УДК 517.9

С. В. Літинський, А. О. Музичук

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗАПІЗНЮЮЧИХ ПОВЕРХНЕВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАҐЕРА

S. V. Litynskyy, A. O. Muzychuk. *Solving of initial-boundary value problems for the wave equation using retarded surface potential and Laguerre transform*, Mat. Stud. **44** (2015), 185–203.

Approach for solving of initial-boundary value problems for the homogeneous wave equation is described and proved. It is based on the Laguerre transform in the time domain and the boundary integral equations. Retarded potentials are used for representation of generalized solutions of such problems. The densities of retarded potentials are expanded in Fourier-Laguerre series which coefficients have special convolution form. As a result, initial-boundary value problems are reduced to a sequence of boundary integral equations.

С. В. Литынский, А. Е. Музычук. *Решение смешанных задач для волнового уравнения с использованием запаздывающих поверхностных потенциалов и преобразования Лагерра* // Мат. Студії. – 2015. – Т.44, №2. – С.185–203.

Для решения смешанных задач для однородного волнового уравнения описан и обоснован подход, который базируется на интегральном преобразовании Лагерра по временной переменной и граничных интегральных уравнениях. Для представления обобщенных решений таких задач используются запаздывающие поверхностные потенциалы, плотности которых ищут в виде ряда Фурье-Лагерра. Для коэффициентов разложения получены аналитические формулы и исходные задачи сведены к последовательности граничных интегральных уравнений.

1. Вступ. Запізнюючі потенціали використовують для інтегрального зображення класичних ([28]) і узагальнених ([2, 3, 9]) розв'язків мішаних задач для хвильового рівняння в областях загального вигляду. Вони дають змогу замінити мішані задачі для хвильового рівняння еквівалентними залежними від часової змінної граничними інтегральними рівняннями (ЧГІР), у яких невідомі величини — густини потенціалів — визначаються в кожен момент часу лише на межі області ([7, 11, 21, 17, 27]).

Відзначимо, що існування та єдиність розв'язків ЧГІР досліджено в працях [2, 3] з використанням перетворення Лапласа за часовою змінною у широких функційних просторах. Там же обгрунтовано метод Гальоркіна для чисельного розв'язування таких інтегральних рівнянь. Разом з тим, в працях [11, 4] відзначено складність алгоритмів

2010 *Mathematics Subject Classification:* 31B10, 35D30, 35J50, 35J57, 45B05.
Keywords: initial-boundary value problem; wave equation; Sobolev spaces; generalized solution; retarded surface potentials; Laguerre transform; time domain boundary integral equations.
doi:10.15330/ms.44.2.185-203

реалізації цього методу та пов'язані з цим вимоги до обчислювальних ресурсів. Причиною є залежність густин потенціалів від часової і просторових змінних, яка у задачах акустики зумовлена скінченною швидкістю поширення коливань і має назву запізнення. Тому зручнішими є підходи, коли використовують традиційну дискретизацію за просторовими змінними (наприклад, метод граничних елементів), а для врахування залежності від часу розв'язують допоміжні задачі. Зокрема, це так званий метод квадратури згортки (convolution quadrature [21]), який знайшов застосування у багатьох прикладних задачах. Він базується на використанні стійких методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

У даній роботі для розв'язування мішаних задач для однорідного хвильового рівняння описано і обґрунтовано підхід, який базується на інтегральному перетворенні Лаґера за часовою змінною і методі ГІР з використанням запізнюючих поверхневих потенціалів, густину яких шукають у вигляді ряду за поліномами Лаґера. Структура роботи така. Опис методу на прикладі задачі Діріхле для хвильового рівняння подано у другому розділі. У третьому розділі введено потрібні функційні простори, визначено q-згортку нескінченних послідовностей та дано означення узагальненого розв'язку мішаної задачі для однорідного хвильового рівняння і наведено основні результати цієї роботи. У четвертому розділі дано означення перетворення Лаґера для випадку функцій, які набувають значення у гільбертових просторах, і досліджено деякі властивості такого перетворення. У п'ятому розділі узагальнено класичне поняття запізнюючого потенціалу простого шару, а також виведено формулу для коефіцієнтів розвинення цього потенціалу в ряд Фур'є-Лаґера. В останньому шостому розділі безпосередньо обґрунтовано основний результат даної роботи.

2. Опис методу. Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^3$ з ліпшицевою компактною межею Γ, $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$, $Q := \Omega\times\mathbb{R}_+$, $\Sigma := \Gamma\times\mathbb{R}_+$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, яка задовольняє (в певному сенсі) однорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

однорідні початкові умови

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad x\in\Omega, \tag{2}$$

і крайову умову Діріхле

$$u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma. \tag{3}$$

Тут $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3}\partial^2/\partial x_i^2$ — диференціальний оператор Лапласа.

Для розв'язування задачі (1)–(3) використовуватимемо запізнюючий потенціал простого шару

$$(\mathcal{S}\mu)(x,t) := \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(y,t-|x-y|)}{|x-y|}d\Gamma_y, \quad (x,t)\in\overline{Q}, \tag{4}$$

де $\mu\colon \Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — густина.

Відомо (див., наприклад, [28]), що якщо функція $\mu(y,\tau)$, $(y,\tau)\in\Gamma\times\mathbb{R}$, є достатньо гладкою і $\mu(y,\tau)=0$ при $y\in\Gamma,\tau\le 0$, то функція

$$u(x,t) := (\mathcal{S}\mu)(x,t), \quad (x,t)\in\overline{Q}, \tag{5}$$

задовольняє в класичному сенсі хвильове рівняння (1) і початкові умови (2). Для того, щоб функція u задовольняла крайову умову (3) потрібно, щоб функція μ була розв'язком такого залежного від часу граничного інтегрального рівняння (ЧГІР)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mu(y,t-|x-y|)}{|x-y|}d\Gamma_y = g(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma. \tag{6}$$

Для знаходження розв'язку рівняння (6) використаємо перетворення Лаґера, а саме, розвинення функцій у ряди Фур'є-Лаґера за поліномами Лаґера $\{L_j(\sigma\cdot)\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\sigma>0$ — параметр. Як відомо (див., наприклад, [14]), система поліномів Лаґера є ортогональним базисом у просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$ функцій $v\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ таких, що $\int_{\mathbb{R}_+}|v(\tau)|^2 e^{-\sigma\tau}d\tau<\infty$, а отже, $v(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty} v_j\, L_j(\sigma\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}_+$, де $v_j := \sigma\int_{\mathbb{R}_+} v(\tau)\, L_j(\sigma\tau)\ e^{-\sigma\tau}d\tau$ $(j\in\mathbb{N}_0)$ — коефіцієнти Фур'є-Лаґера функції v.

Отож, розв'язок ЧГІР (6) шукаємо у такому вигляді

$$\mu(y,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu_j(y)\,L_j(\sigma\tau), & y\in\Gamma,\ \tau\in\mathbb{R}_+;\\ 0, & y\in\Gamma,\ \tau\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}_+,\end{cases} \tag{7}$$

де μ_j $(j\in\mathbb{N}_0)$ — відповідні коефіцієнти Фур'є-Лаґера невідомої функції μ.

На підставі (7) і властивостей поліномів Лаґера для довільного $a>0$ маємо розвинення

$$\mu(y,t-a)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\mu}_j(y,a)\,L_j(\sigma t),\ \ y\in\Gamma,\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{8}$$

де $\tilde{\mu}_j(y,a)$ обчислюють за формулою

$$\tilde{\mu}_j(y,a)=e^{-\sigma a}\sum_{i=0}^{j}\zeta_{j-i}(\sigma a)\,\mu_i(y), \qquad j\in\mathbb{N}_0, \tag{9}$$

використовуючи позначення

$$\zeta_0(s):=1,\ \ \zeta_k(s):=L_k(s)-L_{k-1}(s),\ \ s\in\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty), \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Врахувавши (8) і (9), отримаємо

$$\mu(y,t-|x-y|)=e^{-\sigma|x-y|}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\zeta_{j-i}(\sigma|x-y|)\,\mu_i(y)\right)L_j(\sigma t), \qquad x,y\in\Gamma,\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Подамо функцію g у вигляді суми ряду Фур'є-Лаґера

$$g(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}g_j(x)\,L_j(\sigma t), \qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{12}$$

де $g_j(x) = \sigma\int_{\mathbb{R}_+} g(x,\tau)\,L_j(\sigma\tau)\ e^{-\sigma\tau}d\tau$, $x\in\Gamma$, $j\in\mathbb{N}_0$. Врахувавши (11) і (12), з (6), прирівнюючи вирази при поліномах Лаґера з однаковими номерами, для знаходження коефіцієнтів Фур'є-Лаґера $\mu_0,\ \mu_1, \ldots,\ \mu_j, \ldots$ густини μ отримаємо нескінченну трикутну систему ГІР

$$\int_\Gamma \sum_{i=0}^{j} \mu_i(y) e_{j-i}(x-y)\, d\Gamma_y = g_j(x), \qquad x \in \Gamma,\ j \in \mathbb{N}_0, \tag{13}$$

де

$$e_k(z) := (4\pi|z|)^{-1} \zeta_k(\sigma|z|) e^{-\sigma|z|} \ \text{ при } \ z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Відмітимо, що в точці $z = 0$ функція e_0 має інтегровну особливість, а для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція e_k має усувну особливість, тобто, її можна довизначити в точці $z = 0$ так, що вона буде неперервною на $\mathbb{R}^3$.

Легко бачити, що систему (13) можна записати у вигляді рекурсивної послідовності рівнянь

$$\begin{cases} \int_\Gamma \mu_0(y) e_0(x-y)\, d\Gamma_y = g_0(x), \\ \int_\Gamma \mu_1(y) e_0(x-y)\, d\Gamma_y = \tilde{g}_1(x), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \int_\Gamma \mu_j(y) e_0(x-y)\, d\Gamma_y = \tilde{g}_j(x), \quad j \in \mathbb{N}, \quad x \in \Gamma, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \tag{15}$$

де

$$\tilde{g}_j(x) := g_j(x) - \int_\Gamma \sum_{i=0}^{j-1} \mu_i(y) e_{j-i}(x-y) d\Gamma_y, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Для кожного $j \in N_0$ j-е рівняння послідовності (15) є рівнянням Фредгольма першого роду з інтегровною особливістю в ядрі, тобто, має вигляд

$$\int_\Gamma \xi(y) e_0(x-y)\, d\Gamma_y = h(x), \quad x \in \Gamma. \tag{17}$$

Відомо ([6, 13]), що рівняння (17) має єдиний розв'язок ξ для функції h з досить широкого класу. Для знаходження розв'язку такого рівняння можна використати відомі числові методи, зокрема, метод граничних елементів (див., наприклад, [31] і наведені там посилання).

Якщо ми розв'яжемо систему (13) (що те саме — систему (15)), то на підставі (4), (5) і (11) розв'язок задачі (1)–(3) можна подати у вигляді суми ряду

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_\Gamma \frac{e^{-\sigma|x-y|}}{|x-y|} \sum_{i=0}^{j} \mu_i(y) \zeta_{j-i}(\sigma|x-y|)\, d\Gamma_y \right) L_j(\sigma t), \ \ (x,t) \in \overline{Q}. \tag{18}$$

Ввівши позначення

$$u_j(x) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{e^{-\sigma|x-y|}}{|x-y|} \sum_{i=0}^{j} \mu_i(y) \zeta_{j-i}(\sigma|x-y|)\, d\Gamma_y, \ \ x \in \Omega,\ j \in \mathbb{N}_0, \tag{19}$$

формулу (18) можна записати так

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)\, L_j(\sigma t), \ \ (x,t) \in \overline{Q}. \tag{20}$$

Зауважимо, що при чисельному розв'язуванні задачі (1)–(3) її наближений розв'язок можна отримати як частинну суму ряду (20), обмежуючись $N+1$ доданком. Для цього вибирають (з певних міркувань) значення параметра N і знаходять наближені розв'язки μ_0, $\mu_1, \ldots, \mu_N$ послідовності ГІР (15). Далі обчислюють функцій $u_0(x)$, $u_1(x), \ldots, u_N(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, за формулою (19). Після цього знаходять значення наближеного розв'язку задачі (1)–(3) за формулою

$$\widetilde{u}_N(x,t) = \sum_{j=0}^{N} u_j(x)\, L_j(\sigma t), \quad (x,t) \in \overline{Q}. \tag{21}$$

Описаний метод розв'язування задачі (1)–(3) є вдосконаленням способів розв'язування цієї задачі, запропонованих в працях [5, 12, 10, 18, 22, 27]. Відмітимо, що в цих працях немає обґрунтування методів розв'язування. У даній роботі ми обґрунтуємо описаний вище метод.

3. Варіаційне формулювання задачі (1)–(3). Спочатку введемо потрібні нам далі позначення. Нехай $L^2(\Omega)$ — простір Лебега інтегровних з квадратом функцій $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ зі скалярним добутком $(v,w)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega vw dx, \quad v,w \in L^2(\Omega)$, і нормою $\|v\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{(v,v)_{L^2(\Omega)}}$, а $H^1(\Omega)$ — простір Соболєва функцій $v \in L^2(\Omega)$, які мають узагальнені похідні $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}$ з $L^2(\Omega)$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega (\nabla v \nabla w + vw)\, dx, \quad v,w \in H^1(\Omega),$$

та нормою $\|v\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{(v,v)_{H^1(\Omega)}}$, $v \in H^1(\Omega)$. Позначимо $H^{1/2}(\Gamma)$ простір слідів елементів $H^1(\Omega)$ на поверхні Γ, $\gamma_0\colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор сліду, $H^{-1/2}(\Gamma) := \big(H^{1/2}(\Gamma)\big)'$ — спряжений до $H^{1/2}(\Gamma)$ простір, $\langle \cdot,\cdot \rangle_\Gamma$ — відношення двоїстості на $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Нехай X — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$, $\sigma > 0$ — яке-небудь число. Позначимо через $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$ ваговий простір Лебега [8] з вагою $\rho_\sigma(t) = e^{-\sigma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, елементами якого є вимірні функцій $v\colon \mathbb{R}_+ \to X$ такі, що $\int_{\mathbb{R}_+} \|v(t)\|_X^2\, e^{-\sigma t} dt < \infty$, зі скалярним добутком

$$(v,w)_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \int_{\mathbb{R}_+} \big(v(t), w(t)\big)_X\, e^{-\sigma t} dt, \quad v,w \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X), \tag{22}$$

і нормою

$$\|v\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \sqrt{(v,v)_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)}}, \quad v \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X). \tag{23}$$

Зазначимо, що простір $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$ є повним ([29, розділ II.1]). Вважатимемо також, що елементи простору $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$ продовжені нулем для недодатніх значень аргумента.

Для довільного $m \in \mathbb{N}$ визначимо ваговий простір Соболєва

$$H^m_\sigma(\mathbb{R}_+;X) := \{v \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X) \mid v^{(k)} \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X),\ k = \overline{1,m}\} \tag{24}$$

з нормою

$$\|v\|_{H^m_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \left(\sum_{k=0}^{m} \big\|v^{(k)}\big\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} \right)^{1/2}. \tag{25}$$

Тут похідні $v^k (k \in \mathbb{N})$ розуміємо в сенсі простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+; X)$, елементами якого є розподіли зі значеннями у просторі X. Відзначимо, що $H^1_\sigma(\mathbb{R}_+; X) \subset C(\overline{\mathbb{R}_+}; X)$ ([8, теорема 7, розділ XVIII]).

Визначимо ще такі простори:

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; X) := \{v \colon \mathbb{R}_+ \to X - \text{ вимірна } \mid \ \|v(\cdot)\|_X \in L^2(0,\tau) \ \ \forall \tau > 0\},$$

$$H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; X) := \{v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; X) \mid \ v' \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; X)\}.$$

Означення 1. Нехай $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; H^{1/2}(\Gamma))$. *Узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3) називатимемо функцію $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; L^2(\Omega)) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}_+}; H^1(\Omega))$, яка задовольняє першу з початкових умов (2), крайову умову

$$\gamma_0 u(\cdot, t) = g(\cdot, t) \ \text{ для м.в. } t \in \mathbb{R}_+ \tag{26}$$

та інтегральну тотожність

$$\iint_Q \big(u'v' - \nabla u \nabla v\big) dxdt = 0 \tag{27}$$

для будь-яких $v \in H^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ таких, що $\operatorname{supp} v$ — обмежена множина і $\gamma_0 v(\cdot, t) = 0$ для м.в. $t \in \mathbb{R}_+$.

Зазначимо, що за теоремою 1 в монографії [26, гл. V, §2], задача (1)–(3) може мати не більше одного узагальненого розв'язку. Існування ж узагальненого розв'язку можна довести методом Фаедо-Гальоркіна ([16, гл. IV, §3]).

Введемо ще деякі позначення. Під послідовністю елементів множини X розуміємо відображення $\mathbf{V} \colon \mathbb{N}_0 \to X$ (позначаємо "жирною" літерою) і записуємо його у вигляді вектора-стовпця $\mathbf{v} := (v_0, v_1, \ldots)^\top$. Множину всеможливих послідовностей елементів множини X позначимо через X^∞. Ясно, що коли X — лінійний простір, то і X^∞ також лінійний простір. Нагадаємо, що $l^2 := \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{j=0}^\infty |v_j|^2 < +\infty\big\}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^\infty v_j w_j$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in l^2$, і нормою $\|\mathbf{v}\|_{l^2} := (\sum_{j=0}^\infty |v_j|^2)^{1/2}$, $\mathbf{v} \in l^2$.

Нехай X — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$. Будемо розглядати гільбертів простір $l^2(X) := \big\{\mathbf{v} \in X^\infty \mid \sum_{j=0}^\infty \|v_j\|^2_X < +\infty\big\}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^\infty (v_j, w_j)_X$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in l^2(X)$, і нормою $\|\mathbf{v}\|_{l^2(X)} := (\sum_{j=0}^\infty \|v_j\|^2_X)^{1/2}$, $\mathbf{v} \in l^2(X)$. Очевидно, що $l^2 = l^2(\mathbb{R})$.

Означення 2. ([19]) Нехай X, Y, Z — які-небудь множини, $q \colon X \times Y \to Z$ — деяке відображення. Під *q-згорткою* послідовностей $\mathbf{u} \in X^\infty$ і $\mathbf{v} \in Y^\infty$ розумітимемо послідовність $\mathbf{w} := (w_0, w_1, \ldots, w_j, \ldots)^\top \in Z^\infty$, члени якої знаходять за правилом

$$w_j := \sum_{i=0}^{j} q\left(u_{j-i}, v_i\right) \equiv \sum_{i=0}^{j} q\left(u_i, v_{j-i}\right), \quad j \in \mathbb{N}_0; \tag{28}$$

q-згортку $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ коротко записують у вигляді $\mathbf{w} = \mathbf{u} \underset{q}{\circ} \mathbf{v}$.

Нехай $X = \mathbb{R}$, а $Y = Z$ — лінійні простори і $q(u, v) := uv$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in Y$. Тоді компоненти q-згортки довільних послідовностей $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^\infty$ і $\mathbf{v} \in Y^\infty$ матимуть зображення

$$w_j = \sum_{i=0}^{j} u_{j-i} v_i, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tag{29}$$

а згортку позначатимемо через $\mathbf{w} := \mathbf{u} \underset{\mathbb{R}\times Y}{\circ} \mathbf{v}$.

У випадку $X = H^{-1/2}(\Gamma)$, $Y = H^{1/2}(\Gamma)$, $Z = \mathbb{R}$ і $q(u,v) := \langle u, v\rangle_\Gamma$, $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $v \in H^{1/2}(\Gamma)$, для компонентів q-згортки довільних послідовностей $\mathbf{u} \in \big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)^\infty$ і $\mathbf{v} \in \big(H^{1/2}(\Gamma)\big)^\infty$ матимемо формулу

$$w_j = \sum_{i=0}^{j} \langle u_{j-i}, v_i\rangle_\Gamma, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tag{30}$$

і писатимемо $\mathbf{w} := \mathbf{u} \underset{\Gamma}{\circ} \mathbf{v}$.

Тепер зауважимо, що на підставі сказаного вище послідовність $\mathbf{u} := (u_0, u_1, \ldots u_j, \ldots)^\top$, визначена формулою (19), є q-згорткою

$$\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{\mu}(\cdot) \underset{\Gamma}{\circ} \mathbf{e}(x - \cdot), \quad x \in \Omega, \tag{31}$$

де $\boldsymbol{\mu}$ — послідовність коефіцієнтів Фур'є-Лаґера функції μ, а функційна послідовність $\mathbf{e}$ задана формулою (14). Міркуючи аналогічно, систему ГІР (13) можна переписати так

$$\boldsymbol{\mu}(\cdot) \underset{\Gamma}{\circ} \mathbf{e}(x - \cdot) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \Gamma, \tag{32}$$

де $\mathbf{g}$ — послідовність коефіцієнтів Фур'є-Лаґера функції g.

Тепер можемо сформулювати основний результат даної статті у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай $g \in H^{m+4}_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ для деяких $\sigma_0 > 0$ і $m \in \mathbb{N}_0$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), він належить простору $H^{m+1}_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і для довільного $\sigma \geq \sigma_0$ правильна така його оцінка*

$$\|u\|_{H^{m+1}_\sigma(\mathbb{R}_+;H^1(\Omega))} \leq C\|g\|_{H^{m+4}_\sigma(\mathbb{R}_+;H^{1/2}(\Gamma))}, \tag{33}$$

де $C > 0$ — стала, яка від g не залежить.

Крім того, узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) можна подати у вигляді суми ряду (20), збіжного в просторі $L^2_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$, де $u_j \in H^1(\Omega)$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ є відповідними компонентами q-згортки (31), а елементи послідовності $\boldsymbol{\mu} \in l^2(H^{-1/2}(\Gamma))$ є розв'язками системи ГІР (32), в якій $\mathbf{g} \in l^2(H^{1/2}(\Gamma))$ — послідовність коефіцієнтів Фур'є-Лаґера функції g.

4. Перетворення Лаґера. Нагадаємо, що система поліномів Лаґера $\{L_k(\sigma\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ є ортогональним базисом у просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$, тобто довільна функція $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$ має розвинення

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, L_k(\sigma t), \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{34}$$

де коефіцієнти $f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots$ виражаються єдиним чином за формулою

$$f_k := \sigma \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\, L_k(\sigma t)\, e^{-\sigma t} dt, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{35}$$

Відображення $\mathcal{L}\colon L^2_\sigma(\mathbb{R}_+) \to l^2$, яке ставить у відповідність функції f послідовність $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots)^\top$, компоненти якої визначені за формулою (35), називають дискретним інтегральним перетворенням Лаґера ([14, 15]) і використовують також позначення $\mathcal{L}_k f \equiv (\mathcal{L}f)(k) := f_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Крім того, виконується рівність Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^2 \, e^{-\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2. \tag{36}$$

Перетворення Лаґера $\mathcal{L}$ є бієктивним відображенням і обернене до нього $\mathcal{L}^{-1}\colon l^2 \to L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$ задається для довільного $\mathbf{h} \in l^2$ так

$$(\mathcal{L}^{-1}\mathbf{h})(t) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k \, L_k(\sigma t), \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{37}$$

Очевидно, що для будь-якої функції $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$ виконується рівність

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}f = f. \tag{38}$$

Узагальнимо поняття перетворення Лаґера на випадок векторнозначних функцій. Для цього будемо розглядати відображення $\mathcal{L}\colon L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; X) \to X^\infty$, де X — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і породженою ним нормою $\|\cdot\|_X$, яке діє за правилом (35). Зазначимо, що оскільки функція $t \mapsto \|f(t)\|_X |L_k(\sigma t)| e^{-\sigma t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то інтеграл Бохнера у формулі (35) є збіжним і його значення є елементом простору X.

Теорема 2. *Відображення $\mathcal{L}\colon L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; X) \to X^\infty$, яке довільній функції f ставить у відповідність послідовність $\mathbf{f} = (f_0, \, f_1, \dots, \, f_k, \dots)^\top$ за формулою (35), є ін'єктивним і його образом є простір $l^2(X)$, причому*

$$\|f\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|^2_X. \tag{39}$$

Крім того, для довільної функції $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; X)$ маємо рівність (38), де $\mathcal{L}^{-1}\colon l^2(X) \to L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; X)$ — обернене до $\mathcal{L}$ відображення, яке довільній послідовності $\mathbf{h} = (h_0, \, h_1, \dots, h_k, \dots)^\top$ ставить у відповідність функцію h за формулою (37).

Доведення. Нехай f — довільна функція з $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; X)$ і $\{\varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ — ортонормований базис у просторі X. Оскільки $f(t) \in X$ для м.в. $t \in \mathbb{R}_+$, то розвинення в ряд Фур'є

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f^i(t) \, \varphi^i \ \text{ для м.в. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{40}$$

де

$$f^i(t) = (f(t), \varphi^i)_X, \ \ i \in \mathbb{N}_0, \tag{41}$$

є збіжним в X і є правильною рівність Парсеваля

$$\|f(t)\|^2_X = \sum_{i=0}^{\infty} |f^i(t)|^2 \ \text{ для м.в. } t \in \mathbb{R}_+. \tag{42}$$

Застосувавши нерівність Коші-Буняковського, отримаємо оцінку

$$|f^i(t)|^2 = |(f(t), \varphi^i)_X|^2 \le \|f(t)\|_X^2 \|\varphi^i\|_X^2 = \|f(t)\|_X^2 \ \text{ для м.в. } t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Отже, для кожного $i \in \mathbb{N}_0$ функція f^i належить $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$ і маємо

$$\|f^i\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} |f^i(t)|^2 \, e^{-\sigma t} dt \le \int_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|_X^2 \, e^{-\sigma t} dt = \|f\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} < \infty.$$

Тому в $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)$ отримаємо розвинення Фур'є-Лаґера

$$f^i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^i_k \, L_k(\sigma t) \ \text{ для м.в. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{43}$$

де

$$f^i_k = \sigma \int_{\mathbb{R}_+} f^i(t) \, L_k(\sigma t) \, e^{-\sigma t} dt, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{44}$$

а також є правильною рівність Парсеваля

$$\|f^i\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} |f^i_k|^2. \tag{45}$$

З рівності (42) отримаємо

$$\|f\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \int_{\mathbb{R}_+} \|f(t)\|_X^2 e^{-\sigma t} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+} |f^i(t)|^2 e^{-\sigma t} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \|f^i\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+)},$$

звідки, беручи до уваги (45), матимемо

$$\|f\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |f^i_k|^2. \tag{46}$$

Оскільки $\|f\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} < \infty$, то подвійний ряд у правій частині рівності (46) є збіжним. Беручи до уваги, що усі члени цього ряду невід'ємні, змінимо в ньому порядок сумування

$$\|f\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |f^i_k|^2 < \infty. \tag{47}$$

Тепер зазначимо, що вираз (44) ще можна подати так

$$\begin{aligned} f^i_k = \sigma \int_{\mathbb{R}_+} \big(f(t), \varphi^i\big)_X \, L_k(\sigma t) \, e^{-\sigma t} dt = \left(\sigma \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \, L_k(\sigma t) \, e^{-\sigma t} dt, \varphi^i\right)_X = \\ = \big(f_k, \varphi^i\big)_X, \quad i, k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{48}$$

а тому при кожному фіксованому $k \in \mathbb{N}_0$ значення f^i_k, $i \in \mathbb{N}_0$, є коефіцієнтами Фур'є розвинення елемента $f_k \in X$ за базисом $\{\varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, і, зокрема,

$$\|f_k\|_X^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |f^i_k|^2. \tag{49}$$

На підставі (49) з (47) отримаємо (39), тобто $\mathbf{f} \in l^2(X)$.

З (39) безпосередньо випливає ін'єктивність відображення $\mathcal{L}$. Покажемо тепер його сюр'єктивність. Нехай $\mathbf{h}$ — будь-який елемент простору $l^2(X)$, тобто

$$\|\mathbf{h}\|^2_{l^2(X)} = \sum_{k=0}^{\infty} \|h_k\|^2_X < \infty. \tag{50}$$

Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо частинну суму ряду (37):

$$\widetilde{h}_n(t) := \sum_{k=0}^{n} h_k\, L_k(\sigma t),\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{51}$$

Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$ матимемо

$$\begin{aligned} \|\widetilde{h}_{n+m} - \widetilde{h}_n\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} &= \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+m} h_k\, L_k(\sigma\cdot)\Big\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} h_k\, L_k(\sigma t),\ \sum_{j=n+1}^{n+m} h_j\, L_j(\sigma t)\right)_X e^{-\sigma t} dt = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m}\sum_{j=n+1}^{n+m} \big(h_k, h_j\big)_X \int_{\mathbb{R}_+} L_k(\sigma t) L_j(\sigma t) e^{-\sigma t} dt = \sum_{k=n+1}^{n+m} \|h_k\|^2_X. \end{aligned} \tag{52}$$

Оскільки частинні суми ряду (50) утворюють збіжну числову послідовність, а отже, і послідовність Коші, то з (52) випливає, що $\{\widetilde{h}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ також є послідовністю Коші в повному гільбертовому просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$. Тоді існує функція $h \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$, що $h = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{h}_n$.

Рівність (38) доведемо від супротивного. Нехай для деякої функції $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$ маємо $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}f = f^* \neq f$. Зі сказаного вище випливає, що $f^*_k = f_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ і $\|f - f^*\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k - f^*_k\|^2_X = 0$, тобто, отримали протиріччя. □

Означення 3. Нехай $\sigma > 0$, X — гільбертів простір. Відображення $\mathcal{L}\colon L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X) \to l^2(X)$ і $\mathcal{L}^{-1}\colon l^2(X) \to L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$, про які говориться в теоремі 2, будемо називати, відповідно, *прямим і оберненим перетвореннями Лаґера*, а формулу (39) — *рівністю Парсеваля.*

Нехай маємо довільну функцію $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$. Беручи до уваги, що вона продовжена нулем при $t \leq 0$, будемо розглядати утворені з неї "запізнюючі" функції $f(\cdot - a)$ для будь-якого $a > 0$ і дослідимо дію на них перетворення Лаґера.

Позначимо $\boldsymbol{\zeta}(a) := (\zeta_0(a), \zeta_1(a), \ldots, \zeta_k(a), \ldots)^\top$, $a > 0$, послідовність функцій, елементи якої мають вигляд (10).

Лема 1. *Нехай $\sigma > 0$, $a > 0$, X — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$. Тоді для довільної функції $f(\cdot)$ з простору $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$ функція $f(\cdot - a)$ належить простору $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$ і правильні рівності:*

$$\|f(\cdot - a)\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = e^{-\frac{\sigma a}{2}} \|f(\cdot)\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)}, \tag{53}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_a = e^{-\sigma a}\boldsymbol{\zeta}(\sigma a) \underset{\mathbb{R}\times X}{\circ} \mathbf{f}, \tag{54}$$

$$f\big(\cdot - a\big) = e^{-\sigma a} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} \zeta_{j-i}(\sigma a) f_i \right) L_j(\sigma\cdot) \text{ в } L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X), \tag{55}$$

де $\mathbf{f} = (f_0,\, f_1,\, \dots)^\top$ *і* $\tilde{\mathbf{f}}_a := (f_{a,0},\, f_{a,1},\, \dots)^\top$ *— послідовності коефіцієнтів Фур'є-Лаґера функцій, відповідно,* $f(\cdot)$ *і* $f(\cdot - a)$*.*

Доведення. Використовуючи заміну змінних $t = \tau + a$ і враховуючи, що $f(t) = 0$ при $t \le 0$, виконаємо такі перетворення

$$\|f(\cdot - a)\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \|f(t-a)\|^2_X\, e^{-\sigma t}dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-a}^{T-a} \|f(\tau)\|^2_X\, e^{-\sigma(\tau+a)}d\tau =$$
$$= e^{-\sigma a}\int_{\mathbb{R}_+} \|f(\tau)\|^2_X\, e^{-\sigma\tau}d\tau = e^{-\sigma a}\|f(\cdot)\|^2_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)}. \tag{56}$$

Оскільки $\|f(\cdot)\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} < \infty$, то з отриманої рівності випливає, що $\|f(\cdot - a)\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)} < \infty$ (тобто $f(\cdot - a) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$), а також рівність (53).

Беручи до уваги, що $L_0 \equiv 1$, легко бачити, що $\tilde{f}_{a,0} = e^{-\sigma a} f_0$. Розглянемо тепер коефіцієнт Фур'є-Лаґера $\tilde{f}_{a,j}$ для довільного $j \in \mathbb{N}$. З врахуванням заміни змінних $t = \tau + a$, можемо записати

$$\tilde{f}_{a,j} = \sigma\int_{\mathbb{R}_+} f(t-a)\, L_j(\sigma t)\, e^{-\sigma t}dt = \sigma\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t-a)\, L_j(\sigma t)\, e^{-\sigma t}dt =$$
$$= e^{-\sigma a}\sigma\lim_{T\to\infty}\int_{-a}^{T-a} f(\tau)\, L_j(\sigma\tau + \sigma a)\, e^{-\sigma\tau}d\tau = e^{-\sigma a}\sigma\int_{\mathbb{R}_+} f(\tau)\, L_j(\sigma\tau + \sigma a)\, e^{-\sigma\tau}d\tau. \tag{57}$$

Скориставшись відомим співвідношенням (див., наприклад, [10, формула (5.A13)])

$$L_j(\tau + a) = L_j(\tau) + \sum_{i=0}^{j-1}\big(L_{j-i}(a) - L_{j-i-1}(a)\big)L_i(\tau), \quad j \in \mathbb{N},\ \tau \in \overline{\mathbb{R}_+},\ a > 0, \tag{58}$$

з (58) матимемо

$$\tilde{f}_{a,j} = e^{-\sigma a} f_j + \sigma e^{-\sigma a}\sum_{i=0}^{j-1}\big(L_{j-i}(\sigma a) - L_{j-i-1}(\sigma a)\big) f_i. \tag{59}$$

Беручи до уваги позначення (10), отримаємо

$$\tilde{f}_{a,j} = e^{-\sigma a}\sum_{i=0}^{j}\zeta_{j-i}(\sigma a) f_i, \quad j \in \mathbb{N}_0, \tag{60}$$

де вираз із сумою є (відповідно до означення 2 і формули (29)) компонентом q-згортки (54). Використовуючи значення $\tilde{f}_{a,j}$ ($j \in \mathbb{N}_0$) як коефіцієнти Фур'є-Лаґера функції $f(\cdot - a)$, матимемо її розвинення у вигляді (55). □

5. Деякі властивості запізнюючого потенціалу. Щоб скористатися результатами, отриманими в праці [2] щодо побудови узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) за допомогою запізнюючого потенціалу, розглянемо ще допоміжні простори. Нехай X — довільний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$. Позначимо $\mathcal{D}'(\mathbb{R};X)$ простір розподілів зі значеннями в просторі X і $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R};X)$ — простір так званих зумовлених розподілів (causal distributions), що складається з розподілів $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R};X)$, для яких виконується умова

$\langle v, \phi \rangle = 0$ для всіх пробних функцій $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ з носієм $\operatorname{supp}\phi \subset (-\infty, 0)$. Для довільного $\sigma_0 > 0$ визначимо простір $\mathcal{L'}_{+,\sigma_0}(\mathbb{R}; X) := \{f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}; X) | e^{-\sigma_0 \cdot} f(\cdot) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}; X)\}$, де $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}; X)$ — простір повільних зумовлених розподілів.

Відзначимо, що для повільних зумовлених розподілів визначено перетворення Фур'є за часовою змінною (див., наприклад, [8, розділ XVI, §2, визначення 7])

$$\mathcal{F} \colon \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}; X) \to \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}; X), \tag{61}$$

яке є ізоморфним відображенням $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}; X)$ на $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}; X)$ і дає змогу визначити для довільного елемента $f \in \mathcal{L'}_{+,\sigma_0}(\mathbb{R}; X)$ перетворення Фур'є-Лапласа ([8, розділ XVI, §2, визначення 8])

$$\widehat{f}(\omega) := \mathcal{F}(e^{-\sigma \cdot} f(\cdot))(\eta), \quad \omega = \eta + i\sigma \in \mathbb{R} \times (\sigma_0, +\infty). \tag{62}$$

У випадку $f \in \mathcal{L'}_{+,\sigma_0}(\mathbb{R}; X) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; X)$ це перетворення визначене так:

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta t} e^{-\sigma t} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(t) dt, \quad \omega = \eta + i\sigma \in \mathbb{R} \times (\sigma_0, +\infty). \tag{63}$$

Твердження 1 ([8], розділ XVI, §2, теорема 1). *Нехай X — довільний банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ з нормою $\|\cdot\|_X$, а $\omega \mapsto \widehat{f}(\omega)$ — функція, яка визначена в $\mathbb{C}$ і набуває значення в просторі X. Для того, щоб функція $\widehat{f}(\omega)$ була перетворенням Фур'є-Лапласа розподілу $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; X)$ з носієм $\operatorname{supp} f \subset [\alpha, +\infty)$ необхідно і достатньо, щоб $\widehat{f}(\omega)$ була голоморфною в півпросторі $\mathbb{R} \times (\sigma_0, +\infty)$ зі значеннями в X і задовольняла нерівність*

$$\|\widehat{f}(\omega)\|_X \leq e^{-\sigma\alpha} \mathrm{Pol}(|\omega|), \quad \omega = \eta + i\sigma \in \mathbb{R} \times (\sigma_0, +\infty), \tag{64}$$

де $\mathrm{Pol}(|\omega|)$ — поліном від змінної $|\omega|$.

На множині $\mathcal{L'}_{+,\sigma_0}(\mathbb{R}; X)$ для довільних значень $\sigma \geq \sigma_0$ і $p \in \mathbb{R}$ будемо розглядати простір

$$\mathcal{H}^p_\sigma(\mathbb{R}_+; X) := \{ \ f \in \mathcal{L'}_{+,\sigma_0}(\mathbb{R}; X) \,|\, \int_{\mathbb{R}+i\sigma} |\omega|^{2p} \, \|\widehat{f}(\omega)\|^2_X d\omega < +\infty\} \tag{65}$$

з нормою

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p_\sigma(\mathbb{R}_+; X)} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\sigma} |\omega|^{2p} \, \|\widehat{f}(\omega)\|^2_X d\omega \right)^{1/2}. \tag{66}$$

Твердження 2 ([2], розділ 3.1). *Нехай $\sigma > 0, m \in \mathbb{N}_0$. Функція v належить простору $H^m_\sigma(\mathbb{R}_+; X)$ тоді і лише тоді, коли вона належить простору $\mathcal{H}^m_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; X)$.*

Твердження 3 ([2], теорема 2). *Нехай $g \in \mathcal{H}^{3/2}_{\sigma_0/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ при деякому $\sigma_0 > 0$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), він належить простору $H^1_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L^2_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і для нього правильна оцінка*

$$\|u\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))} \leq C_1 \|g\|_{\mathcal{H}^{3/2}_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))} \ \ \forall \sigma \geq \sigma_0, \tag{67}$$

де $C_1 > 0$ — стала.

Крім того, узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) можна подати у вигляді запізнюючого потенціалу простого шару $\mathcal{S}\mu$ з густиною $\mu \in \mathcal{H}^{-1/2}_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$, причому

$$\|\mu\|_{\mathcal{H}^{-1/2}_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C_2 \|g\|_{\mathcal{H}^{3/2}_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))} \ \ \forall \sigma \geq \sigma_0, \tag{68}$$

де $C_2 > 0$ — стала.

Наведемо схему доведення твердження 3 стосовно узагальненого розв'язку u задачі (1)–(3) з метою подальшого використання отриманих по ходу результатів для доведення теореми 1. Першим кроком є зведення за допомогою перетворення Фур'є-Лапласа задачі (1)–(3) до такої крайової задачі відносно функції $\widehat{u}(\cdot,\omega) \in H^1(\Omega)$

$$\Delta\widehat{u} + \omega^2\widehat{u} = 0 \;\text{ в } \Omega, \tag{69}$$

$$\gamma_0\widehat{u} = \widehat{g} \text{ на } \Gamma, \tag{70}$$

де $\widehat{g}(\cdot,\omega) \in H^{1/2}(\Gamma)$ — відома функція, а $\omega \in \mathbb{R} \times [\sigma_0, +\infty)$ — параметр перетворення.

Розв'язок задачі (69), (70) можна подати у вигляді потенціалу простого шару

$$\widehat{u}(x,\omega) = \big(\widehat{S}_\omega\widehat{\mu}\big)(x) := \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \widehat{\mu}(y,\omega)\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|}\,d\Gamma_y, \quad x \in \Omega, \tag{71}$$

густина $\widehat{\mu}(\cdot,\omega) \in H^{1/2}(\Gamma)$ якого є розв'язком такого ГІР

$$\widehat{V}_\omega\widehat{\mu} = \widehat{g} \text{ в } H^{1/2}(\Gamma), \tag{72}$$

де $\widehat{V}_\omega := \gamma_0\widehat{S}_\omega$. Граничний оператор $\widehat{V}_\omega$ є $H^{-1/2}$-еліптичний на Γ, звідки випливає існування та єдиність розв'язку ГІР (72).

Очевидно, що подання потенціалу простого шару у вигляді інтегралу (71) має сенс, коли густина є інтегровною з квадратом функцією. У цьому випадку для довільного фіксованого $x \in \Omega$ функція $\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|}$ є нескінченно диференційовною, тому інтеграл (71) можна трактувати як скалярний добуток в просторі $L^2(\Gamma)$, який, як відомо (див., наприклад, [1, розділ 9.2]), можна продовжити на прямий добуток $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$. Тоді, згідно з [6, теорема 1], потенціал простого шару та його слід є обмеженими операторами, відповідно, $\widehat{S}_\omega\colon H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ та $\widehat{V}_\omega\colon H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$.

Як бачимо, крайова задача (69), (70) і ГІР (72) залежать від параметра ω, тому їхні розв'язки, відповідно, $\widehat{u}(\cdot,\omega)$ і $\widehat{\mu}(\cdot,\omega)$, а також потенціал простого шару $\widehat{S}_\omega$ і граничний оператор $\widehat{V}_\omega$ можна розглядати як функції параметра ω. Доведено, що вони є голоморфними у півпросторі $\mathbb{R} \times (\sigma_0, +\infty)$ і стосовно них є правильними такі оцінки ([2, нерівності (2.3),(2.7) і (2.11)], [30, нерівність (2.18)]):

$$\|\widehat{u}(\cdot,\omega)\|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C}_1|\omega|^{3/2}\|\widehat{g}(\cdot,\omega)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{73}$$

$$\|\widehat{\mu}(\cdot,\omega)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \le \tilde{C}_2|\omega|^2\|\widehat{g}(\cdot,\omega)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{74}$$

$$\|\widehat{V}_\omega\widehat{\mu}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le \tilde{C}_3|\omega|\,\|\widehat{\mu}(\cdot,\omega)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \tag{75}$$

$$\|\widehat{S}_\omega\widehat{\mu}\|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C}_4|\omega|\,\|\widehat{\mu}(\cdot,\omega)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \tag{76}$$

де $\tilde{C}_i > 0$ — деякі сталі.

З нерівностей (73)–(76) на підставі твердження 1 випливає існування розподілів, які відповідають узагальненому розв'язку задачі (1)–(3), запізнюючому потенціалу і його густині. Вони є елементами просторів $\mathcal{L}'_{+,\sigma_0}(\mathbb{R};X)$ і набувають значення у відповідному просторі X (див. [2, теорема 1], а також [9, розділ 2]), причому $\widehat{\mathcal{S}\mu} = \widehat{S}_\omega\widehat{\mu}$ і $\widehat{\mathcal{V}\mu} = \widehat{V}_\omega\widehat{\mu}$. Крім того, за допомогою нерівностей (73)–(76) можна зробити оцінки узагальненого розв'язку задачі (1)–(3), а також запізнюючого потенціалу простого шару і його густини як елементів просторів $\mathcal{H}^p_\sigma(\mathbb{R}_+;X)$.

Як бачимо, умова на граничне значення g у твердженні 3 приводить до визначення густини μ у просторі, який є ширшим вагового простору Лебега $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$, тобто не завжди буде правомірним розвинення густини у ряд Фур'є-Лаґера. Покажемо, у яких просторах слід задавати граничне значення, щоб мати змогу застосовувати для розв'язування задачі (1)–(3) підхід, опис якого подано у другому розділі даної роботи.

Спочатку визначимо достатню умову на густину μ запізнюючого потенціалу $\mathcal{S}\mu$ і його сліду $\mathcal{V}\mu := \gamma_0\mathcal{S}\mu$ на Σ, щоб вони були елементами просторів, відповідно, $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$.

Лема 2. *Нехай $\mu \in H^{m+1}_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$ при деяких $m \in \mathbb{N}_0$ і $\sigma > 0$. Тоді $\mathcal{S}\mu \in H^m_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ та $\mathcal{V}\mu \in H^m_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$. Крім того, у просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ маємо розвинення*

$$(\mathcal{S}\mu)(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x)\, L_j(\sigma t), \quad (x,t) \in Q, \tag{77}$$

і у просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ — розвинення

$$(\mathcal{V}\mu)(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_0 u_j(x)\, L_j(\sigma t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{78}$$

де функції u_j ($j \in \mathbb{N}_0$) утворюють послідовність, яка є q-згорткою (31) послідовності $\boldsymbol{\mu}$, яка складається з коефіцієнтів Фур'є-Лаґера функції μ, і функційної послідовності $\mathbf{e}$, заданої формулою (14).

Доведення. Нехай маємо довільну функцію $\mu \in H^{m+1}_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$. Беручи до уваги твердження 2 і означення норми (66), а також використовуючи нерівність (75), отримаємо

$$\begin{aligned}\|\mathcal{V}\mu\|^2_{\mathcal{H}^m_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+;H^{1/2}(\Gamma))} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\sigma/2} |\omega|^{2m} \|\widehat{\mathcal{V}\mu}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\sigma/2} |\omega|^{2m} \|\widehat{V}_\omega \widehat{\mu}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} d\omega \le \\ &\le \frac{\tilde{C}_3^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\sigma/2} |\omega|^{2m}|\omega|^2 \|\widehat{\mu}(\cdot,\omega)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} d\omega = \tilde{C}_3^2 \|\mu\|^2_{\mathcal{H}^{m+1}_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+;H^{-1/2}(\Gamma))} < \infty.\end{aligned} \tag{79}$$

Діючи так само, але використовуючи нерівність (76), оцінимо запізнюючий потенціал

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}\mu\|^2_{\mathcal{H}^m_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+;H^{1}(\Omega))} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\sigma/2} |\omega|^{2m} \|\widehat{\mathcal{S}\mu}\|^2_{H^{1}(\Omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\sigma/2} |\omega|^{2m} \|\widehat{S}_\omega \widehat{\mu}\|^2_{H^{1}(\Omega)} d\omega \le \\ &\le \frac{\tilde{C}_4^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\sigma/2} |\omega|^{2m}|\omega|^2 \|\widehat{\mu}(\cdot,\omega)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} d\omega = \tilde{C}_4^2 \|\mu\|^2_{\mathcal{H}^{m+1}_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+;H^{-1/2}(\Gamma))} < \infty.\end{aligned} \tag{80}$$

З того, що $\mathcal{S}\mu \in \mathcal{H}^m_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і $\mathcal{V}\mu \in \mathcal{H}^m_{\sigma/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$, випливає, що $\mathcal{S}\mu \in H^m_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і $\mathcal{V}\mu \in H^m_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$, а отже і збіжність розвинень (77) та (78) у відповідних вагових просторах Лебега.

Визначимо тепер коефіцієнти зазначених розвинень. Розглянемо запізнюючий потенціал (4) у довільній точці $x \in \Omega$, припустивши спочатку, що $\mu \in H^1_\sigma(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma))$. Тоді для $\mathcal{S}\mu$ як елемента простору $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ коефіцієнти Фур'є-Лаґера мають вигляд

$$u_j(x) := \mathcal{L}_j\, \mathcal{S}\mu(x) = \frac{\sigma}{4\pi}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\sigma t} L_j(\sigma t)\bigg(\int_\Gamma \frac{\mu(y, t-|x-y|)}{|x-y|} d\Gamma_y\bigg) dt, \quad x \in \Omega. \tag{81}$$

Беручи до уваги, що точки x та y не співпадають і $\mu \in H^1_\sigma(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma))$, на підставі теореми Фубіні змінимо порядок інтегрування

$$u_j(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\sigma}{|x-y|}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \mu(y, t-|x-y|)e^{-\sigma t}L_j(\sigma t)dt\right)d\Gamma_y, \ \ x \in \Omega. \tag{82}$$

Зауважимо, що в отриманому виразі внутрішній інтеграл відповідає j-ому коефіцієнту Фур'є-Лаґера "запізнюючої" функції μ. Тому згідно з лемою 1 та формул (54) і (14) можемо записати

$$u_j(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{e^{-\sigma|x-y|}}{|x-y|}\sum_{i=0}^{j}\zeta_{j-i}(\sigma|x-y|)\mu_i(y)d\Gamma_y = \sum_{i=0}^{j}\int_\Gamma \mu_i(y)e_{j-i}(x-y)d\Gamma_y,$$
$$j \in N_0, \ x \in \Omega. \tag{83}$$

Нехай оператор $S_i\colon L^2(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ діє за правилом

$$S_i\eta(x) := \int_\Gamma \eta(y)e_i(x-y)d\Gamma_y, \ \ x \in \Omega, \ \ i \in \mathbb{N}_0, \tag{84}$$

де $\eta \in L^2(\Gamma)$ — довільна функція. Розглянемо, як отримати розширення цього оператора $S_i\colon H^{-1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$.

Як було зазначено вище, при фіксованому $x \in \Omega$ функції $e_i (i \in \mathbb{N}_0)$ разом з їхніми частинними похідними в точці x є обмеженими на Γ, тому для довільної функції η інтеграл (84) існує і його можемо трактувати як білінійну форму

$$(S_i\eta)(x) = \left\langle \eta(\cdot), e_i(x-\cdot)\right\rangle_\Gamma, \ x \in \Omega, \tag{85}$$

задану на $L^2(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. При цьому виконується нерівність ([6, теорема 1])

$$\|S_i\eta\|_{H^1(\Omega)} \le C_i\|\eta\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \ \ i \in \mathbb{N}_0, \tag{86}$$

де C_i — стала.

Нехай маємо довільний елемент $\xi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Оскільки простір $L^2(\Gamma)$ є щільним у $H^{-1/2}(\Gamma)$, то існує послідовність $\{\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ елементів простору $L^2(\Gamma)$, яка збігається до ξ при $n \to \infty$ за нормою простору $H^{-1/2}(\Gamma)$. Вона є фундаментальною, тобто $\forall\epsilon > 0\, \exists\, n \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall\, m, p > n$ виконується нерівність $\|\xi^m - \xi^p\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} < \epsilon$. Беручи до уваги (86), покажемо, що з фундаментальності послідовності $\{\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ у просторі $H^{-1/2}(\Gamma)$ випливає, що послідовність $\{S_i\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ є фундаментальною у просторі $H^1(\Omega)$

$$\|S_i\xi^m - S_i\xi^p\|_{H^1(\Omega)} = \|S_i(\xi^m - \xi^p)\|_{H^1(\Omega)} \le C_i\|\xi^m - \xi^p\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} < C_i\epsilon, \ \ i \in \mathbb{N}_0. \tag{87}$$

Оскільки простір $H^1(\Omega)$ є повним, то для кожного $i \in \mathbb{N}_0$ послідовність $\{S_i\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається при $n \to \infty$ до деякого елемента цього простору, який будемо позначати $S_i\xi$. Беручи до уваги (85), будемо писати $(S_i\xi)(x) = \left\langle \xi(\cdot), e_i(x-\cdot)\right\rangle_\Gamma, \ x \in \Omega$. Тоді з (83) отримаємо коефіцієнти q-згортки (31)

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{j} S_{j-i}\mu_i(x), \ \ x \in \Omega, \ j \in N_0. \tag{88}$$

З (88) випливає, що у випадку $\mu_i \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $i \in \mathbb{N}_0$, матимемо $u_j \in H^1(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Тому, відповідно до [6, теорема 1], для кожного $j \in \mathbb{N}_0$ існує слід $\gamma_0 u_j \in H^{1/2}(\Gamma)$. Позначивши $V_i := \gamma_0 S_i$ і спрямувавши x на Γ, з (88) матимемо

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{j} V_{j-i}\mu_i(x), \quad x \in \Gamma,\ j \in N_0, \tag{89}$$

тобто коефіцієнти Фур'є-Лаґера для $\mathcal{V}\mu$. □

6. Обґрунтування розв'язку задачі (1)–(3). Розглянемо оператор

$$\mathcal{G}\colon \mathcal{H}_\alpha^{3/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)) \to \mathcal{H}_\alpha^{0}(\mathbb{R}_+; H^{1}(\Omega)),\ \alpha = \sigma_0/2, \tag{90}$$

який на підставі твердження 3 граничному значенню g, заданому на поверхні Σ, ставить у відповідність функцію $u = \mathcal{G}g$ — узагальнений розв'язок задачі (1)–(3). Визначимо звуження цього оператора на елементи вагових просторів Соболєва. Принагідно зауважимо очевидне вкладення просторів $H_\sigma^1(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \subset \big(H_\sigma^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))\big)$.

Лема 3. *Нехай $g \in H_{\sigma_0}^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ при деяких $\sigma_0 > 0$ і $m \in \mathbb{N}_0$. Тоді для довільних значень $\sigma \geq \sigma_0$ оператор*

$$\mathcal{G}\colon H_\sigma^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)) \to H_\sigma^{m}(\mathbb{R}_+; H^{1}(\Omega)) \tag{91}$$

є обмеженим.

Доведення. Нехай g — довільна функція з $H_{\sigma_0}^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$. Розглядаючи її як елемент просторів $\mathcal{H}_\alpha^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)) \subset \mathcal{H}_\alpha^{m+3/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ при $\alpha = \sigma_0/2$, матимемо розв'язок $u = \mathcal{G}g$. Оцінимо його, враховуючи нерівність (73)

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\mathcal{H}_\alpha^m(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\alpha} |\omega|^{2m} \|\hat{u}(\cdot,\omega)\|^2_{H^1(\Omega)} d\omega \leq \\ \leq \frac{\tilde{C}_1^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\alpha} |\omega|^{2m}|\omega|^3 \|\hat{g}(\cdot,\omega)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} d\omega = \tilde{C}_1^2 \|g\|^2_{\mathcal{H}_\alpha^{m+3/2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))} < \infty.\end{aligned} \tag{92}$$

З того, що $u \in \mathcal{H}_\alpha^m(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$, маємо $u \in H_\sigma^m(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$. □

Тим самим шляхом можна також дослідити залежність гладкості розв'язку ЧГІР

$$\mathcal{V}\mu = g \quad \text{в } L_\sigma^2(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)) \tag{93}$$

від функції g.

Лема 4. *Нехай $g \in H_{\sigma_0}^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ при деяких $\sigma_0 > 0$ і $m \in \mathbb{N}_0$. Тоді існує єдиний розв'язок ЧГІР (93) у $H_\sigma^m(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$, який при довільному $\sigma \geq \sigma_0$ задовольняє умову*

$$\|\mu\|_{H_\sigma^m(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))} \leq C\|g\|_{H_\sigma^{m+2}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))}, \tag{94}$$

де $C > 0$ — стала.

Доведення. Відповідно до твердження 3, розглянемо при значеннях $p = 3/2$ і $\alpha = \sigma_0/2$ оператор $\mathcal{V}^{-1} \colon \mathcal{H}^p_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma)) \to \mathcal{H}^{p-2}_\alpha(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$, який довільній функції g ставить у відповідність єдиний розв'язок ЧГІР $\mu = \mathcal{V}^{-1}g$. Беручи до уваги нерівність (74), отримаємо таку оцінку густини μ

$$\|\mu\|^2_{\mathcal{H}^m_\alpha(\mathbb{R}_+;H^{-1/2}(\Gamma))} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\alpha} |\omega|^{2m}\|\hat{\mu}(\cdot,\omega)\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}d\omega \le$$

$$\le \frac{\tilde{C}_2^2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\alpha} |\omega|^{2m}|\omega|^4\|\hat{g}(\cdot,\omega)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}d\omega = \tilde{C}_2^2\|g\|^2_{\mathcal{H}^{m+2}_\alpha(\mathbb{R}_+;H^{1/2}(\Gamma))} < \infty, \tag{95}$$

звідки випливає нерівність (94). □

Як бачимо, на підставі лем 3 і 4 можна конкретизувати умови твердження 3 стосовно функції g, щоб відповідні звуження операторів $\mathcal{G}$ і $\mathcal{V}^{-1}$ давали в результаті узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) і густину запізнюючого потенціалу у вагових просторах Соболєва з потрібним класом гладкості.

Доведення теореми 1. Нехай граничні дані в крайовій умові (3) задані функцією $g \in H^{m+4}_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ для деяких $\sigma_0 > 0$ і $m \in \mathbb{N}_0$. Тоді на основі твердження 3 існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) як елемент простору $H^1_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \cap L^2_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$. Крім того з леми 3 випливає, що при зазначених граничних даних він належить простору $H^{m+2}_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega)) \subset H^{m+1}_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$ і для довільного $\sigma \ge \sigma_0$ задовольняє нерівність

$$\|u\|_{H^{m+2}_\sigma(\mathbb{R}_+;H^1(\Omega))} \le C\|g\|_{H^{m+4}_\sigma(\mathbb{R}_+;H^{1/2}(\Gamma))}, \tag{96}$$

де $C > 0$ — стала, яка від g не залежить. Очевидно, що тоді і оцінка (33) є правильною.

Розглянемо тепер ЧГІР (93), вважаючи, як і раніше, що $g \in H^{m+4}_{\sigma_0}(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$. Тоді за лемою 4 маємо, що його розв'язок μ належить простору $H^{m+2}_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{-1/2}(\Gamma))$, звідки випливають такі наслідки:

1) перетворення Лагера є застосовним до μ (за теоремою 2) і $\boldsymbol{\mu} := \mathcal{L}\mu \in l^2(H^{-1/2}(\Gamma))$;
2) потенціал $\mathcal{S}\mu$ належить простору розв'язків задачі (1)–(3), оскільки на підставі леми 2 $\mathcal{S}\mu \in H^{m+1}_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$;
3) для потенціалу $\mathcal{S}\mu$ можна застосовувати розвинення (77), коефіцієнти якого мають вигляд (31), і таке розвинення є збіжним в $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^1(\Omega))$.

Подібні результати випливають з леми 2 також стосовно граничного оператора $\mathcal{V}\mu$, а саме, $\mathcal{V}\mu \in H^{m+1}_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$ і розвинення (78) є збіжним в $L^2_\sigma(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(\Gamma))$. Якщо у лівій частині (93) використати розвиненння (78), а у правій — розвинення Фур'є-Лаґера функції g з коефіцієнтами, які є елементами послідовності $\mathbf{g} := \mathcal{L}g \in l^2(H^{1/2}(\Gamma))$, то, прирівнюючи вирази біля поліномів Лаґера з однаковими номерами, отримаємо нескінченну трикутну систему ГІР (32) відносно членів послідовності $\boldsymbol{\mu}$. Відомо [25], що ця система має єдиний розв'язок. □

Для знаходження членів послідовності $\boldsymbol{\mu}$ після зведення системи ГІР (32) до послідовності (15) можна використати один з методів чисельного розв'язування ГІР (див. [13, 23, 20, 24, 31] і наведені там посилання), наприклад, метод граничних елементів, після чого узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) шукати як суму ряду (20).

Зауважимо, що за допомогою запропонованого методу можна отримати узагальнений розв'язок мішаної задачі для однорідного хвильового рівняння з однорідними початковими умовами, розглядаючи крайові умови іншого типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Agranovich M.S. Sobolev spaces and their generalizations elliptic problems in domains with smooth and Lipschitz boundary. – Springer, Moscow. – 2015.
2. Bamberger A., Ha-Duong T. *Space-time variational formulation for the calculation of the retarded potential of an acoustic wave diffraction (I)*// Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – V.8, Issue 1. – P. 405–435.
3. Bamberger A., Ha Duong T. *Variational formulation for the calculation of the diffraction of an acoustic wave on a rigid surface*// Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – V.8, Issue1. – P. 598–608.
4. Banjai L. *Time-domain Dirichlet-to-Neumann map and its discretization*// J. Numer. Anal. – 2013.
5. Chapko R., Kress R. *On numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations*// Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications Series in Mathematical Analysis and Applications. Vol.2 (Agerwal, O'Regan, eds.) Gordon Break Science Publishers. Amsterdam. – 2000. – P. 55–69.
6. Costabel M. *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results*// SIAM J. Math. Anal. – 1988. – V.19. – P. 613–626.
7. Costabel M. *Time-dependent problems with the boundary integral equation method. In encyclopedia of computational mechanics*// E. Stein, R. de Borst, and J. R. Hughes, Eds. John Wiley and Sons, Chichester. – 2004. – P. 703–721.
8. Dautray R., Lions J.L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. – Evolution problems I, Springer-Verlag, Berlin. – 1992. – V.5.
9. Dominguez V., Sayas F.-J. *Some properties of layer potentials and boundary integral operators for wave equation*// Journal of Integral Equations and Applications 25. – 2013. – V.2. – P. 253–294.
10. Jung B.H., Sarkar T.K., Zhang Y., Ji Z., Yuan M., Salazar-Palma M., Rao S.M., Ting S.W., Mei Z., De A. Time and frequency domain solutions of em problems using integral equations and a Hybrid methodology. – Wiley-IEEE Press. – 2010. – 485 p.
11. Ha Duong T. *On retarded potential boundary integral equations and their discretization*// In Davies, P.; Duncan, D.; Martin, P.; Rynne, B. (eds.): Topics in computational wave propagation. Direct and inverse problems. Springer-Verlag. – 2003. – P. 301–336.
12. Halazyuk V.A., Lyudkevych Y.V., Muzychuk A.O. *The method of integral equations in nonstationary diffraction problems*// L'viv. un-t. – 1984. – Dep. v UkrNIINTI, # 601Uk-85Dep. (in Ukrainian)
13. Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary integral equations. – Springer-Verlag, Berlin. – 2008.
14. Keilson J., Nunn W., Sumita U., The Laguerre transform. Center for Naval analyses corporation, Professional paper 284/May 1980.
15. Koshlyakov N.S., Hliner E.B., Smirnov M.M. *Partial differential equations of mathematical physics*// Moskow Vyssh. Shk. – 1970. (in Russian)
16. Ladyzenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics, Moskow: Nauka. – 1973.
17. Laliena A.R., Sayas F.-J. *A distributional version of Kirchhoff's formula*// J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V.359. – P. 197–208.
18. Litynskyy S., Muzychuk A. *Laguerre transform and boundary elements method in problems of numerical modeling of wave propagation*// DIPED-2007, Proc. of XII-th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. — Lviv: Pidstryhach IAPMM of the NASU, Tbilisi State University. – 2007. – P. 81–85.
19. Lityns'kyy S., Muzychuk Yu., Muzychuk A. *On week solutions of boundary value problems for an infinite system of elliptic equations*// Visn. L'viv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform. – 2009. – V.15. – P. 52–70. (in Ukrainian)
20. Litynskyy S. *Numerical solution of initial boundary value problem for the wave equation with impedance boundary condition*// Proceedings of the International conference "Integral Equations-2010" dedicated to 50 years of the Department of Numerical Mathematics, 2010. – Lviv: PAIS. – 2010.
21. Lubich Ch. *On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations*// Numer. Math. – 1994. – V.67. – P. 365–389.
22. Lyudkevych Y.V., Muzychuk A.E. Numerical solution of boundary problems for wave equation. – L'viv: LDU – 1990. (in Russian)

23. McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. – Cambridge University Press. – 2000.
24. Muzychuk A., Lityns'kyy S. *Application orf Laguerre transformation for solving hyperbolic boundary problems*// Visn. L'viv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform. – 2007. – V.13. – P. 30–39. (in Ukrainian)
25. Muzychuk Yu.A., Chapko R.S. *On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind*// Mat. Stud. – 2012. – V.38, №1. – P. 12–34.
26. Mykhajlov V.P. Partial differential equations. – Moscow, Nauka. – 1983. (in Russian)
27. Pasichnyk R.M. *The numerical solution of the time-boundary integral equation of wave potential type*// Integral'nye uravneniya v prikladnom modelyrovanii: Tezysy dokl. 2-y resp. nauch.-tekhn.konf. – Kyiv. – 1986. – V.2. – P. 175–176. (in Russian)
28. Polozhyy H.N. Equations of mathematical physics. – M.: Nauka. – 1964. (in Russian)
29. Reed M., Simon B. Methods of modern matematical phisics. – M.: Mir. – 1977. (in Russian)
30. Sayas, F.-J. *Retarded potentials and time domain boundary integral equations: a road-map.* Lecture Notes, Workshop on Theoretical and Numerical Aspects of Inverse Problems and Scattering Theory, Universidad Autonoma de Madrid, 2011. Available for download at http://www.math.udel.edu/ fjsayas/TDBIE.pdf.
31. Schtainbah O. Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. Finite and boundary elements. – Springer Science – 2008.

Ivan Franko National University of Lviv
s.litynskyy@gmail.com
anatol.muzychuk@gmail.com

Надійшло 30.12.2014
Після переробки 21.12.2015