УДК 517.925

М. А. Белозерова, Г. А. Гержановская

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ, В НЕКОТОРОМ СМЫСЛЕ БЛИЗКИМИ К ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМСЯ

M. A. Belozerova, G. A. Gerzhanovskaya. *Asymptotic representations of solutions of second order differential equations with nonlinearities close to regularly varying*, Mat. Stud. **44** (2015), 204–214.

The asymptotic representation, necessary and sufficient conditions of the existence of sufficient broad classes of the solutions are found for differential equations of the second order that are in some sense similar to equations with nonlinearities, that are regularly varying at the singular points.

М. А. Белозерова, Г. А. Гержавноская. *Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, в некотором смысле близкими к правильно меняющимся* // Мат. Студiї. – 2015. – Т.44, №2. – С.204–214.

Для дифференциальных уравнений второго порядка, в некотором смысле близких к уравнениям с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями, получены асимптотические представления, необходимые и достаточные условия существования достаточно широких классов решений.

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Рассматривается уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')f(y,y'), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ — непрерывные функции, $f\colon \Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1} \to]0,+\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция, $Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — промежуток либо $[y_i^0;Y_i[$, либо $]Y_i;y_i^0]$ $(i\in\{0,1\})$. При $Y_i=+\infty$ (соответственно, $Y_i=-\infty$) считаем $y_i^0>0$ (соответственно, $y_i^0<0$). Предполагается, что каждая из функций $\varphi_i(z)$ является правильно меняющейся функцией при $z\to Y_i$ $(z\in\Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, $\sigma_0+\sigma_1\ne 1$, $\sigma_1\ne 1$, а функция f удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{v_k\to Y_k\\ v_k\in\Delta_{Y_k}}} \frac{v_k\frac{\partial f}{\partial v_k}(v_0,v_1)}{f(v_0,v_1)} = 0, \text{ равномерно по } v_j\in\Delta_{Y_j},\ j\ne k,\ k,j\in\{0,1\}. \tag{2}$$

Примерами функций f, удовлетворяющих условию (2), могут служить функции вида $e^{\sqrt{|\ln|v_0\cdot v_1||}}$, $e^{|\gamma\ln|v_0|+\mu\ln|v_1||^{\alpha}}, 0<\alpha<1, \gamma,\mu\in\mathbb{R}$ при соответствующих $Y_0,Y_1\in\{0,\infty\}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34C41, 34E10.
Keywords: asymptotic representation of solution; regularly varying nonlinearities.
doi:10.15330/ms.44.2.204-214

Определение 1 ([4], глава 1, §1.1, с. 9)**.** Положительная функция $R\colon [a_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ называется *правильно меняющейся на бесконечности*, если она измерима и существует число $\rho \in (-\infty,+\infty)$ такое, что для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{R(\lambda z)}{R(z)} = \lambda^{\rho}.$$

Число ρ называют *порядком функции* R. Функция $R(z)$ называется *правильно меняющейся в нуле*, если $R\left(\frac{1}{z}\right)$ правильно меняется на бесконечности.

Это определение очевидным образом распространяется на случай произвольной односторонней окрестности. Примерами правильно меняющихся и в нуле и на бесконечности функций являются функции $|z|^n|\ln|x||^m$, $|z|^n e^{\sqrt{|\ln|z||}}$, $\ln|\ln|\ldots|\ln|z^n||||$, $m,n\in\mathbb{R}$, а также функции, стремящиеся к ненулевой константе при стремлении аргумента, соответственно, к нулю либо бесконечности.

В силу вышеуказанных условий уравнение (1) является в некотором смысле близким к уравнению

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{3}$$

где функции φ_0 и φ_1 являются правильно меняющимися функциями порядков σ_0, σ_1 соответственно при стремлении аргументов к особым точкам. При $f\equiv 1$ и степенных φ_0,φ_1 уравнение (1) было детально исследовано в работах В. М. Евтухова ([1]–[3]). Общий случай уравнения (3) исследовался позже в работах В. М. Евтухова и М. А. Белозеровой (см., например, [6]–[8]). Частные случаи уравнения (3) применялись в ядерной физике, газовой динамике, механике жидкости, релятивистской механике и других областях естествознания. Однако, при современном уровне развития вычислительной техники для построения точных математических моделей физических явлений оказывается недостаточно не только степенных, но даже и правильно меняющихся функций. Поэтому ставится задача рассмотрения более общего случая уравнения (1). В данной работе, в отличие от работ других авторов (см., например, [11]), рассматриваются функции f, которые даже на достаточно удобных для изучения классах правильно меняющихся решений не эквивалентны произведению медленно меняющихся функций, одна из которых зависит только от y, а другая — только от y'.

Определение 2. Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$*-решением*, если

$$y^{(i)}\colon [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i\in\{0,1\}), \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(y'(t)\right)^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0. \tag{4}$$

Данная работа посвящена исследованию $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений уравнения (1), для которых $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Отметим, что такие решения являются правильно меняющимися функциями при $t\uparrow\omega$.

Целью настоящей работы является распространение на уравнение (1) некоторых из полученных для уравнения (3) результатов.

2. Основной результат. Введем дополнительные обозначения, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{при } \omega=+\infty;\\ t-\omega, & \text{при } \omega<+\infty,\end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega=+\infty;\\ -1, & \text{при } \omega<+\infty,\end{cases}$$

$$\Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \quad i\in\{0,1\} \tag{5}$$

$$J(t) = |\lambda_0 - 1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \operatorname{sign} y_1^0 \int_{A_\omega}^{t} |\pi_\omega(\tau) p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, d\tau,$$

$$A_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, d\tau = +\infty; \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Для существования у уравнения* (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений, где* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1 \text{ либо } (\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0, \tag{6}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\beta y_1^0 y_0^0 \lambda_0(\lambda_0 - 1) > 0, \quad \beta\alpha_0 y_1^0(\lambda_0 - 1) > 0, \tag{7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}} = Y_0, \ \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} = Y_1, \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}. \tag{8}$$

Кроме того, для каждого такого решения имеют место следующие асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t)|y(t)|^{-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{\big(f(y(t), y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))\big)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} \cdot J(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\pi_\omega(t)(\lambda_0 - 1)}[1+o(1)]. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение уравнения (1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Тогда в силу (4), согласно лемме 10.2 из [5], имеют место асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}[1+o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}[1+o(1)]. \tag{10}$$

Первое из представлений (10) является вторым из представлений (9). Кроме того, так же, как при доказательстве теоремы 1 из [7], из (3) и первого из условий (10) следует первое из условий (7) и первое из условий (8), а из второго из представлений (10) следует второе из условий (7) и второе из условий (8).

Из второго из представлений (10) получим с использованием (1) при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)|y(t)|^{\frac{-\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{\big(f(y(t), y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))\big)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = J'(t)[1+o(1)]. \tag{11}$$

Покажем, что функция $f(y, y'(y^{-1}(y)))\Theta_0(y)\Theta_1(y'(y^{-1}(y)))$ является медленно меняющейся функцией при $y \to Y_0$ ($y \in \Delta_{Y_0}$), где y^{-1} — функция, обратная для $y(t)$. В силу свойств медленно меняющихся функций 1–4 из [4] (Глава 1, §1.4, с. 23) существуют $L_0\colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$, $L_1\colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ — бесконечно дифференцируемые функции, такие, что

$$L_i(z) = \Theta_i(z)[1+o(1)] \text{ при } z \to Y_i \, (z \in \Delta_{Y_i}), \ \lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z L_i'(z)}{L_i(z)} = 0 \quad (i \in \{0,1\}). \tag{12}$$

В силу (4) и (12)

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\frac{\partial f}{\partial v_0}(y,y'(y^{-1}(y)))}{f(y,y'(y^{-1}(y)))}=0.$$

Кроме того, так как $\lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} y'(y^{-1}(y))=Y_1$, то с учетом (2)

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y'(y^{-1}(y)))\frac{\partial f}{\partial v_1}(y,y'(y^{-1}(y)))}{f(y,y'(y^{-1}(y)))}=0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y(f(y,y'(y^{-1}(y)))L_0(y)L_1(y'(y^{-1}(y))))'}{f(y,y'(y^{-1}(y)))L_0(y)L_1(y'(y^{-1}(y)))}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\frac{\partial f}{\partial v_0}(y,y'(y^{-1}(y)))}{f(y,y'(y^{-1}(y)))}+\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{yL_0'(y)}{L_0(y)}+$$
$$+\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\left(\frac{y'(y^{-1}(y))\frac{\partial f}{\partial v_1}(y,y'(y^{-1}(y)))}{f(y,y'(y^{-1}(y)))}+\frac{y'(y^{-1}(y))L_1'(y'(y^{-1}(y)))}{L_1(y'(y^{-1}(y)))}\right)\cdot\frac{y\cdot y''(y^{-1}(y))}{(y'(y^{-1}(y)))^2}=0.$$

Следовательно, функция $f(y,y'(y^{-1}(y)))L_0(y)L_1(y'(y^{-1}(y)))$, а значит, и функция $f(y,y'(y^{-1}(y)))\Theta_0(y)\Theta_1(y'(y^{-1}(y)))$ является медленно меняющейся функцией при $y\to Y_0$ $(y\in\Delta_{Y_0})$.

С использованием предложений 1 и 2 из [9] (Глава 5, §1, с. 115), получим из (11) при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y(t)|y(t)|^{-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=J(t)\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}[1+o(1)],$$

то есть первое из представлений (9).

Из этого соотношения и (11) получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)\pi_\omega(t)y'(t)}{(1-\sigma_1)y(t)}=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1},$$

то есть третье из условий (8).

Достаточность. Пусть $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и на ряду с (7) и (8) выполняется (6). Пусть $L_0\colon\Delta_{Y_0}\to]0,+\infty[$, $L_1\colon\Delta_{Y_0}\to]0,+\infty[$ — бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие (12). Обозначим $g(v_0,v_1)=f(v_0,v_1)L_0(v_0)L_1(v_1)$. Из условий (2) и (12), имеем

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}}\frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)}=0 \text{ равномерно по } v_j\in\Delta_{Y_j},\ j\neq i,\ i,j\in\{0,1\}. \tag{13}$$

Таким образом, можно выбрать $\tilde\Delta_{Y_i}\subset\Delta_{Y_i}$ $(i\in\{0,1\})$ так, чтобы

$$\left|\frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)}\right|<\zeta,\ (i\in\{0,1\}) \text{ при } (v_0,v_1)\in\tilde\Delta_{Y_0}\times\tilde\Delta_{Y_1}, \tag{14}$$

где $0<\zeta<\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{4}$, ζ достаточно мало и

$$\tilde\Delta_{Y_i}=\begin{cases}\{[\tilde y_i^0,Y_i[, & \text{если } \Delta_{Y_i}=[y_i^0,Y_i[,\quad y_i^0\le\tilde y_i^0<Y_i;\\ ]Y_i,\tilde y_i^0], & \text{если } \Delta_{Y_i}=]Y_i,y_i^0],\quad Y_i>\tilde y_i^0\ge y_i^0,\end{cases},\ i\in\{0,1\}.$$

Рассмотрим функцию

$$F(s_0,s_1)=\begin{pmatrix}\frac{|s_1|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\\ \frac{s_1}{s_0}\end{pmatrix},$$

заданную на множестве $\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$. Рассмотрим первую компоненту данной функции. С учетом (13) имеем

$$\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\tilde{\Delta}_{Y_0}}}\frac{s_0\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\right)'_{s_0}}{\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}}=\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\tilde{\Delta}_{Y_0}}}\left(1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}-\frac{1}{1-\sigma_1}\cdot\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)=$$

$$=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\quad\text{равномерно по } s_1\in\tilde{\Delta}_{Y_1}.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\tilde{\Delta}_{Y_0}}}\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}=\Upsilon,\quad\text{равномерно по } s_1\in\tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$\Upsilon=\begin{cases}+\infty, & \text{если } \pi_\omega(t)\lambda_0(\lambda_0-1)(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)>0;\\ 0, & \text{если } \pi_\omega(t)\lambda_0(\lambda_0-1)(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)<0.\end{cases}\tag{15}$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает $\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$ на множество

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})=\begin{cases}\left[\frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)};\Upsilon\right)\times\Delta_0, & \text{если } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}<\Upsilon;\\ \left(\Upsilon;\frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}\right]\times\Delta_0, & \text{если } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}>\Upsilon,\end{cases}\tag{16}$$

где

$$\Delta_0=\begin{cases}(0;+\infty), & \text{если } \lambda_0>0,\ \tilde{y}_0^0\tilde{y}_0^1>0;\\ (-\infty;0), & \text{если } \lambda_0>0,\ \tilde{y}_0^0\tilde{y}_0^1<0;\\ \left[\frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0};Y_1^0\right), & \text{если } \lambda_0<0,\ \frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0}<Y_1^0;\\ \left(Y_1^0;\frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0}\right], & \text{если } \lambda_0<0,\ \frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0}>Y_1^0;\end{cases}\qquad Y_1^0=\begin{cases}Y_1, & \text{если } Y_1=0;\\ -\infty, & \text{если } Y_1=\infty.\end{cases}\tag{17}$$

Рассмотрим поведение функции $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}$ на прямых

$$s_1=ks_0,\quad k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.\tag{18}$$

На каждой такой прямой $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}=\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$. Кроме того, имеем

$$\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0}=$$

$$=\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1)s_0g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\left(1-\sigma_1-\sigma_0-\frac{s_0g'_{s_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)}-\frac{ks_0g'_{ks_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)}\right).$$

Это означает, что с учетом (14)

$$\operatorname{sign}\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0}=\operatorname{sign}(y_0^0(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)).$$

Поэтому функция $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$ строго монотонна на любой прямой вида (18). Предположим, что отображение F не является взаимно-однозначным. Тогда $\exists (p_0,p_1),(q_0,q_1)\in\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1},\ (p_0,p_1)\neq(q_0,q_1)\colon\ F(p_0,p_1)=F(q_0,q_1)$.

С учетом определения множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0},\tilde{\Delta}_{Y_1}$ последнее равенство означает, что

$$\frac{|p_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(p_0,p_1)}=\frac{|q_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(q_0,q_1)},\quad \frac{p_0}{p_1}=\frac{q_0}{q_1}=c\in\mathbb{R}\setminus 0. \tag{19}$$

Покажем, что точки (p_0,p_1) и (q_0,q_1) лежат на одной прямой вида (18). Но тогда (19) не может иметь места, так как функция $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,cs_0)}$ строго монотонна на этой прямой. Таким образом, существует обратная функция $F^{-1}\colon F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})\to\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$. Учитывая вид функции F, имеем

$$F^{-1}(w_0,w_1)=\begin{pmatrix}F_0^{-1}(w_0,w_1)\\ F_1^{-1}(w_0,w_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_0^{-1}(w_0,w_1)\\ w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\end{pmatrix}.$$

Поскольку якобиан

$$JF(s_0,s_1)=\begin{vmatrix}\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)}{s_0(1-\sigma_1)g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} & \frac{-|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{s_1(1-\sigma_1)g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\cdot\frac{s_1\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\\[2ex] -\frac{s_1}{s_0^2} & \frac{1}{s_0}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{s_0^2(1-\sigma_1)g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}-\frac{s_1\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)\neq 0,$$
$$\text{при } (s_0,s_1)\in\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1},$$

функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})$. Кроме того, для $(w_0,w_1)\in F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})$ справедливы равенства

$$\frac{|F_0^{-1}(w_0,w_1)|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}=w_0,\quad \frac{F_i^{-1}(w_0,w_1)}{w_0\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial w_0}(w_0,w_1)}=1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}-\frac{1}{1-\sigma_1}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{F_{k-1}^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_k}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}\right]\ (i\in\{0,1\}), \tag{20}$$

$$\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)}{w_1\frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\frac{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}+$$
$$+\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\frac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}+1, \tag{21}$$

$$\frac{w_1 \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial w_1}(w_0, w_1)}{F_1^{-1}(w_0, w_1)} = 1 + \frac{w_1 \frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0, w_1)}{F_0^{-1}(w_0, w_1)}. \tag{22}$$

Полагая

$$\begin{cases} \frac{|y(t)|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(y(t),y'(t))} = \left| J(t)\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} \right| [1+z_1(x)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2(x)], \end{cases} \qquad x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \tag{23}$$

сведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} z_1' = \beta[1+z_1]\left[\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2] - \frac{\pi_\omega(t)}{1-\sigma_1}\Phi_0(x,z_1,z_2) - \right. \\ \left. -\frac{1}{1-\sigma_1}C|G(x)|^{1-\sigma_1}\frac{|1+z_1|^{\sigma_1-1}}{|1+z_2|^{1-\sigma_1}}\Phi_1(x,z_1,z_2) - G(x)\right] \\ z_2'(x) = \beta[1+z_2]\left(C|G(x)|^{1-\sigma_1}\frac{|1+z_1|^{\sigma_1-1}}{|1+z_2|^{1-\sigma_1}} - \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2]+1\right), \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\Psi_0(x,z_1,z_2) = F_0^{-1}\left(\left|J(t)\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|[1+z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t)}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2]\right),$$

$$\Psi_1(x,z_1,z_2) = F_1^{-1}\left(\left|J(t)\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|[1+z_1], \frac{1}{\pi_\omega(t)}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2]\right),$$

$$\Phi_0(x,z_1,z_2) = \frac{\Psi_0(x,z_1,z_2)\frac{\partial g}{\partial v_0}(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))}{g(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))},$$

$$\Phi_1(x,z_1,z_2) = \frac{\Psi_1(x,z_1,z_2)\frac{\partial g}{\partial v_1}(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))}{g(\Psi_0(x,z_1,z_2),\Psi_1(x,z_1,z_2))},$$

$$G(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))J'(t(x))}{J(t(x))},\ C = \frac{1}{\lambda_0-1}\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|^{\sigma_1-1}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1-1}.$$

В силу третьего из условий (8)

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}. \tag{25}$$

Обозначим

$$\eta_0(t,z_1) = J(t)\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y_0^0[1+z_1], \quad \eta_1(t,z_2) = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2].$$

Рассмотрим выражения

$$\frac{\pi_\omega(t)(\Psi_k(x(t),z_1,z_2))_t'}{\Psi_k(x(t),z_1,z_2)} = G(x(t))\frac{\eta_0(t,z_1)\frac{\partial F_k^{-1}}{\partial w_0}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))}{F_k^{-1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))} -$$

$$-\frac{\eta_1(t,z_2)\frac{\partial F_k^{-1}}{\partial w_1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))}{F_k^{-1}(\eta_0(t,z_1),\eta_1(t,z_2))} \quad (k\in\{0,1\}). \tag{26}$$

Так же, как при доказательстве достаточности в теореме 1 ([12]), с учетом (26), (20)–(22) получим, что при построении множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}$, $\tilde{\Delta}_{Y_1}$ число ζ может быть выбрано настолько малым, чтобы существовали такие константы $c_1, c_2 \in R$, что

$$c_1 < \frac{\pi_\omega(t)(\Psi_k(x(t),\xi_1,\xi_2))'_t}{\Psi_k(x(t),\xi_1,\xi_2)} < c_2 \quad (k \in \{0,1\})\ \forall(\xi_1,\xi_2) \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$$

и $\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} c_2 = \operatorname{sign}\frac{1}{\lambda_0 - 1}$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \Psi_i(x,z_1,z_2) = Y_i\ (i \in \{0,1\}) \text{ равномерно по } z_1,z_2\colon |z_j| < \frac{1}{2}, j \in \{1,2\}. \tag{27}$$

В силу (27) имеем

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)} = 0,\ \text{равномерно по } v_j \in \Delta_{Y_j},\ i \neq j,\ i,j \in \{0,1\} \text{ (см. (13))}.$$

Откуда ясно, что

$$\lim_{x\to\infty} \Phi_i(x,z_1,z_2) = 0\ (i \in \{0,1\}) \text{ равномерно по } z_1,z_2\colon |z_j| < \frac{1}{2}, j \in \{1,2\}. \tag{28}$$

Так же, как при доказательстве достаточности в теореме 1 ([12]), в силу (7), (8), (15)–(17) ясно, что можно выбрать число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы для любых $|z_j| \leq \frac{1}{2}$, $j \in \{1,2\}$

$$\begin{pmatrix} \left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}J(t)\right|[1+z_1] \\ \\ \frac{1}{\pi_\omega(t)}\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+z_2] \end{pmatrix} \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \text{ при } t \in [t_0,\omega[.$$

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (24) на множестве

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D,\ \text{где } x_0 = \beta\ln|\pi_\omega(t_0)|, \quad D = \left\{(z_1,z_2)\colon |z_i| \leq \frac{1}{2}, i \in \{1,2\}\right\}.$$

Перепишем систему (24) в виде

$$\begin{cases} z_1' = A_{11}(x)z_1 + A_{12}(x)z_2 + R_1(z_1,z_2) + R_2(x,z_1,z_2), \\ z_2' = A_{21}(x)z_1 + A_{22}(x)z_2 + R_3(x) + R_4(x,z_1,z_2), \end{cases} \tag{29}$$

где

$$A_{11}(x) = \beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} - \beta G(x), \quad A_{12}(x) = \beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1},$$

$$A_{21}(x) = \beta(\sigma_1-1)C|G(x)|^{1-\sigma_1}, \quad A_{22}(x) = \beta\sigma_1 C|G(x)|^{1-\sigma_1} - 2\beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1} + \beta,$$

$$R_1(z_1,z_2) = \beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}z_1z_2,$$

$$R_2(x,z_1,z_2) = \beta[1+z_1(x)]\left(-\frac{\pi_\omega(t)}{1-\sigma_1}\Phi_0(x,z_1,z_2)[1+z_2]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-\sigma_1}C|G(x)|^{1-\sigma_1}\frac{|1+z_1|^{\sigma_1-1}}{|1+z_2|^{1-\sigma_1}}\Phi_1(x,z_1,z_2)\right) + \beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\cdot\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} - \beta G(x),$$

$$R_3(x) = \beta\left(C|G(x)|^{1-\sigma_1} - \frac{1}{\lambda_0-1}\right),$$

$$R_4(x,z_1,z_2) = \beta C|G(x)|^{1-\sigma_1}\left(|1+z_1|^{\sigma_1-1}|1+z_2|^{\sigma_1} - 1 - (\sigma_1-1)z_1 - \sigma_1 z_2\right) - \frac{\beta\lambda_0}{\lambda_0-1}z_2^2.$$

Предельная матрица коэффициентов линейной части системы (29) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} \\ \beta\frac{\alpha_0(\sigma_1-1)}{\lambda_0-1} & \beta\frac{\alpha_0\sigma_1-\lambda_0-1}{\lambda_0-1} \end{pmatrix},$$

и с учётом (25) и (28)

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_1(z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}R_2(x,z_1,z_2)=0 \text{ равномерно по } z_1,z_2\colon (z_1,z_2)\in D,$$

$$\lim_{x\to+\infty}R_3(x)=0,\quad \lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_4(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0 \text{ равномерно по } x\in[x_0,+\infty[.$$

Характеристическое уравнение матрицы A $\det|A-\mu E_2|=0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка, имеет вид $\mu^2-\mu\beta\frac{\alpha_0\sigma_1-\lambda_0-1}{\lambda_0-1}-\frac{\alpha_0\lambda_0(1-\sigma_1-\sigma_0)}{(\lambda_0-1)^2}=0$. В силу (6) у этого уравнения нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (29) выполнены все условия теоремы 2.2 из [10]. Согласно этой теореме, система (24) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2\colon [x_1,+\infty[\to \mathbb{R}^2 (x_1\geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замен (23) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (9). В силу первого из представлений (9) при $t\uparrow\omega$

$$\frac{|y(t)|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{f(y(t),y'(t))\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))}=\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|^{1-\sigma_1}|J(t)|^{1-\sigma_1}[1+o(1)].$$

С учетом (5), это означает, что

$$\frac{|y(t)|^{1-\sigma_1}}{f(y(t),y'(t))\varphi_0(y(t))\Theta_1(y'(t))}=\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|^{1-\sigma_1}|J(t)|^{1-\sigma_1}[1+o(1)]. \tag{30}$$

Из второго из представлений (9) получим при $t\uparrow\omega\colon$ $y(t)=\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\pi_\omega(t)y'(t)[1+o(1)]$. Подставляя это соотношение в (30), с учетом равенства $\varphi_1(z)=|z|^{\sigma_1}\Theta_1(z)$, имеем при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y'(t)\mathrm{sign}y_1^0}{f(y(t),y'(t))\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\left|\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\right|^{1-\sigma_1}\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{1-\sigma_1}\left|\frac{J(t)}{\pi_\omega(t)}\right|^{1-\sigma_1}[1+o(1)].$$

Из этого соотношения получим при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y'(t)}{\alpha_0p(t)f(y(t),y'(t))\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\left|\frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)\lambda_0}{(1-\sigma_1)(\lambda_0-1)}\right|^{1-\sigma_1}\frac{|J(t)|^{1-\sigma_1}|\pi_\omega(t)|^{\sigma_1-1}}{\alpha_0p(t)\mathrm{sign}y_1^0}[1+o(1)].$$

Отсюда, с учетом (1) и второго из условий (7) имеем при $t\uparrow\omega$

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\left|\frac{(1-\sigma_1)(\lambda_0-1)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\lambda_0}\right|^{1-\sigma_1}\frac{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_1}\alpha_0p(t)\mathrm{sign}y_1^0}{|J(t)|^{1-\sigma_1}}[1+o(1)].$$

Перепишем это соотношение в следующем виде

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\left|\frac{(1-\sigma_1)(\lambda_0-1)^{\frac{-\sigma_1}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\lambda_0}\right|^{1-\sigma_1}\left|\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)}\right|^{1-\sigma_1}\mathrm{sign}(\lambda_0-1)[1+o(1)]. \tag{31}$$

Откуда, с учетом третьего из условий (8), получаем второе из соотношений (10). $\frac{\pi_\omega t y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}[1 + o(1)]$. Разделив второе из соотношений (9) на второе из соотношений (10) получим третье из условий (3). С учетом (16) видно, что выполняется первое и второе из условий (3). Таким образом ясно, что полученное решение y является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением. $\square$

3. Иллюстрация полученных результатов. Проиллюстрируем полученные результаты на примере. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' = t^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} e^{\sqrt{\ln |yy'|}}, \tag{32}$$

$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. Это уравнение является уравнением (1), в котором $\alpha_0 = 1$, $p(t) = t^\gamma$ — непрерывная на $[t_0, +\infty[$ $(t_0 > 0)$ функция, $f(y, y') = e^{\sqrt{\ln |yy'|}}$ — непрерывно дифференцируемая на $[y_0^0, +\infty[\times[y_1^0, +\infty[$ $(y_0^0 > 0,\ y_1^0 > 0)$ функция. Рассмотрим случай $Y_0 = Y_1 = +\infty$. Проверим выполнение условия (2), которое в данном случае принимает вид

$$\lim_{v_i \to Y_i} \frac{v_i e^{\sqrt{\ln(v_0 v_1)}}}{2 v_i \sqrt{\ln(v_0 v_1)} e^{\sqrt{\ln(v_0 v_1)}}} = 0, \text{ равномерно по } v_j \in [y_i^0, +\infty[,\ j \neq i,\ i, j \in \{0, 1\}.$$

Ясно, что $v_i \geq y_i^0$ при $v_i \in [y_i^0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при $v_0 > \frac{e^{4\varepsilon^2}}{y_0^0}$ либо $v_1 > \frac{e^{4\varepsilon^2}}{y_1^0}$ получим $\frac{1}{\sqrt{\ln(v_0 v_1)}} < \varepsilon$ при $(v_0, v_1) \in [y_0^0, +\infty[\times[y_1^0, +\infty[$. Отсюда следует выполнение условия (2).

Применив теорему 1, получим, что из $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, \lambda_0)$-решений, для которых $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, уравнение (32) может иметь только $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, \frac{\gamma + \sigma_1}{1 - \sigma_0 + \gamma})$-решения.

Условия $(\gamma + \sigma_1)(1 - \sigma_0 + \gamma) > 0,\ (\gamma + \sigma_1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0$ являются необходимыми, а если

$$\frac{\gamma + \sigma_1}{1 - \sigma_0 + \gamma} \neq \sigma_1 - 1 \text{ либо } (\sigma_1 - 1)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) > 0,$$

то и достаточными для существования у уравнения (32) таких решений.

Кроме того, для каждого $P_{+\infty}(+\infty, +\infty, \frac{\gamma + \sigma_1}{1 - \sigma_0 + \gamma})$-решения уравнения уравнение (32) имеют место следующие асимптотические представления при $t \to +\infty$

$$y(t) e^{\frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1 - 1} \sqrt{\ln |y(t) y'(t)|}} = \left| \frac{1 - \sigma_0 + \gamma}{|\sigma_0 + \sigma_1 - 1|^{\sigma_1} |\gamma + \sigma_1|^{\sigma_1 - 1}} \right|^{\frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}} t^{\frac{\gamma + \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1 - 1}} [1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\gamma + \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1 - 1} [1 + o(1)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Evtukhov V.M. *About one nonlinear differential eqution of the second order*// Roceedings of USSR Academy of sciences. – 1977. – V.233, №4. – P. 531–534. (in Russian)

2. Evtukhov V.M. *Asymtotic representaions of solutions of one class of nonlinear differential equations of the second order*// Reports of Academy of sciences GSSR. – 1982. – V.106, №3. – P. 473–476. (in Russian)

3. Evtukhov V.M. *Asymtotic properties of solutions of one class of differential equations of the second order*// Math. Nachr. – 1984. – B.115. – P. 215–236.

4. Seneta E. Regularly varying functions. – Lecture notes in Mathematics 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 1976, 113 p.

5. Evtukhov V.M. Asymptotic representations of solutions of nonautonomuous ordinary differential equations: thesis of a Doctor of sciences: 01.01.02 – Kyiv. – 1998. – 295 p. (in Russian)

6. Bilozerova M.O. *Asymtotic properties of one class of solutions of essentialy nonlinear differential equations of the second order*// Mat. Stud. – 2008. – V.29, №1. – P. 52–62. (in Russian)

7. Bilozerova M.O. *Asymptotic representations of solutions of nonautomous differential equations of the second order with nonlinerities, that are in some sence near to the power nonlinearities*// Nonlinear oscillations. – 2009. – V.12, №1. – P. 3–15. (in Russian)

8. Bilozerova M.O. Asymptotic representations of solutions of differential equations of the second order with nonlinerities, that are in some sence near to the power nonlinearities: thesis of a Candidate of sciences: 01.01.02 – Odessa. – 2009. – 121 p. (in Russian)

9. Maric V. Regular variation and differential equations. – Lecture notes in Mathematics 1726. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 2000. – 128 p.

10. Evtukhov V.M., Samojlenko A.M. *Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point*// Ukr. Math. J. – 2010. – V.62, №1. – P. 52–80. (in Russian)

11. Kusik L.I. *Existence conditions and asymptotics of a class of solutions of differential equations of the second order*// Mat. Stud. – 2014. – V.41, №2. – P. 184–197. (in Russian)

12. Bilozerova M.O. *Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear second order differential equations*// Bulletin of the Odessa National University. Mathematics and Mechanics. – 2015. – V.20, №1(25). – P. 7–19 (in Russian)

Odessa I.I.Mechnikov National University
Institute of Mathematics, Economics and Mechanics
hello_greta@mail.ru

Поступило 19.03.2015
После переработки 5.12.2015