УДК 517.9

З. М. Лысенко

КОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОЛОСЕ

Z. M. Lysenko *Commutative algebras of Toeplitz operators on the strip*, Mat. Stud. **45** (2016), 98–103.

We show that C^*–algebras generated by Toeplitz operators on the Bergman space on the strip with bounded measurable defining symbols, depending only on real variable, are commutative.

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — комплексная плоскость, D — простая связная область в $\mathbb{C}$ с гладкой границей. Рассмотрим пространство $L_2(D)$ с обычной плоской мерой Лебега $d\nu(z) = dxdy$, где $z = x + iy$, и его замкнутое подпространство — так называемое ([1]) пространство Бергмана, состоящее из функций, аналитических в D. Ортогональный проектор Бергмана $B_D \colon L_2(D) \to A^2(D)$ в области D имеет следующее интегральное представление ([2], теорема 2.2.7)

$$(B_D f)(z) = \int_D K_D(z, \xi) f(\xi) d\nu(\xi),$$

где $K_D(z, \xi)$ — кернфункция или ядро Бергмана в области D. Пусть $a \in L_\infty(D)$. Теплицевым оператором с символом a называется оператор $T_a \colon \varphi \in A^2(D) \to B_D a\varphi \in A^2(D)$.

Фундаментальные результаты относительно коммутативных C^*–алгебр теплицевых операторов в единичном круге и в верхней полуплоскости содержатся в монографии [2]. Теплицевы операторы в пространствах Бергмана рассматривались также, например, в [3–7]. В данной работе представлен критерий коммутативности алгебры теплицевых операторов в полосе. Известно (см., например, [1, стр. 38]), что ядро Бергмана в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, имеет вид $K_{\mathbb{D}}(w, \xi) = \frac{1}{\pi(1 - w\bar{\xi})^2}$.

Тогда ядро Бергмана в полосе $\mathbb{G} := \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| < 1\}$ вычисляется по формуле ([2, лемма 2.2.5]):

$$K_{\mathbb{G}}(z, \xi) = K_{\mathbb{D}}(\alpha(z), \alpha(\xi))\alpha'(z)\overline{\alpha'(\xi)} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}(z + \bar{\xi})},$$

где $\alpha(z) \equiv \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} z$ — биголоморфное отображение $\mathbb{G}$ на $\mathbb{D}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 58J32.
Keywords: Bergman projection; Bergman space; Toeplitz operator.
doi:10.15330/ms.45.1.98-103

Таким образом, проектор Бергмана $B_G\colon L_2(\mathbb{G}) \to A^2(\mathbb{G})$ имеет следующее интегральное представление

$$(B_{\mathbb{G}}f)(z) = \frac{\pi}{16}\int_{\mathbb{G}} \frac{f(\xi)}{\cos^2 \frac{\pi}{4}(z+\overline{\xi})} d\nu(\xi).$$

Проекторы B_G и B_D ([2, лемма 2.2.8]) связаны соотношением $B_G = W_\alpha B_D W_\alpha^*$, в котором W_α — унитарный оператор, действующий из $L_2(\mathbb{D})$ в $L_2(\mathbb{G})$ по формуле $(W_\alpha f)(\xi) = \alpha'(\xi) f[\alpha(\xi)]$, $\xi \in \mathbb{G}$.

Через $\mathcal{L}(H)$ будем обозначать C^* — алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Через I обозначим тождественный оператор, $|$ — сужение оператора, χ_D — характеристическая функция множества D.

Для данной функции $a = a(z) \in L_\infty(\mathbb{G})$ введем теплицевый оператор T_a с символом $a = a(z)$, действующий в пространств Бергмана $A^2(G)$ следующим образом

$$T_a = B_{\mathbb{G}} a(z)|_{A^2(G)}\colon A^2(G) \to A^2(G)$$

или в интегральной форме

$$(T_a f)(z) = \frac{\pi}{16}\int_{\mathbb{G}} \frac{a(\xi)\varphi(\xi)}{\cos^2 \frac{\pi}{4}(z+\overline{\xi})} d\nu(\xi).$$

Пространство Бергмана $A^2(\mathbb{G})$ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $L_2(\mathbb{G})$, состоящее из всех функций, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0, \quad \text{где} \quad z = x + iy.$$

Введем унитарный оператор

$$U_1 = I \otimes F\colon L_2(\mathbb{G}) = L_2(-1;1) \otimes L_2(\mathbb{R}) \to L_2(-1;1) \otimes L_2(\mathbb{R}),$$

где преобразование Фурье $F\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

Тогда образ $A_1^2 = U_1(A^2(\mathbb{G}))$ можно рассматривать как замкнутое подпространство в $L_2(\mathbb{G})$, состоящее из всех функций, удовлетворяющих условию

$$(I \otimes F)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(I \otimes F^{-1})\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} - y\right)\varphi = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $\varphi(x,y) = \psi(y)e^{xy}$. Отсюда получаем, что $A_1^2 = \{f(y)\varphi_y(x)\colon f \in L_2(\mathbb{R})\}$, где

$$\varphi_y(x) = \sqrt{\frac{y}{\operatorname{sh}(2y)}} e^{xy}, \ x \in (-1;1), \ y \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $\|\varphi_y\|_{L_2(-1;1)} = 1$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Поэтому формула

$$(R_0 f)(x,y) = f(y)\varphi_y(x), \ x \in (-1;1), \ y \in \mathbb{R}, \ f \in L_2(\mathbb{R}),$$

определяет изометрический оператор $R_0\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(-1;1)\otimes L_2(\mathbb{R})$, для которого область значений совпадает с пространством A_1^2. Поскольку оператор U_1 является унитарным, то оператор $R := U_1^{-1}R_0$ является изометрическим с областью значений, совпадающей с пространством $A^2(\mathbb{G})$. Отсюда заключаем что оператор RR^* является ортопроектором на $A^2(\mathbb{G})$. Следовательно, справедливо равенство

$$RR^* = B_{\mathbb{G}}. \tag{1}$$

В то же время,

$$R^*R = R_0^*R_0 = I\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Обозначим через A_∞ C^*–алгебру всех $a \in L_\infty(\mathbb{G})$ таких, что $a(z) = a(\operatorname{Re} z)$, и пусть $\mathscr{T}(A_\infty)$ — тёплицева операторная алгебра, порождённая операторами T_a с символами $a \in A_\infty$.

Теорема 1. *Пусть $a \in A_\infty$. Тогда оператор $T_a \in \mathscr{L}(A^2(\mathbb{G}))$ унитарно эквивалентен оператору $\Gamma_a\colon L_2(\mathbb{R} \to L_2(\mathbb{R})$ умножения на непрерывную функцию*

$$\gamma_a(y) = \int_{-1}^{1} a(x)\varphi_y^2(x)dx, \quad y \in \mathbb{R}, \text{ и } \Gamma_a = R^*T_aR.$$

Доказательство. На основании (1) и (2) находим

$$R^*T_aR = R^*B_{\mathbb{G}}aB_{\mathbb{G}}R = R^*(RR^*)a(RR^*)R = (R^*R)(R^*aR)(R^*R) = R^*aR.$$

Очевидно, что оператор U_1 коммутирует с оператором умножения на функцию a. Следовательно, $R^*aR = R_0^*U_1aU^{-1}R_0 = R_0^*aR_0$. Окончательно получаем $(R_0^*aR_0f)(y) = \gamma_a(y)f(y),\ y \in \mathbb{R},\ f \in L_2(\mathbb{R})$. □

Обозначим через $C_b(\mathbb{R})$ алгебру всех непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Следствие 1. *Алгебра $\mathcal{T}(A_\infty)$ коммутативна. Изоморфное отображение $\tau_\infty\colon \mathcal{T}(A_\infty) \to C_b(\mathbb{R})$ порождается отображением $\tau_\infty\colon T_a \to \gamma_a(y)$ образующих алгебры $\mathcal{T}(A_\infty)$, где $a = a(x) \in A_\infty$.*

Рассмотрим теперь некоторые важные специальные случаи.

Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — двухточечная компактификация $\mathbb{R}$.

Лемма 1. *Пусть $a = a(x) \in L_\infty(-1;1)$ и пусть существуют следующие односторонние пределы:*

$$\lim_{x\to -1+0} a(x) = a_{-1}, \qquad \lim_{x\to 1-0} a(x) = a_1.$$

Тогда $\gamma_a \in C(\overline{\mathbb{R}})$ и $\gamma_a(-\infty) = a_{-1},\ \gamma_a(+\infty) = a_1$.

Доказательство. Очевидно, что $\gamma_{a(x)}(-y) = \gamma_{a(-x)}(y)$ и $\gamma_a \equiv 1$, если $a \equiv 1$. Поэтому достаточно доказать, что $\gamma_a(+\infty) = 0$ в случае $a_1 = 0$. Легко видеть, что при любом $\delta \in (-1;1)$

$$|\gamma_a(y)| \leqslant \|a\|_\infty \int_{-1}^{\delta} \varphi_y^2(x)dx + \omega_\delta \int_{-1}^{1} \varphi_y^2(x)dx,$$

где $m_\delta = \sup_{x\in[\delta,1]} |a(x)|$. Поскольку

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{-1}^{\delta}\varphi_y^2(x)dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\varphi_y^2(x)dx = 1,$$

то

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\,|\gamma_a(y)| \leqslant \lim_{\delta\to 1-0} m_\delta = 0$$

Следовательно, $\gamma_a(+\infty) = 0$. □

Пусть A — линейное подмножество пространства $L_\infty(-1;1)$. Через $H(A)$ обозначим подмножество C^*–алгебры A_∞, которое состоит из ограниченных измеримых функций $a = a(Rez)$, сужение которых на отрезок $[-1,1]$ принадлежит A. Пусть $\mathcal{T}(H(A))$ — C^*–алгебра всех теплицевых операторов T_a с символом $a \in H(A)$. Обозначим через $L_\infty^{(-1,1)}[-1,1]$ C^*–подалгебру пространства $L_\infty[-1,1]$, состоящую из функций, имеющих пределы в точках -1 и 1.

Пусть $PC([-1;1],\Lambda)$ — алгебра кусочно-непрерывных на $[-1,1]$ функций, непрерывных на $[-1,1]\setminus\Lambda$ и имеющих односторонние пределы в точках множества $\Lambda = \{x_1,\ x_2, ..., x_{n-1}\}$. Пусть $PC_0([-1;1],\Lambda)$ — подалгебра алгебры $PC([-1;1],\Lambda)$, состоящая из кусочно-постоянных функций. Для данной функции $a_0 = a_0(x)$ $(x \in [-1,1])$ через $L(1,a_0)$ обозначим линейное двумерное пространство, порожденное 1 и функцией a_0.

Для непрерывной функции a_0, множества Λ и произвольной точки $x_k \in \Lambda$ имеем следующие цепочки включений

$$\begin{gathered} L(1,a_0) \subset C[-1,1] \subset PC([-1;1],\Lambda) \subset L_\infty^{(-1,1)}[-1,1], \\ PC_0([-1;1],\{x_k\}) \subset PC_0([-1;1],\Lambda) \subset PC([-1;1],\Lambda) \subset L_\infty^{(-1,1)}[-1,1]. \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть вещественнозначная функция $a_0 \in L_\infty^{(-1,1)}[-1,1]$ такова, что соответствующая ей функция γ_{a_0} разделяет точки на $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда C^*–алгебра $\mathcal{T}(H(L(1,a_0)))$ изоморфна и изометрична пространству $C(\mathbb{R})$. Изометрический изоморфизм $\tau_\infty\colon \mathcal{T}(H(L(1,a_0))) \to C(\mathbb{R})$ порождается отображением $\tau_\infty\colon T_a \to \gamma_a$ образующих алгебры $\mathcal{T}(H(L(1,a_0)))$.*

Доказательство. Так как $\gamma_{a_0}(y)$ разделяет точки на $\overline{\mathbb{R}}$, то a_0 — не постоянная функция. Отсюда C^*–алгебра $\mathcal{T}(H(L(1,a_0)))$ порождается тождественным оператором и теплицевым оператором T_{a_0}, действующим в $A^2(\mathbb{G})$. Из следствия 1 и леммы 1 вытекает, что $\tau_\infty(\mathcal{T}H(L(1,a_0)))) \subset C(\overline{\mathbb{R}})$. Ясно, что единичная функция (на $\overline{\mathbb{R}}$) и символ γ_{a_0} принадлежат образу $\tau_\infty(\mathcal{T}(H(L(1,a_0))))$.

Тогда из теоремы Стоуна-Вейерштрасса (см., напр., [11, стр. 53, теорема 1']) следует включение $\tau_\infty^{-1}(C(\overline{\mathbb{R}})) \subset \mathcal{T}(H(L(1,a_0)))$. □

Следствие 2. *Пусть $a_0(x) = x$, $x \in [-1,1]$. Тогда C^*–алгебра $\mathcal{T}(H(L(1,a_0)))$ изоморфна и изометрична $C(\overline{\mathbb{R}})$.*

Доказательство. Непосредственно находим

$$\gamma_{a_0}(y) = \frac{y}{\operatorname{sh} 2y}\int_{-1}^{1} x e^{2xy}dx = \operatorname{cth} 2y - \frac{1}{2y}.$$

Функция γ_{a_0} непрерывна на $\overline{\mathbb{R}}$ и

$$\lim_{y\to 0}\gamma_{a_0}(y)=\gamma_{a_0}(0)=0,\ \lim_{y\to+\infty}\gamma_{a_0}(y)=\gamma_{a_0}(+\infty)=1,\ \lim_{y\to-\infty}\gamma_{a_0}(y)=\gamma_{a_0}(-\infty)=-1.$$

Покажем, что γ_{a_0} разделяет точки на $\overline{\mathbb{R}}$. Действительно, поскольку $|\operatorname{sh} y|>y$ при $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, то

$$\gamma'_{a_0}(y)\equiv-\frac{2}{\operatorname{sh}^2 2y}+\frac{1}{2y^2}>0,\qquad y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

и, следовательно, γ_{a_0} строго возрастает на $\overline{\mathbb{R}}$. Остается воспользоваться теоремой 2. $\square$

Следствие 3. *Пусть $x_0\in(-1;1)$. Тогда C^*–алгебра $\mathcal{T}(H(PC_0([-1;1],\{x_0\})))$ изометрически изоморфна $C(\overline{\mathbb{R}})$.*

Доказательство. Имеем

$$PC_0([-1;1],\{x_0\})=L(1,\chi_{[-1;x_0]}),\ \gamma_{\chi_{[-1,x_0]}}(y)=\frac{e^{2x_0y}-e^{-2y}}{e^{2y}-e^{-2y}},\quad y\in\mathbb{R}.$$

Как следует из теоремы 2, достаточно показать, что функция

$$\gamma(t)=\gamma_{\chi_{[-1,x_0]}}(t/2)=\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{2t}-1},\ \ (\alpha:=x_0+1\in(0,2))$$

строго убывает на $\mathbb{R}$. Заметим, что $\gamma'(t)=\frac{e^{(\alpha+2)t}}{(e^{2t}-1)^2}g(t)$, где $g(t)=\alpha-2-\alpha e^{-2t}+2e^{-\alpha t}$. Поэтому достаточно убедиться, что $g(t)<0$ при $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Действительно, $g'(t)=2\alpha(e^{-2t}-e^{-\alpha t})$ и, следовательно, функция g имеет строгий максимум в точке $t=0$. Поскольку $g(0)=0$, то $g(t)<0$ при $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\square$

Теорема 3. *C^*-алгебра $\mathcal{T}(H(L_\infty^{(-1;1)}[-1;1]))$ изометрически изоморфна $C(\overline{\mathbb{R}})$. Изометрический изоморфизм $\tau_\infty\colon\mathcal{T}(H(L_\infty^{(-1;1)}[-1;1]))\to C(\overline{\mathbb{R}})$ порождается следующим отображением образующих алгебры $\mathcal{T}(H(L_\infty^{(-1;1)}[-1;1]))$ $\tau_\infty\colon T_a\to\gamma_a(y)$, где $a=a(x)\in H(L_\infty^{(-1;1)}[-1;1])$.*

Доказательство. Из следствия 1 и леммы 1, следует, что $\tau_\infty\colon\mathcal{T}(H(L_\infty^{(-1;1)}[-1;1]))\subset C(\overline{\mathbb{R}})$. Обратное отображение соответствующих алгебр следует из включений (3) и теоремы 2. $\square$

Из вышесказанных утверждений можно сделать следующие выводы.

1. Алгебры теплицевых операторов с символами, принадлежащими пространствам из цепочки (3), совпадают, хотя образующие таких алгебр различны;
2. Упомянутая (общая) C^*–алгебра с единицей может быть порождена единственным теплицевым оператором либо с непрерывным, либо с кусочно-непрерывным символом на $[-1;1]$. В частности, каждый теплицевый оператор с символом из $L_\infty^{(-1;1)}[-1;1]$ (наибольшей алгебры из цепочки (3)) принадлежит C^*–алгебре с единицей, порожденной единственным теплицевым оператором либо с непрерывным, либо с кусочно-непрерывным на $[-1;1]$ символом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dzhuraev A.D. Methods of singulare integral equations. – M.: Press “Nauka”, 1987, 416 p. (in Russian)
2. Vasilevski N.L. Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space// Series Operator Theory: Advances Applications. – 2008, V.XXIX, 1985, 417 p.
3. Korenblum B., Kehe Zhu *An applicationn on Tauberian theorems to Toeplitz operators*// J. Operator Theory. – 1995. – V.33. – P. 353–361.
4. Grudsky S., Karapetyants A., Vasilevski N. *Toeplitz operators on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$ *with radial symbols*// J. Operator Theory. – 2003. – V.49. – P. 325–346.
5. Karapetyants A.N. *The space* $BMO^p_\lambda(\mathbb{D})$*, compact Toeplitz operators with* $BMO^1_\lambda(\mathbb{D})$ *symbols on weighted Bergman spaces, and Berezin transform*// Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 2006. – V.8(531). – P. 76–79. (in Russian)
6. Ze-Hua Zhou, Xing-Tang Dong *Algebraic properties of Teoplitz operators with radial symbols on the unit ball*// Iutegr. equ. oper. theory. – 2009. – V.64. – P. 137–154.
7. Zhi Ling Sun, Yu Feng Lu *Toeplitz operators on the weighted pluriharmonic Bergman space with radial symbols*// Abstract and Applied Analysis. – 2011.– Article ID 210596. – 15 p.
8. Mikhlin S.G., Prösdorf S. Singulare integral operators. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.
9. Simonenko I.B., Chin Ngok Min Lokal method in the theory of one-dimensional singular integral equations with picewise continuous coefficients. Noetherity. – University Press, Rostov-on-Don, 1983, 84 p. (in Russian)
10. Bateman H., Erdelyi A. Tables of integral transforms. – V.1, Fourier, Laplas and Mellin transforms, M.:Press “Nauka”, 1969, 343 p. (in Russian)
11. Gelfand I.M., Raikow D.A., Shilov G.E. Commutative normed rings. – M.: Press Fiz. Mat. Lit., 1960, 316 p. (in Russian)

Odessa I.I. Mechnikov National University
Institute of Mathematics, Economics and Mechanics
ivanpribegin@rambler.ru

Поступило 21.12.2015