стан керованої системи для заданого керування $v \in U := L^2(\Sigma)$ описується слабким розв'язком $y \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ задачі

$$y_t - \Delta y = f, \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_{\Sigma} = v, \tag{2}$$

$$y\Big|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

де $f \in L^2(Q)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$. Задача оптимального керування полягає у знаходженні функції $u \in U_\partial := \{v \in U : v \geq 0 \ \text{ м. с. на } \Sigma\}$ такої, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v),$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 49J20, 58D25.
Keywords: parabolic equation; optimal control; Fourier problem; problem without initial conditions.
doi:10.15330/ms.44.1.89-103

© А. М. Цебенко, 2015

де $J(v) := \int_\Omega |y(x,T;v) - z_0(x)|^2 dx + \mu \iint_\Sigma |v|^2 d\Gamma dt \,\forall v \in U$, а $\mu > 0$, $z_0 \in L^2(\Omega)$ — задані.

Встановлено, що ця задача має єдиний розв'язок і він характеризується варіаційною нерівністю $\iint_\Sigma (p(u) + \mu u)(v - u) d\Gamma dt \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial$, де $p = p(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ — слабкий розв'язок задачі

$$-p_t - \Delta p = 0 \text{ в } Q, \qquad \frac{\partial p}{\partial \nu}\Big|_\Sigma = 0, \qquad p\big|_{t=T} = y\big|_{t=T} - z_0,$$

а $y = y(u)$ — слабкий розв'язок задачі (1)–(3) при $v = u$.

В даній роботі досліджується проблема оптимального керування системами, стан яких описується задачею Фур'є для параболічних рівнянь, модельним прикладом якої є задача, яка відрізняється від розглядуваної вище тим, що рівняння стану системи розглядається в області $Q = \Omega \times (-\infty, 0)$, крайова умова задана на поверхні $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, 0)$, а замість початкової умови ставиться умова $\int_\Omega |y(x,t)|^2 dx \to 0$ при $t \to -\infty$, припускаючи, що f інтегровна з квадратом на кожній обмеженій підобласті Q. Такого типу задачі описують процеси, що почались досить давно і початкові умови не впливають на їх проходження в актуальний момент часу. Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь досліджувались у роботах багатьох математиків (див. [19, 20] і бібліографію там).

Відмітимо, що теорія оптимального керування детермінованими системами, які описуються рівняннями з частинними похідними, активно розвивається в наш час. Зокрема, цій тематиці присвячені роботи [1]–[15]. У роботах [6]–[8] стан керованої системи описується задачею Діріхле для параболічного рівняння. Зокрема, у роботі [6] керування знаходиться у коефіцієнтах при молодших членах рівняння, а у роботах [7], [8] досліджуються задачі стартового оптимального керування. У праці [7], зокрема, розглядається випадок фінального спостереження. У роботах [9] та [10] стан системи описується також задачею Діріхле, але досліджується випадок межового керування. У праці [10] квадратична функція вартості включає в себе також фінальне спостереження, а у праці [9] — розподілене. У роботі [11] досліджено задачу оптимального керування для лінійного параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами в головній частині еліптичного оператора у випадку, коли керування задане на частині межі області визначення рівняння. Робота [12] присвячена вивченню задач оптимального керування системами, стан яких описується рівнянням теплопровідності з динамічною крайовою умовою. Метою цієї роботи є відшукання оптимального коефіцієнта теплопередачі, що знаходиться в крайовій умови, і розглядається випадок розподіленого спостереження.

Як нам відомо серед робіт, присвячених даній тематиці, тільки в роботах [16], [17] стан керованої системи описується задачею Фур'є для параболічних рівнянь. В нашій роботі на відміну від цих робіт розглядається випадок межового керування при фінальному спостереженні. Тут доведено існування та єдиність оптимального керування, а також знайдено співвідношення, що його характеризують.

1. Основні позначення. На протязі всієї роботи вважаємо, що n — довільне фіксоване натуральне число, а $\mathbb{R}^n$ — евклідів простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \dots, x_n)$ дійсних чисел, зі скалярним добутком $(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ і нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею Γ, а ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Припускаємо, що $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 — замикання відкритої множини на поверхні Γ (зокрема, $\Gamma_0 = \varnothing$ або $\Gamma_0 = \Gamma$), $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$. Нехай $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$.

Під $H^1(\Omega)$ розуміємо гільбертів простір вимірних функцій $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$, які разом з узагальненими похідними першого порядку належать $L^2(\Omega)$, зі скалярним добутком $(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega \big\{ \sum_{i=1}^n v_{x_i} w_{x_i} + vw \big\} dx$ та нормою $\|v\| := \big(\int_\Omega \big\{ \sum_{i=1}^n |v_{x_i}|^2 + |v|^2 \big\} dx \big)^{1/2}$. Нехай $\gamma_0\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ — оператор сліду, $\widetilde{H}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0 v|_{\Gamma_0} = 0\}$ — підпростір простору $H^1(\Omega)$.

Відмітимо, що з властивостей оператора сліду випливає існування сталої $K > 0$ такої, що
$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma_1)} \le K \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, v \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{4}$$
Під $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$, де $q \in [1,\infty]$, а X — довільний банахів простір, розуміємо лінійний простір визначених на S зі значеннями в X функцій, які є вимірними і їх звуження на будь-який відрізок $[a,b] \subset S$ належать простору $L^q(a,b;X)$.

Позначаємо $\widetilde{L}^2_{\omega,\beta,\gamma}(S;X) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;X) |\ \int_S \gamma(t) e^{2\omega \int_0^t \beta(s)ds} \|f(t)\|^2_X dt < \infty\}$, де $\omega \in \mathbb{R}$, $\beta \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;\mathbb{R})$, $\gamma\colon S \to (0,+\infty)$ — вимірна функція та X — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ та нормою $\|\cdot\|_X$. Простір $\widetilde{L}^2_{\omega,\beta,\gamma}(S;X)$ є гільбертовим зі скалярним добутком $(f,g)_{\widetilde{L}^2_{\omega,\beta,\gamma}(S;X)} = \int_S \gamma(t) e^{2\omega \int_0^t \beta(s)ds} (f(t),g(t))_X dt$ і нормою
$$\|f\|_{\widetilde{L}^2_{\omega,\beta,\gamma}(S;X)} := \Big(\int_S \gamma(t) e^{2\omega \int_0^t \beta(s)ds} \|f(t)\|^2_X dt \Big)^{1/2}.$$

Через $C^1_c(I)$, де I — інтервал числової осі, позначаємо лінійний простір визначених на I неперервно диференційованих та фінітних функцій.

2. Формулювання задачі та основного результату Нехай $\alpha\colon S \to \mathbb{R}$ — неперервна функція така, що $\alpha(t) > 0$ для будь-якого $t \in S$.

З метою скорочення записів приймемо $L^2_{\omega,\alpha}(S;X) := \widetilde{L}^2_{\omega,\alpha,\alpha}(S;X)$, $L^2_{\omega,1/\alpha}(S;X) := \widetilde{L}^2_{\omega,\alpha,1/\alpha}(S;X)$.

Нехай $U := L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Gamma_1))$ — простір керувань, U_∂ — опукла та замкнена множина в U (множина допустимих керувань).

Стан досліджуваної еволюційної системи для заданого керування $v \in U$ визначаємо як функцію $y = y(v) = y(x,t;v)$, $(x,t) \in Q$, з простору $L^2_{\omega,\alpha}(S;\widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C(S;L^2(\Omega))$, яка задовольняє рівняння
$$y_t - \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij}(x,t) y_{x_i}\big)_{x_j} + a_0(x,t) y = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{5}$$
і крайову умову
$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i) = g + v, \tag{6}$$
в сенсі інтегральної тотожності
$$\iint_Q \Big\{ -y\psi\varphi' + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_{x_i} \psi_{x_j} \varphi + a_0 y \psi \varphi \Big\} dxdt =$$
$$= \iint_Q f\psi\varphi dxdt + \iint_{\Sigma_1} (g+v)\psi\varphi d\Sigma, \quad \psi \in \widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty,0), \tag{7}$$

та умову (“аналог початкової умови”)

$$\lim_{t\to-\infty} e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}\int_\Omega |y(x,t)|^2dx = 0, \tag{8}$$

припускаючи, що виконані умови

$(\mathcal{A}_1)$: $a_0, a_{ij} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(Q)$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j=\overline{1,n})$, $a_0(x,t) \ge \alpha(t)$ для м. в. $(x,t)\in Q$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \alpha(t)\|\xi\|^2$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$ і м. в. $(x,t)\in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$: $f\in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Omega))$, $g\in L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Gamma_1))$.

Вище згадану функцію $y = y(v)$ будемо називати розв’язком задачі (5), (6), (8) при заданому керуванні v. Існування і єдиність функції $y(v)$ та її оцінки доведено в наступному пункті (див. твердження 1).

Зауваження 1. Відмітимо, що в умові $y\in L^2_{\omega,\alpha}(S;\widetilde{H}^1(\Omega))$ “захована”, крайова умова $y\big|_{\Sigma_0} = 0$.

Функція вартості має вигляд

$$J(v) = \|y(\cdot,0;v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v\|^2_U, \quad v\in U, \tag{9}$$

де $z_0\in L^2(\Omega)$, $\mu>0$ — задані (нагадаємо, що $\|v\|^2_U = \int_{\Sigma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|v(x,t)|^2d\Gamma dt$).

Розглядаємо таку **задачу оптимального керування**: знайти керування $u\in U_\partial$ таке, що

$$J(u) = \inf_{v\in U_\partial} J(v). \tag{10}$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (10), а її розв’язки — *оптимальними керуваннями.*

Для характеризації розв’язків задачі (10) використаємо поняття *спряженого стану* досліджуваної системи. Цей стан, що відповідає керуванню $v\in U_\partial$, описується функцією $p = p(v) = p(x,t;v)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, з простору $L^2_{\mathrm{loc}}(S;\widetilde{H}^1(\Omega))\cap C(S;L^2(\Omega))$, яка задовольняє рівняння

$$-p_t - \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij}(x,t)p_{x_i}\big)_{x_j} + a_0(x,t)p = 0, \quad (x,t)\in Q, \tag{11}$$

і крайову умову

$$\frac{\partial p}{\partial\nu_A} = 0, \quad (x,t)\in\Sigma_1, \tag{12}$$

в сенсі інтегральної тотожності

$$\iint_Q \Big\{p\psi\varphi' + \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}p_{x_i}\psi_{x_j} + a_0p\psi\Big)\varphi\Big\}dxdt = 0, \quad \psi\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi\in C^1_c(-\infty,0), \tag{13}$$

та умову

$$p(x,0;v) = y(x,0;v) - z_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{14}$$

де $y(x,0;v)$, $x\in\Omega$, — значення при $t=0$ розв’язку задачі (5), (6), (8).

Вище вказану функцію p коротко називатимемо розв’язком задачі (11), (12), (14). В наступному пункті доведено коректність цієї задачі і отримано відповідні оцінки її розв’язку (див. твердження 3).

Основним результатом даної роботи є таке твердження.

Теорема. *При вказаних вище умовах існує єдиний розв'язок u задачі (10) і він характеризується варіаційною нерівністю* $\iint_{\Sigma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big(\widetilde{p}(u)+\mu u\big)\big(v-u\big)d\Gamma dt\geq 0$ $\forall v\in U_\partial$, *де* $\widetilde{p}(u)=\widetilde{p}(x,t;u):=\alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}p(x,t;u),\ (x,t)\in Q$, *а* $p(x,t;u),\ (x,t)\in Q$, *— розв'язок задачі* (11), (12), (14) *при* $v=u$ *(тобто, функція, що описує спряжений стан, відповідний оптимальному керуванню u), причому в умові* (14) $y(x,0,u), x\in\Omega$, *— значення при $t=0$ розв'язку задачі* (5), (6), (8), *коли* $v=u$.

3. Допоміжні твердження. Для обгрунтування основного результату нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження, які сформулюємо і доведемо в цьому пункті.

Лема 1. *Нехай для деяких* $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ $(t_1<t_2)$ *функція* $z\in L^2(t_1,t_2;\widetilde{H}^1(\Omega))$ *задовольняє тотожність*

$$\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_\Omega\Big\{-z\psi\varphi'+(g_0\psi+\sum_{i=1}^n g_i\psi_{x_i})\varphi\Big\}dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\Gamma_1}h_0\psi\varphi d\Gamma dt=0,\ \psi\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi\in C_c^1(t_1,t_2),\tag{15}$$

де $h_0\in L^2(\Gamma_1\times(t_1,t_2))$ *та* $g_j\in L^2(\Omega\times(t_1,t_2))$ $(j\in\{0,1,\dots,n\})$ *— деякі функції.*

Тоді $z\in C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ *і для будь-яких чисел* $\tau_1,\tau_2\in[t_1,t_2]$ $(\tau_1<\tau_2)$ *та довільної функції* $\theta\in C^1[t_1,t_2]$ *правильна рівність*

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int_\Omega|z(x,t)|^2dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}-\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega|z|^2\theta'dxdt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega\big\{g_0z+\sum_{i=1}^n g_iz_{x_i}\big\}\theta dxdt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_{\Gamma_1}h_0z\theta d\Gamma dt=0.\tag{16}$$

Доведення. Доведення цієї леми повністю аналогічне доведенню леми 2 роботи [18]. □

Використовуючи лему 1, легко довести правильність такого твердження.

Наслідок 1. *Нехай для кожного* $k\in\{1,2\}$ *функція* $z_k\in L^2(t_1,t_2;\widetilde{H}^1(\Omega))\cap C([t_1,t_2];L_2(\Omega))$ *задовольняє тотожність*

$$\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_\Omega\Big\{-z_k\psi\varphi'+(g_{k,0}\psi+\sum_{i=1}^n g_{k,i}\psi_{x_i})\varphi\Big\}dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\Gamma_1}h_{k,0}\psi\varphi d\Gamma dt=0,\quad \psi\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi\in C_c^1(t_1,t_2).\tag{17}$$

Тоді для будь-яких чисел $\tau_1,\tau_2\in[t_1,t_2]$ $(\tau_1<\tau_2)$ *і довільної функції* $\theta\in C^1[t_1,t_2]$ *виконується рівність*

$$\theta(t)\int_\Omega z_1(x,t)z_2(x,t)dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2}-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega z_1z_2\theta'dxdt+\tag{18}$$
$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_\Omega\big\{g_{1,0}z_2+g_{2,0}z_1+\sum_{i=1}^n(g_{1,i}z_{2,x_i}+g_{2,i}z_{1,x_i})\big\}\theta dxdt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\!\!\int_{\Gamma_1}(h_{1,0}z_2+h_{2,0}z_1)\theta d\Gamma dt=0.$$

Доведення наслідку 1. Додамо тотожність (17) при $k=1$ до неї ж при $k=2$. У результаті отримаємо інтегральну тотожність

$$\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_\Omega\big\{-(z_1+z_2)\psi\varphi'+((g_{1,0}+g_{2,0})\psi+\sum_{i=1}^n(g_{1,i}+g_{2,i})\psi_{x_i})\varphi\big\}dxdt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\!\!\int_{\Gamma_1}(h_{1,0}+h_{2,0})\psi\varphi d\Gamma dt=0.\tag{19}$$

Ввівши позначення $z = z_1 + z_2$, $g_0 = g_{1,0} + g_{2,0}$, $g_i = g_{1,i} + g_{2,i}$, $h_0 = h_{1,0} + h_{2,0}$, отримаємо інтегральну тотожність (15) і, застосовуючи до (19) лему 1, отримаємо рівність (16). Повертаючись до попередніх позначень, матимемо

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int_\Omega |z_1(x,t) + z_2(x,t)|^2 dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega |z_1 + z_2|^2\theta' dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \big\{(g_{1,0} + g_{2,0})(z_1 + z_2) + \\ + \sum_{i=1}^n (g_{1,i} + g_{2,i})(z_1 + z_2)_{x_i}\big\}\theta dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}(h_{1,0} + h_{2,0})(z_1 + z_2)\theta d\Gamma dt = 0.$$

З цієї рівності випливає рівність

$$\frac{1}{2}\theta(t)\int_\Omega\big(|z_1(x,t)|^2 + 2z_1(x,t)z_2(x,t) + |z_2(x,t)|^2\big)dx\Big|_{t=\tau_1}^{t=\tau_2} - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega\big(|z_1|^2 + 2z_1z_2 + |z_2|^2\big)\theta' dxdt + \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega\Big\{\big(g_{1,0}z_1 + g_{2,0}z_1 + g_{1,0}z_2 + g_{2,0}z_2\big) + \sum_{i=1}^n\big(g_{1,i}z_1 + g_{1,i}z_2 + g_{2,i}z_1 + g_{2,i}z_2\big)_{x_i}\Big\}\theta dxdt + \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}\big(h_{1,0}z_1 + h_{1,0}z_2 + h_{2,0}z_1 + h_{2,0}z_2\big)\theta d\Gamma dt = 0. \tag{20}$$

До тотожностей (17) при, відповідно, $k = 1$ і $k = 2$ застосуємо лему 1. Отримані рівності типу рівності (16) підставимо у (20). Звідси у результаті простих перетворень отримаємо (18). □

Далі наведемо твердження, які обґрунтовують коректність задач (5), (6), (8) та (11), (12), (14).

Розглянемо задачу на знаходження функції $y(x,t)$, $(x,t) \in Q$, з простору $L^2_{\omega,\alpha}(S; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$, яка задовольняє рівняння (5) та умову

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_1} := h, \tag{21}$$

в сенсі інтегральної тотожності

$$\iint_Q\Big\{ - y\psi\varphi' dxdt + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_{x_i}\psi_{x_j}\varphi + a_0 y\psi\varphi\Big\}dxdt = \\ = \iint_Q f\psi\varphi dxdt + \iint_{\Sigma_1} h\psi\varphi d\Sigma, \quad \psi \in \widetilde{H}^1(\Omega),\ \varphi \in C^1_c(-\infty, 0), \tag{22}$$

і умову (8).

Припускаємо, що виконується умова $(\mathcal{A}_1)$ та

$(\mathcal{A}'_2)$ $\quad \iint_{\Sigma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|h(x,t)|^2 d\Sigma < \infty$, $\iint_Q[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|f(x,t)|^2 dxdt < \infty$.

Цю задачу коротко називатимемо задачею (5), (21), (8). Очевидно, що задача (5), (6), (8) є задачею (5), (21), (8) при $h = g + v$.

Твердження 1. *Нехай $\omega < 1$ — яке-небудь число і виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}'_2)$. Тоді існує і тільки один розв'язок задачі (5), (21), (8). Крім того, правильні оцінки*

$$e^{2\omega\int_0^\tau\alpha(s)ds}\|y(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1\Big(\int_{-\infty}^\tau[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \\ + \int_{-\infty}^\tau[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|h(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt\Big) \quad \forall\, \tau \in S, \tag{23}$$

$$\|y\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S;\widetilde{H}^1(\Omega))} \le C_2(\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Omega))} + \|h\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Gamma_1))}), \tag{24}$$

де C_1, C_2 — додатні сталі, які залежать лише від K і від ω (якщо $0<\omega<1$).

Доведення твердження 1. Єдиність розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай y_1, y_2 — які-небудь два розв'язки нашої задачі. Тоді підставивши їх по черзі в інтегральну тотожність (22) та віднявши отримані рівності, для різниці $z := y_1 - y_2$ отримаємо тотожність

$$-\iint_Q z\psi\varphi' dxdt + \iint_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i}\psi_{x_j} + a_0 z\psi\Big)\varphi dxdt = 0, \quad \psi \in \widetilde{H}^1(\Omega), \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \quad (25)$$

Очевидно, що виконується умова

$$e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,t)|^2 dx \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (26)$$

Застосувавши лему 1 до тотожності (25) при $\theta(t) = e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}$, отримаємо

$$\frac{1}{2} e^{2\omega\int_0^{\tau_2} \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,\tau_2)|^2 dx \; - \; \frac{1}{2} e^{2\omega\int_0^{\tau_1} \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,\tau_1)|^2 dx -$$
$$- \omega \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} |z(x,t)|^2 dxdt +$$
$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{x_i}(x,t) z_{x_j}(x,t) + a_0 |z(x,t)|^2\Big] dxdt = 0.$$

де $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ — довільні. Звідси, враховуючи умову $(\mathcal{A}_1)$, здобудемо

$$\frac{1}{2} e^{2\omega\int_0^{\tau_2} \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,\tau_2)|^2 dx \; - \; \frac{1}{2} e^{2\omega\int_0^{\tau_1} \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,\tau_1)|^2 dx \; +$$
$$+ (1-\omega) \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} |z(x,t)|^2 dxdt \; + \; \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t) e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds} \sum_{i=1}^n |z_{x_i}(x,t)|^2 dxdt \le 0.$$

Оскільки, $\omega < 1$, то маємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2} \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,\tau_2)|^2 dx \le e^{2\omega\int_0^{\tau_1} \alpha(s)ds} \int_\Omega |z(x,\tau_1)|^2 dx. \quad (27)$$

В (27) зафіксуємо довільним чином вибране τ_2, а τ_1 спрямуємо до $-\infty$. На підставі умови (8) отримаємо рівність $e^{2\omega\int_0^{\tau_2} \alpha(s)ds}\int_\Omega |z(x,\tau_2)|^2 dx = 0$. А оскільки $\tau_2 \in S$ — довільне, то отримаємо рівність $z(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$. Отримане протиріччя доводить єдиність розв'язку задачі (5), (21), (8).

Існування розв'язку. Для кожного $m \in N$ покладемо $\Sigma_{0,m} := \Gamma_0 \times (-m, 0]$, $\Sigma_{1,m} := \Gamma_1 \times (-m, 0]$, $Q_m := \Omega \times (-m, 0]$ і визначимо

$$f_m(\cdot,t) := \begin{cases} f(\cdot,t), & -m < t \le 0, \\ 0, & t \le -m, \end{cases} \qquad h_m(\cdot,t) := \begin{cases} h(\cdot,t), & -m < t \le 0, \\ 0, & t \le -m. \end{cases}$$

Для довільного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $y_m \in L^2(-m, 0; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C([-m,0]; L^2(\Omega))$, яка задовольняє рівняння

$$y_{m,t} - \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij}(x,t) y_{m,x_i}\big)_{x_j} + a_0(x,t) y_m = f_m(x,t), \quad (x,t) \in Q_m, \quad (28)$$

і крайову умову

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Sigma_{1,m}} = h_m \tag{29}$$

в сенсі інтегральної тотожності

$$-\iint_{Q_m} y_m\psi\varphi' dxdt + \iint_{Q_m}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{m,x_i}\psi_{x_j} + a_0 y_m\psi\Big)\varphi dxdt = \iint_{Q_m} f_m\psi\varphi dxdt + \iint_{\Sigma_{1,m}} h_m\psi\varphi d\Sigma,$$
$$\psi \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \varphi \in C_c^1(-\infty, 0), \tag{30}$$

та початкову умову

$$y_m(x, -m) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{31}$$

(як функція з простору $C([-m, 0]; L^2(\Omega))$).

Цю задачу назвемо задачею (28), (29), (31). Існування та єдиність її розв'язку легко випливає з відомих результатів. Продовжимо y_m нулем на всю множину Q і за цим продовженням залишимо теж саме позначення y_m. Зауважимо, що для кожного $m \in N$ функція y_m належить простору $L^2(S; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C((S; L^2(\Omega))$ і задовольняє інтегральну тотожність (22) із заміною f на f_m та h на h_m, тобто правильна тотожність

$$-\iint_{Q} y_m\psi\varphi' dxdt + \iint_{Q}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{m,x_i}\psi_{x_j} + a_0 y_m\psi\Big)\varphi dxdt = \iint_{Q} f_m\psi\varphi dxdt + \iint_{\Sigma_1} h_m\psi\varphi d\Sigma,$$
$$\psi \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \varphi \in C_c^1(-\infty, 0). \tag{32}$$

Зробимо деякі оцінки членів послідовності $\{y_m\}$. Для цього до тотожності (32) застосуємо лему 1. У результаті для довільної $\theta \in C^1(S)$, $\theta(t) \geq 0$ $\forall t \in S$, і для будь-яких $\tau_1, \tau_2 \in S$ $(\tau_1 < \tau_2)$ отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int_\Omega |y_m(x,\tau_2)|^2 dx - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int_\Omega |y_m(x,\tau_1)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega |y_m|^2\theta' dxdt +$$
$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_{m,x_i}y_{m,x_j} + a_0|y_m|^2\Big]\theta dxdt = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega f_m y_m\theta dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1} h_m y_m\theta d\Gamma dt. \tag{33}$$

На підставі нерівності Коші ($ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$) оцінимо праву частину рівності (33) так

$$\Big|\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega f_m y_m\theta(t) dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1} h_m y_m\theta(t) d\Gamma dt\Big| \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \big|f_m y_m\theta(t)\big| dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}\big|h_m y_m\theta(t)\big| d\Gamma dt \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)\theta(t)|y_m|^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha(t)]^{-1}\theta(t)|f_m|^2 dxdt + \tag{34}$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)|(y_m)^2| dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}\theta(t)|h_m^2| dxdt,$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число.

Використовуючи (34) та умову ($\mathcal{A}_1$), з нерівності (33) здобудемо

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\int_\Omega |y_m(x,\tau_2)|^2 dx - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\int_\Omega |y_m(x,\tau_1)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega |y_m|^2\theta'(t) dxdt +$$
$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)\theta(t)\big[|\nabla y_m|^2 + |y_m|^2\big] dxdt \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)\theta(t)|y_m|^2 dxdt +$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha(t)]^{-1}\theta(t)|f_m|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)|y_m|^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}\theta(t)|h_m|^2 dxdt.$$

Взявши в цій рівності $\theta(t) = 2e^{2\omega\int_0^t \alpha(s)ds}$, отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_2)|^2dx - e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_1)|^2dx - 2\omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|y_m|^2dxdt+$$
$$+2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big[|\nabla y_m|^2+|y_m|^2\big]dxdt \le \varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|y_m|^2dxdt+ \quad (35)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|f_m|^2dxdt + \varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|y_m|^2d\Gamma dt+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|h_m|^2\big)d\Gamma dt.$$

З (35), враховуючи властивості оператора сліду (4), отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_2)|^2dx - e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_1)|^2dx-$$
$$-2\omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|y_m|^2dxdt + 2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big[|\nabla y_m|^2+|y_m|^2\big]dxdt \le$$
$$\le \varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|y_m|^2dxdt + \varepsilon K\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big[|\nabla y_m|^2+|y_m|^2\big]dxdt+ \quad (36)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|f_m|^2dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|h_m|^2d\Gamma dt.$$

Перенесемо перші два доданки з правої частини нерівності (36) в ліву і отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_2)|^2dx - e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_1)|^2dx + 2(1-\omega-\varepsilon(K+1))\times$$
$$\times\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|y_m|^2dxdt + 2(1-\varepsilon K)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|\nabla y_m|^2dxdt \le \quad (37)$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|f_m|^2dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|h_m|^2d\Gamma dt.$$

З (37), взявши $\varepsilon = \frac{1}{2(K+1)}$, якщо $\omega \le 0$, і $\varepsilon = \frac{1-\omega}{2(K+1)}$, якщо $0 < \omega < 1$, отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau_2}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_2)|^2dx - e^{2\omega\int_0^{\tau_1}\alpha(s)ds}\int_\Omega |y_m(x,\tau_1)|^2dx+$$
$$+C_3\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big[|\nabla y_m|^2+|y_m|^2\big]dxdt \le \quad (38)$$
$$\le C_4\Big(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_\Omega [\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|f_m|^2dxdt + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|h_m|^2d\Gamma dt\Big),$$

де C_3 та C_4 — додатні сталі, котрі залежать лише від K та від ω (якщо $0 < \omega < 1$). Врахувавши означення y_m, перейдемо в (38) до границі при $\tau_1 \to -\infty$. У результаті, прийнявши $\tau_2 = \tau \in S$, отримаємо

$$e^{2\omega\int_0^{\tau}\alpha(s)ds}\|y_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3\int_{-\infty}^{\tau}\alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|y_m(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \le \quad (39)$$
$$\le C_4\Big(\int_{-\infty}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|f_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_{-\infty}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|h_m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt\Big).$$

Враховуючи означення f_m, h_m та умову $(\mathcal{A}_2')$, з (39) отримаємо оцінки

$$e^{2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\|y_m(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\Big(\int_{-\infty}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{\tau}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|h(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt\Big), \quad \tau\in S, \tag{40}$$

$$\|y_m\|_{L^2_{\omega,\alpha}(S;\widetilde{H}^1(\Omega))} \leq C_2\big(\|f\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Omega))}+\|h\|_{L^2_{\omega,1/\alpha}(S;L^2(\Gamma))}\big), \tag{41}$$

де $C_1>0, C_2>0$ — сталі, які залежать лише від K і від ω (якщо $0<\omega<1$).

З оцінок (40) та (41) випливає, що існують функції $y\in L^2_{\omega,\alpha}(S;\widetilde{H}^1(\Omega))$, $z\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega))$ і підпослідовність $\{y_{m_j}\}_{j=1}^\infty\subset\{y_m\}$ такі, що

$$y_{m_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y, \qquad \text{слабко в} \quad L^2_{\omega,\alpha}(S;\widetilde{H}^1(\Omega)), \tag{42}$$

$$y_{m_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z \quad *-\text{слабко в} \quad L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;L^2(\Omega)). \tag{43}$$

Зауважимо, що (42) еквівалентне

$$y_{m_j}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y, \quad y_{m_j,x_i}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y_{x_i}\ (i\in\{1,\dots,n\}) \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\omega,\alpha}(S;L^2(\Omega)), \tag{44}$$

а (43) означає, що для будь-яких $t_1,t_2\in S\,(t_1<t_2)$ і довільного $g\in L^1(t_1,t_2;L^2(\Omega))$ маємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega y_{m_j}g\,dxdt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega zg\,dxdt. \tag{45}$$

Покажемо, що

$$z=y \quad \text{м. с. на Q.} \tag{46}$$

Нехай $t_1,t_2\in S,\ (t_1<t_2)$ — довільні числа і ρ — будь-який елемент з $L^2(t_1,t_2;L^2(\Omega))\subset L^1(t_1,t_2;L^2(\Omega))$. Продовжимо ρ нулем на весь промінь S і залишимо за цим продовженням теж саме позначення ρ. Зауважимо, що $[\alpha(t)]^{-1}e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\rho(x,t),\ (x,t)\in Q$, є елементом простору $L^2_{\omega,\alpha}(S;L^2(\Omega))$. На підставі (44), враховуючи вище сказане, маємо

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega y_{m_j}\rho\,dxdt = \int_S\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big(y_{m_j}\cdot[\alpha(t)]^{-1}e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\rho\big)dxdt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\int_S\int_\Omega \alpha(t)e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big(y\cdot[\alpha(t)]^{-1}e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\rho\big)dxdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega y\rho\,dxdt.$$

Звідси та з (45) випливає рівність (46). Тепер зауважимо, що з (41) та (42) маємо виконання оцінки (24).

Доведемо правильність оцінки (23). Зауважимо, що з оцінки (40) випливає оцінка

$$\|y_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq \zeta(\tau), \quad \tau\in S, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{47}$$

де для кожного $\tau\in S$ $\zeta(\tau):=C_1^{1/2}e^{-\omega\int_0^\tau\alpha(s)ds}(\int_{-\infty}^\tau[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt+$ $+\int_{-\infty}^\tau[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\|h(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}dt)^{1/2}$.

Нехай $\sigma\in S,\delta>0$ — які-небудь фіксовані числа. Тоді з (47) маємо

$$\|y_{m_j}(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le \max_{s\in[\sigma-\delta,\sigma]} \zeta(s), \quad \tau\in[\sigma-\delta,\sigma]. \tag{48}$$

З (43), (46), (48) і того, що $y \in C(S;L^2(\Omega))$, випливає оцінка $\|y(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \le \max_{s\in[\sigma-\delta,\sigma]}\zeta(s), \tau\in[\sigma-\delta,\sigma]$. Звідси отримаємо нерівність $\|y(\cdot,\sigma)\|_{L^2(\Omega)}\le\max_{s\in[\sigma-\delta,\sigma]}\zeta(s)$ для будь-яких $\delta>0$, а це означає, що $\|y(\cdot,\sigma)\|_{L^2(\Omega)}\le\zeta(\sigma)$. Отож, оцінка (23) є правильною.

Залишилось показати, що y — розв'язок задачі (5), (21), (8). Поклавши в тотожності (32) $m=m_j$ $(j\in\mathbb{N})$ і перейшовши до границі при $j\to\infty$, з врахуванням (44) і означення функцій f_m та h_m отримаємо (22). Умова (8) випливає з оцінки (23). □

Твердження 2. *Існує єдиний розв'язок задачі* (11), (12), (14) *і, якщо* $\omega<1$, *то для нього правильні оцінки*

$$\int_\Omega |p(x,\tau)|^2dx \le e^{2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\int_\Omega |p(x,0)|^2dx, \quad \tau\in S, \tag{49}$$

$$\iint_{\Sigma_1} \alpha(t)e^{-2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}|p(x,t)|d\Gamma dt \le C_5\int_\Omega |p(x,0)|^2dx, \tag{50}$$

де $C_5>0$ *— стала, що від* p *не залежить.*

Доведення твердження 2. Існування та єдиність розв'язку задачі (11), (12), (14) за таких умов є відомим фактом, тому доведемо оцінки (49), (50).

Використовуючи лему 1 з $\tau_1=\tau<0, \tau_2=0$, $z=-p$, $g_0=a_0p$, $g_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}p_{x_j}$, $h_0=0$, на основі тотожності (13), при $\theta\in C^1(S)$ — довільна функція, правильна рівність

$$\frac12\theta(0)\int_\Omega |p(x,0)|^2dx - \frac12\theta(\tau)\int_\Omega|p(x,\tau)|^2dx - \frac12\int_\tau^0\!\!\int_\Omega |p|^2\theta' dxdt -$$
$$-\int_\tau^0\!\!\int_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}p_{x_i}p_{x_j} + a_0|p|^2\Big]\theta dxdt = 0. \tag{51}$$

У рівності (51) візьмемо $\theta(t)=e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}$, $t\in S$. У результаті отримаємо

$$\frac12 e^{-2\omega\int_0^\tau\alpha(s)ds}\int_\Omega|p(x,\tau)|^2dx - \omega\int_\tau^0\!\!\int_\Omega \alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|p|^2dxdt +$$
$$+\int_\tau^0\!\!\int_\Omega e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\Big[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}p_{x_i}p_{x_j}+a_0|p|^2\Big]dxdt = \frac12\int_\Omega|p(x,0)|^2dx. \tag{52}$$

Використовуючи умову $(\mathcal{A}_1)$, з (52) отримаємо

$$e^{-2\omega\int_0^\tau\alpha(s)ds}\int_\Omega|p(x,\tau)|^2dx - 2\omega\int_\tau^0\!\!\int_\Omega\alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|p|^2dxdt +$$
$$+2\int_\tau^0\!\!\int_\Omega\alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big[|\nabla p|^2+|p|^2\big]dxdt \le \int_\Omega|p(x,0)|^2dx.$$

Звідси маємо

$$e^{-2\omega\int_0^\tau\alpha(s)ds}\int_\Omega|p(x,\tau)|^2dx + 2(1-\omega)\int_\tau^0\!\!\int_\Omega\alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\big[|\nabla p|^2+|p|^2\big]dxdt \le \int_\Omega|p(x,0)|^2dx. \tag{53}$$

З (53) при $\omega < 1$ отримаємо оцінку (49).

Використовуючи (4), маємо

$$\int_\tau^0 \int_{\Gamma_1} \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^\tau \alpha(s)ds} |p| d\Gamma dt \le K \int_\tau^0 \int_\Omega \alpha(t) e^{-2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \Big[\sum_{i=1}^n |p_{x_i}(x,t)|^2 + |p(x,t)|^2 \Big] dxdt.$$

Звідси та з (53) при $\omega < 1$ випливає оцінка (50) з $C_5 = \frac{K}{2(1-\omega)}$. □

При доведенні основних результатів будемо використовувати таке відоме твердження (див. [1], с.18)

Твердження 3. *Нехай $v \mapsto J(v) \colon U \to \mathbb{R}$ — строго опуклий і диференційовний функціонал, який у випадку, коли U_∂ — необмежена множина, задовольняє умову*

$$J(v) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_U \to +\infty, \quad v \in U_\partial. \tag{54}$$

Тоді існує єдиний елемент $u \in U_\partial$ такий, що $J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v)$ і він характеризується варіаційною нерівністю

$$J'(u) \cdot (v - u) \ge 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{55}$$

4. Обґрунтування основних результатів.

Доведення теореми. Покажемо, що в даному випадку виконуються всі умови твердження 3. Спочатку доведемо, що функціонал J, визначений в (9), є диференційовним. Для цього побудуємо оператор $\mathcal{L} \colon L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Omega)) \times L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Gamma_1)) \to L^2(\Omega)$, що діє за правилом: кожній парі (f, h) з декартового добутку $L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Omega)) \times L^2_{\omega,1/\alpha}(S; L^2(\Gamma_1))$ відповідає значення $y(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$ розв'язку $y \in L^2_{\omega,\alpha}(S; \widetilde{H}^1(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$ задачі (5), (21), (8). Очевидно, що оператор $\mathcal{L}$ є лінійним і, згідно з нашими припущеннями (зокрема, $\omega < 1$) та твердженням 1 (див. (24)), — неперервним. Крім того, $y(v)|_{t=0} = \mathcal{L}(f, g+v)$, де $y(x,t,v)$, $(x,t) \in Q$, — розв'язок задачі (5), (6), (8).

Нехай v, w — довільні елементи U. Тоді згідно з (9) маємо

$$\begin{aligned} J(v+w) - J(v) &= \|y(v+w)|_{t=0} - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v+w\|^2_U - \|y(v)|_{t=0} - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|v\|^2_U = \\ &= \|\mathcal{L}(f, g+v+w) - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v+w\|^2_U - \|\mathcal{L}(f, g+v) - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|v\|^2_U = \\ &= \|\mathcal{L}(f, g+v) - z_0 + \mathcal{L}(0, w)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v+w|^2_U - \|\mathcal{L}(f, g+v) - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \mu\|v|^2_U = \\ &= \|\mathcal{L}(f, g+v) - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\big(\mathcal{L}(f, g+v) - z_0, \mathcal{L}(0, w)\big)_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{L}(0, w)\|^2_{L^2(\Omega)} - \\ &\quad - \|\mathcal{L}(f, g+v) - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|v\|^2_U + 2\mu(v, w)_U + \mu\|w\|^2_U - \mu\|v\|^2_U = \\ &= 2\big(\mathcal{L}(f, g+v) - z_0, \mathcal{L}(0, w)\big)_{L^2(\Omega)} + 2\mu(v, w)_U + \|\mathcal{L}(0, w)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|w\|^2_U. \end{aligned} \tag{56}$$

З оцінки (23) при $\tau = 0$ маємо

$$\|\mathcal{L}(0, w)\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 \|w\|_U, \tag{57}$$

На підставі (56), (57) отримуємо, що функціонал J є диференційовним і його диференціал має вигляд

$$J'(v)w = 2(\mathcal{L}(f, g+v) - z_0, \mathcal{L}(0, w))_{L^2(\Omega)} + 2\mu(v, w)_U, \quad v, w \in U. \tag{58}$$

Покажемо, що функціонал J є строго опуклим, тобто, для довільних $v, w \in U$ $(v \neq w)$ та для будь-якого числа $\alpha \in (0,1)$ виконується нерівність

$$J(\alpha v + (1-\alpha)w) < \alpha J(v) + (1-\alpha)J(w). \tag{59}$$

Справді на підставі (9) маємо

$$J(\alpha v + (1-\alpha)w) = \|y(\cdot,0;\alpha v + (1-\alpha)w) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|\alpha v + (1-\alpha)w\|^2_U. \tag{60}$$

Оскільки, $\|v-w\|^2_U > 0$, то $2(v,w) < \|v|^2_U + \|v\|^2_U$, а отже, правильна нерівність

$$\begin{gathered}\|\alpha v + (1-\alpha)w\|^2_U = \alpha^2\|v\|^2_U + 2\alpha(1-\alpha)(v,w)_U + (1-\alpha)^2\|w\|^2_U < \\ < \alpha^2\|v\|^2_U + \alpha(1-\alpha)(\|v\|^2_U + \|w\|^2_U) + (1-\alpha)^2\|w\|^2_U = \alpha\|v\|^2_U + (1-\alpha)\|w\|^2_U.\end{gathered} \tag{61}$$

Використовуючи лінійність оператора $\mathcal{L}$, отримаємо

$$\begin{gathered}\|y(\cdot,0;\alpha v + (1-\alpha)w) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\mathcal{L}(f, g + \alpha v + (1-\alpha)w) - z_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \\ = \|\mathcal{L}(\alpha f, \alpha(g+v)) - \alpha z_0 + \mathcal{L}((1-\alpha)f, (1-\alpha)(g+w)) - (1-\alpha)z_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \\ = \|\alpha(\mathcal{L}(f,g+v) - z_0) + (1-\alpha)(\mathcal{L}(f,g+w) - z_0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \\ = \|\alpha\big(y(\cdot,0;v) - z_0(\cdot)\big) + (1-\alpha)\big(y(\cdot,0;w) - z_0(\cdot)\big)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\ \leq \alpha\|y(\cdot,0;v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\alpha)\|y(\cdot,0;w) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{gathered} \tag{62}$$

З (60) на підставі (61) та (62) отримаємо (59). Отож, ми переконалися, що виконуються умови твердження 3 для функціоналу визначеного в (9). Звідси, отримаємо існування та єдиність оптимального керування $u \in U_\partial$ та виконання нерівності (55). Враховуючи (58) нерівність (55) можна записати $(\mathcal{L}(f, g+u) - z_0, \mathcal{L}(0, v-u)_{L^2(\Omega)} + \mu(v, v-u)_U \geq 0 \;\; \forall\, v \in U_\partial$.

З цієї нерівності, враховуючи лінійність $\mathcal{L}$, отримуємо нерівність $(\mathcal{L}(f, g+u) - z_0,$ $\mathcal{L}(f, g+v) - \mathcal{L}(f, g+u))_{L^2(\Omega)} + \mu(u, v-u)_U \geq 0 \;\; \forall\, v \in U_\partial$, яка еквівалентна нерівності $(y(\cdot,0;u) - z_0(\cdot), y(\cdot,0;v) - y(\cdot,0;u))_{L^2(\Omega)} + \mu(u, v-u)_U \geq 0 \;\; \forall\, v \in U_\partial$. Отже, у нашому випадку нерівність, що характеризує оптимальне керування має вигляд

$$\begin{gathered}\int_\Omega (y(x,0;u) - z_0(x))(y(x,0;v) - y(x,0;u))dx + \\ + \mu \iint_{\Sigma_1} [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} u(x,t)(v(x,t) - u(x,t))d\Sigma \geq 0, \quad v \in U_\partial.\end{gathered} \tag{63}$$

Зауважимо, що з означення функції $y(v)$ (див. інтегральну тотожність (7)) отримаємо тотожність

$$\begin{gathered}-\iint_Q (y(v) - y(u))\psi\varphi' dxdt + \iint_Q \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y(v) - y(u))_{x_i}\psi_{x_j} + a_0(y(v) - y(u))\psi\Big)\varphi dxdt = \\ = \iint_{\Sigma_1} (v-u)\psi\varphi d\Gamma dt, \quad \psi \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \varphi \in C^1_c(-\infty, 0).\end{gathered} \tag{64}$$

Далі використаємо задачу на спряжений стан при оптимальному керуванні u, тобто задачу (11), (12), (14) при $v = u$ і для скорочення записів писатимемо p або $p(x,t)$, $(x,t) \in Q$, замість $p(u)$ чи $p(x,t;u)$, $(x,t) \in Q$.

Нехай $\tau < 0$ — довільне число. До інтегральних тотожностей (64) та (13) застосуємо наслідок 1 при $\tau_1 = \tau, \tau_2 = 0$, $z_1 = y(v) - y(u)$, $z_2 = p$ і $\theta = 1$. У результаті отримаємо $\int_\Omega p(y(v) - y(u))dx|_{t=\tau}^{t=0} = \int_\tau^0\int_{\Gamma_1}(v-u)pd\Gamma dt$, тобто

$$\int_\Omega p(x,0)(y(x,0;v) - y(x,0;u))dx = \int_\Omega p(x,\tau)(y(x,\tau;v) - y(x,\tau;u))dx + \int_\tau^0\int_{\Gamma_1}(v-u)pd\Gamma dt. \tag{65}$$

Покажемо, що в (65) можна перейти до границі при $\tau \to -\infty$. Справді, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\Big|\int_\Omega p(x,\tau)(y(x,\tau;v) - y(x,\tau;u))dx\Big| \le$$
$$\le \int_\Omega \Big|e^{-\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}p(x,\tau)\Big|\Big|e^{\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}(y(x,\tau;v) - y(x,\tau;u))\Big|dx \le$$
$$\le \Big(\int_\Omega e^{-2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\big|p(x,\tau)\big|^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega e^{2\omega\int_0^\tau \alpha(s)ds}\big|(y(x,\tau;v) - y(x,\tau;u))\big|^2dx\Big)^{1/2}. \tag{66}$$

Застосувавши до першого множника в правій частині нерівності (66) оцінку (49), а до другого — умову (8), отримаємо $|\int_\Omega p(x,\tau)(y(x,\tau;v) - y(x,\tau;u))dx| \le \gamma(\tau)\int_\Omega |p(x,0)|^2dx$, де γ — функція така, що $\gamma(\tau) \to 0$ при $\tau \to -\infty$.

Тепер розглянемо другий доданок правої частини рівності (65). Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$\int_\tau^0\int_{\Gamma_1}|(v-u)p|d\Gamma dt \le \int_\tau^0\int_{\Gamma_1}|v-u|\cdot|p|d\Gamma dt \le$$
$$\le \int_\tau^0\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1/2}e^{\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|v-u|\cdot[\alpha(t)]^{1/2}e^{-\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|p|d\Gamma dt \le$$
$$\le \Big(\int_\tau^0\int_{\Gamma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|v-u|^2d\Gamma dt\Big)^{1/2}\Big(\int_\tau^0\int_{\Gamma_1}\alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}|p|d\Gamma dt\Big)^{1/2}.$$

На підставі (50) та того, що $v, u \in U_\partial$, можна зробити висновок про збіжність другого доданку правої частини рівності (65), а отже, в рівності (65) можна перейти до границі при $\tau \to -\infty$, що в результаті дає тотожність

$$\int_\Omega p(x,0)(y(x,0;v) - y(x,0;u))dx = \iint_{\Sigma_1}(v-u)pd\Gamma dt, \quad v \in U. \tag{67}$$

Використовуючи (14) при $v = u$, подамо (63) у вигляді $\int_\Omega p(x,0)(y(x,0;v) - y(x,0;u))dx + \mu\iint_{\Sigma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}u(x,t)(v(x,t) - u(x,t))d\Gamma dt \ge 0,\ v \in U_\partial$. На підставі (67) приходимо до висновку, що остання нерівність еквівалентна до нерівності $\iint_{\Sigma_1}[\alpha(t)]^{-1}e^{2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}\times$ $\times\big(\widetilde{p}(u) + \mu u\big)\big(v-u\big)d\Gamma dt \ge 0, \quad v \in U_\partial$, тобто $(\widetilde{p}(u) + \mu u, v-u)_U \ge 0$ для всіх $v \in U_\partial$, де $\widetilde{p}(u) = \widetilde{p}(x,t;u) = \alpha(t)e^{-2\omega\int_0^t\alpha(s)ds}p(x,t;u),\ (x,t) \in Q$. $\square$

Література

1. Lions J.-L. Optimal control of systems described by partial differential equations. – M.: Mir, 1972. (in Russian)
2. Boltyanskiy V.G. Mathematical methods of optimal control. – M.: Nauka, 1969. (in Russian)
3. Balakrishnan V. Semigroup theory and control theory. – Washington, 1965.
4. Butkovsky A.G. Methods for control of systems with distributed parameters. – M.: Nauka, 1975. – 568 p. (in Russian)
5. Zgurovsky M.Z., Melnyk V.S., Novikov A.N. Applied methods of analysis and control of nonlinear processes and fields. – K.: Naukova dumka, 2004. – 590 p. (in Russian)
6. Zuliang L. *Existance and uniquiness of second order parabolic bilinear optimal control problems*// Lobachevskii Journal of mathematics. – 2011. – V.32, №4. – P. 320–327.
7. Bushuev I.V. *On a class of optimal control problems for parabolic equations*// Siberean Mathematical Journal. – 1994. – V.35, №5.
8. Casas E., Vexler B., Zuazua E. Sparse initial data identification for parabolic pde and its finite element approximations. – Mathematical Control and Related Fields, V.5, №3, 2015.
9. Gong W., Hinze M., Zhou Z. A finite element method for Dirichlet boundary control problems governed by parabolic PDEs. – Hamburger Beitrage zur Angewandten Mathematik, №2014-21, 2014.
10. Belgacem F.B., Bernardi Ch., Fekih H., Metoui H. *On the Dirichlet boundary control of the heat equation with a final observation Part I: A space-time mixed formulation and penalization* // hal.archives-ouvertes.fr/hal-00400226/document.
11. Gorbonos S.O., Kogut P.I. *On pathological solutions to an optimal boundary control problem for linear parabolic equation*// Kibernetyka i Vychsl. technyka. – 2014. – V.176. – P. 5–18. (in Russian)
12. D. Homberg, K. Krumbiegel, J. Rehberg *Optimal control of a parabolic equation with dynamic boundary condition*// Applied Mathematics & Optimization. – 2013. – V.67, №1. – P. 3–31.
13. Pukalskyi I.D. *Nonlocal boundary-value problem with degeneration and optimal control problem for linear parabolic equations*// Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – V.184, №1. – P. 19–35.
14. Akimenko V.V., Nakonechnyi A.G., Trofimchuk O.Yu. *An optimal control model for a system of degenerate parabolic integro-differential equations* // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – V.43, №6. – P. 838–847.
15. Vlasenko L.A., Samoilenko A.M. *Optimal control with impulsive component for systems described by implicit parabolic operator differential equations*// Ukr. Math. Jour. – 2009. – V.61, №8, P. 1250–1263.
16. Bokalo M. *Optimal control of evolution systems without initial conditions*// Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2010. – V.73. – P. 85–113. (in Ukrainian)
17. Bokalo M. M. *Optimal control problem for evolution systems without initial conditions*// Nonlinear boundary problem. – 2010. – V.20. – P. 14–27. (in Ukrainian)
18. Bokalo M. M., Buhrii O. M., Mashiyev R. A. *Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*// Journal of nonlinear evolution equations and applications. – 2014. – V.13, №6. – P. 67–87.
19. Bokalo M., Lorenzi A. *Linear evolution first-order problems without initial conditions*// Milan Journal of Mathematics. – 2009. – V.77. – P. 437–494.
20. Showalter R. E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Amer. Math. Soc., V.49, Providence, 1997.

Ivan Franco National University of Lviv
amtseb@gmail.com

Надійшло 16.04.2015