Математичні Студії. Т.45, №2 Matematychni Studii. V.45, No.2

УДК 512.7

M. El Azhari

TRAVAUX DE HUSAIN ET AL. SUR LA CONTINUITÉ AUTOMATIQUE DES CARACTÈRES

M. El Azhari. *Works of Husain and others on the automatic continuity of characters*, Mat. Stud. **45** (2016), 205–212.

We give a survey of Husain, Ng and Liang's results concerning the automatic continuity of algebra homomorphisms. We also give the improvements obtained by Joseph, Akkar, Oudadess, Zelazko and ourselves.

1. Introduction. Nous donnons un aperçu des résultats de T. Husain, S. B. Ng et J. Liang concernant la continuité ou la bornitude des homomorphismes d'algèbres. Nous donnons aussi les améliorations apportées par G. A. Joseph, M. Akkar, M. Oudadess, W. Zelazko et nous mêmes (cf. [2], [3], [15], [18] et [20]).

Nous obtenons d'abord un théorème (théorème III.1.6) de continuité séquentielle des homomorphismes sur les algèbres séquentielles. Ce théorème recouvre et généralise les résultats de T. Husain et S. B. Ng ([12, théorème 1]), G. A. Joseph ([15, théorème 2.1]), M. Oudadess ([18, théorème 5.2]), et T. Husain ([6, théorème 2]).

Ensuite, nous obtenons un théorème (théorème III.3.3) de continuité automatique sur les algèbres réelles. Comme conséquence, on a deux résultats de T. Husain et S. B. Ng ([11, théorème 1] et [10, théorème 1]).

Dans la dernière partie consacrée aux algèbres à bases, nous donnons deux nouvelles preuves du résultat de T. Husain et J. liang affirmant que si A est une algèbre de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle, alors tout caractère de A est continu.

2. Préliminaires. 2.1. Algèbres topologiques. Une algèbre topologique est une algèbre (sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munie d'une topologie séparée, compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue. Une algèbre topologique est dite localement convexe (en abrégé a.l.c.) si elle munie d'une topologie d'espace localement convexe (en abrégé e.l.c.). Si elle métrisable et complète, on dit que c'est une B_0-algèbre. Une algèbre topologique A est dite localement multiplicativement convexe (en abrégé a.l.m.c.) si A est munie d'une topologie définie par une famille $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semi-normes d'espace vectoriel vérifiant en outre $p_\lambda(xy) \le p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tous x, y in A. Une a.l.m.c complète métrisable est dite une algèbre de Fréchet. Soit A une algèbre topologique, on note par $M(A)$ l'ensemble des caractères continus (non nuls) de A.

Soient A une a.l.c. et β_A l'ensemble des bornés, absolument convexes, fermés, idempotents de A. Pour chaque $B \in \beta_A$, on note par A_B le sous espace vectoriel engendré par B, A_B

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46H40.
Keywords: automatic continuity; algebra homomorphisms.
doi:10.15330/ms.45.2.205-212

munie de la jauge $\|\cdot\|_B$ est une algèbre normée. Si $(A_B, \|\cdot\|_B)$ est complète pour tout $B \in \beta_A$, on dit que A est pseudocomplete.

2.2. Algèbres infraséquentielles et rayon de régularité. Soit A une algèbre topologique.

(i) A est fortement séquentielle s'il existe un voisinage U de 0 tel que, pour tout $x \in U$, $x^k \to_k 0$.

(ii) A est séquentielle si pour toute suite $(x_n)_n, x_n \to_n 0$, il existe un x_m tel que $x_m^k \to_k 0$.

(iii) A est infraséquentielle si, pour tout borné B de A, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout x de B, $(\lambda x)^k \to_k 0$

On a $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Soit A une a.l.c. Pour $x \in A$, on pose:

$$\beta(x) = \inf\{r > 0 \colon ((r^{-1}x)^n)_n \text{ est bornée }\}, \text{ où } \inf \varnothing = \infty.$$

$\beta(x)$ est la régularité de x et β le rayon de régularité. Un élément x est régulier si, et seulement si, $\beta(x) < \infty$. D'après [4], on a:

(1) $\beta(\lambda x) = |\lambda|\beta(x)$ pour tous $x \in A$ and $\lambda \in K$;

(2) $\infty > |\lambda| > \beta(x)$ entraine $(\lambda^{-1}x)^n \to_n 0$.

Soit A une a.l.c. D'après [18], on a:

(i) A est infraséquentielle si, et seulement si, β est borné;

(ii) A est séquentielle si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers 0, il existe un certain m tel que $\beta(x_m) < 1$.

(iii) A est fortement séquentielle si, et seulement si, β est continue.

2.3. Algèbres topologiques à bases. Soit E un espace vectoriel topologique (en abrégé e.v.t.). E est dit à base s'il existe une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de E telle que pour tout x de E il existe une suite complexe unique $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ tel que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Pour chaque $i \geq 1$, l'application linéaire $c_i \colon E \to C$, $c_i(x) = \alpha_i$, est appelée fonction coordonnée. $(x_i)_{i\geq 1}$ est dite une base inconditionnelle de E si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\alpha_i x_i \in E$ dès que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$ et $|a_i| \leq 1$.

Soit A une algèbre topologique à base $(x_i)_{i\geq 1}$, on dit que la base $(x_i)_{i\geq 1}$ est orthogonale si $x_i x_j = \delta_{ij} x_i$ pour tous $i \geq 1$ et $j \geq 1$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Soit E un espace de Fréchet dont la topologie est définie par la famille $\{\|.\|_r \colon r \in \mathbb{N}\}$ de seminormes et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une base inconditionnelle de E. Soient $f \in E'$ (le dual topologique de E) et $x \in E, \sup_{f\in\Lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)||f(x_n)| < \infty$, où $\Lambda_r = \{f \in E' \colon \sup_{\|x\|_r \leq 1} |f(x)| \leq 1\}$. Posons $\|x\|_r' = \sup_{f\in\Lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)||f(x_n)|$, alors $\{\|.\|_r' \colon r \in \mathbb{N}\}$ est une famille de seminormes définissant la topologie originale de E.

3. Sur les travaux de Husain, Ng et Liang. 3.1. Algèbres séquentielles. Dans [12], T. Husain et S. B. Ng considérent les algèbres séquentielles et donnent les résultats suivants:

Théorème 3.1.1 ([12]). *Soit A une a.l.c. séquentiellement complète. Si A est séquentielle, alors tout caractère de A est borné.*

Corollaire 3.1.2 ([12]). *Soit A une B_0-algèbre séquentielle, alors tout caractère de A est continu.*

La démonstration du théorème 3.1.1 est assez longue, elle repose sur le fait suivant: étant donné $z \in A$ tel que $z^k \to_k 0$, on construit une algèbre de Banach commutative $(B, \|\cdot\|)$ telle que $B \subset A$, $z \in B$ et $\|z\| \leq 1$.

Dans [15], G. A. Joseph donne une démonstration courte du théorème 3.1.1 en utilisant quelques notions bornologiques dues à G. R. Allan. Le résultat de G. A. Joseph est le suivant:

Théorème 3.1.3 ([15]). *Soit A une a.l.c. pseudocomplète. Si A est séquentielle, alors tout caractère de A est borné.*

Le théorème 3.1.3 constitue une amélioration du théorème 3.1.1.

Remarque. Etant donné $z \in A$ tel que $z^k \to_k 0$. Soit $C_z = \{z, z^2, ..., z^n, ...\}$, C_z est un borné idempotent. On considère F la fermeture de l'enveloppe disquée de C_z, alors $(A_F, \|.\|_F)$ est une algèbre de Banach commutative telle que $A_F \subset A$, $z \in A_F$ et $\|z\|_F \leq 1$, ainsi une bonne partie de la démonstration de Husain et Ng est simplifiée.

Dans [18], M. Oudadess caractérise les algèbres séquentielles à l'aide du rayon de régularité. Comme conséquence, il obtient le résultat suivant:

Théorème 3.1.4 ([18]). *Soit A une a.l.c. séquentielle et pseudocomplète. Alors tout caractère de A est séquentiellement continu.*

Le théorème 3.1.4 recouvre et généralise les théorèmes 3.1.1 et 3.1.3. Dans [6], T. Husain donne le résultat suivant:

Théorème 3.1.5 ([6]). *Soient A, B deux a.l.c. séquentiellement complètes, A étant séquentielle et B satisfait à la condition suivante:*
(C): Pour toute suite $(y_n)_n$ dans B, $y_n \neq 0$, $y_n \nrightarrow 0$, il existe une suite $(f_m)_m$ de caractères de B tel que $\inf_{n,m} |f_m(y_n)| = \epsilon > 0$.

Alors tout homomorphisme $T\colon A \to B$ est séquentiellement continu.

Le théorème 3.1.4 ne peut pas se déduire du théorème 3.1.5 car le corps des complexes $\mathbb{C}$ ne satisfait pas à la condition (C), en effet soit $(y_n)_n$ la suite de $\mathbb{C}$ définie par $y_n = \frac{1}{n}$ si n est pair et $y_n = 1$ si n est impair. Il est clair que $y_n \neq 0$ et $y_n \nrightarrow 0$. Pour toute suite de caractères de $\mathbb{C}$, on a $\inf_{n,m} |f_m(y_n)| = 0$ car pour tout m, f_m est ou bien l'application nulle ou bien l'application identique.

En modifiant la condition (C) par la condition (D), on obtient un théorème qui recouvre et généralise les théorèmes 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4 et 3.1.5.

Théorème 3.1.6. *Soient A, B deux a.l.c., A étant séquentielle et pseudocomplete et B satisfait à la condition suivante:*
(D): Pour toute suite $(y_n)_n$ dans B, $y_n \neq 0$, $y_n \nrightarrow 0$, il existe un caractère f de B tel que $f(y_n) \nrightarrow 0$.

Alors tout homomorphisme $T\colon A \to B$ est séquentiellement continu.

Preuve. Supposons que T n'est pas séquentiellement continu. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans A, $x_n \to 0$ mais $Tx_n \nrightarrow 0$. Posons $y_n = \frac{1}{2}Tx_n$, on peut supposer que $y_n \neq 0$ pour tout n. D'après (D), il existe un caractère f de B tel que $f(y_n) \nrightarrow 0$. On peut trouver une sous suite $(y_{n_k})_k$ de $(y_n)_n$ telle que $\inf_k |f(y_{n_k})| = \epsilon > 0$. Posons $z_{n_k} = \epsilon^{-1} x_{n_k}$, $z_{n_k} \to_k 0$. Comme A est séquentielle, il existe $z \in \{z_{n_k}\}_k$, $z = z_{n_{k_0}}$ pour un certain k_0, tel que $z^i \to_i 0$. Il est clair que $f \circ T$ est un caractère de A. Soit F la fermeture de l'enveloppe

disquée de $\{z, z^2, ..., z^n, ...\}$. $(A_F, \|\cdot\|_F)$ est une algèbre de Banach commutative telle que $A_F \subset A$, $z \in A_F$ et $\|z\|_F \leq 1$. On a $|f \circ T(x)| \leq \|x\|_F$ pour tout $x \in A_F$, en particulier $|f \circ T(z)| \leq \|z\|_F \leq 1$. Par construction,
$|f \circ T(z)| = |f(\epsilon^{-1}Tx_{n_{k_0}})| = 2\epsilon^{-1}|f(y_{n_{k_0}})| \geq 2$, ce qui est impossible.

Remarque. Toute algèbre vérifiant la condition (C) satisfait à la condition (D) et de même le corps des complexes satisfait à la condition (D).

3.2. Algèbres infraséquentielles. Dans [6], T. Husain considère les algèbres infraséquentielles et donne le résultat suivant:

Théorème 3.2.1 ([6]). *Soit A une a.l.c. séquentiellement complète. Si A est infraséquentielle, alors tout caractère de A est borné.*

La démonstration du théorème 3.2.1 repose sur le fait déjà cité: étant donné $z \in A$ tel que $z^k \to_k 0$, on construit une algèbre de Banach commutative $(B, \|\cdot\|)$ telle que $B \subset A$, $z \in B$ et $\|z\| \leq 1$.

Dans [18], M. Oudadess caractérise les algèbres infraséquentielles à l'aide du rayon de régularité β. Comme conséquence, il obtient le résultat suivant:

Théorème 3.2.2 ([18]). *Soit A une a.l.c. β-régulière pseudocomplete. Alors l'ensemble M^* des caractères de A est equiborné, i.e., pour tout borné B de A, $\bigcup\{f(B)\colon f \in M^*\}$ est borné. En particulier, tout caractère de A est borné.*

Le théorème 3.2.2 généralise le théorème 3.2.1.

3.3. Algèbres réelles. L'outil fondamental dans cette partie est la technique de Do. Sin. Sya ([19]) et sa généralisation. Dans [17], S. B. Ng et S. Warner généralisent la technique de Do. Sin. Sya de la façon suivante:

Théorème 3.3.1 ([17]). *Soit K un corps archimédien. Soit $(H, +)$ un groupe topologique abélien, métrisable et complet. Soit $s\colon H \to H$ une application continue telle que $s(0) = 0$. Si f est un homomorphisme de $(H, +)$ dans $(K, +)$ tel qu'il existe $v \in \mathbb{N}$, $f(x)^2 \leq v.f(s(x))$ pour tout x de H, alors f est continu.*

Dans [17], l'énoncé du théorème 3.3.1 est donné lorsque $K = R$, mais le résultat reste vrai lorsque on remplace R par un corps archimédien. Comme conséquence du théorème 3.3.1, on a:

Théorème 3.3.2 (Lemme de Do. Sin. Sya). *Soit A une algèbre topologique métrisable complète. Soit B un R-sous espace vectoriel de A. On suppose que B est fermé et $\{x^2\colon x \in B\} \subset B$. Soit f une forme linéaire sur B telle que $f(x)^2 \leq f(x^2)$ pour tout x de B, alors f est continue.*

Nous donnons un théorème dont la démonstration repose essentiellement sur la généralisation de la technique de Do. Sin. Sya. Comme conséquence, nous obtenons deux théorèmes de T. Husain et S. B. Ng (théorème 1 de [11] et théorème 1 de [10]).

Théorème 3.3.3. *A et B étant deux R-e.v.t. métrisables complets. Soient $s\colon A \to A$, $h\colon B \to B$ deux applications, s étant continue et $s(0) = 0$. Considérons $I_h = \{g \in B^*\colon g(h(x)) = g(x)^2$ pour tout x de $B\}$ (B^* dual algébrique de B) et supposons que I_h est non vide. Si B satisfait à la condition:*
(P) pour toute suite $(y_n)_n$ dans B, $y_n \neq 0$, $y_n \nrightarrow 0$, il existe $f \in I_h$ tel que $f(y_n) \nrightarrow 0$;
alors toute application linéaire T de A dans B telle que $T(s(x)) = h(Tx)$ pour tout x de A, est continue.

Preuve. Supposons que T n'est pas continue. Il existe une suite $(x_n)_n$ dans A, $x_n \to 0$ mais $Tx_n \nrightarrow 0$. On peut supposer que $x_n \neq 0$ et $Tx_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe $f \in I_h$ tel que $f(Tx_n) \nrightarrow 0$. On peut construire à partir de la suite $(x_n)_n$, une suite $(a_m)_m$ telle que $a_m \to 0$ et $\inf_m f(Ta_m) = \epsilon > 0$. On a $\epsilon^{-1}a_m \to 0$, ainsi $s(\epsilon^{-1}a_m) \to 0$ car s est continue. Posons $y_m = s(\epsilon^{-1}a_m)$ pour tout $m \geq 1$. Alors $f(Ty_m) = f(T(s(\epsilon^{-1}a_m))) = f(h(T(\epsilon^{-1}a_m))) = f(T(\epsilon^{-1}a_m))^2 \geq 1$ pour tout $m \geq 1$. On définit $g_k\colon A^{k+1} \to A$ pour $k \geq 0$: $g_0(y_1) = y_1$ $g_1(y_1, y_2) = y_1 + s(y_2)$ $\cdots$ $g_k(y_1, ..., y_{k+1}) = g_1(y_1, g_{k-1}(y_2, ..., y_{k+1}))$.

En utilisant la même construction faite dans [17], on peut définir une sous suite $(z_k)_{k\geq 0}$ de $(y_m)_{m\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 0$, $(g_{p-k}(z_k, ..., z_p))_{p\geq k}$ est une suite de Cauchy. Soit $c_k = \lim_{p\to\infty} g_{p-k}(z_k, ..., z_p)$. Par définition $g_{p-k}(z_k, ..., z_p) = z_k + s(g_{p-(k+1)}(z_{k+1}, ..., z_p))$, on obtient $c_k = z_k + s(c_{k+1})$, ainsi $Tc_k = Tz_k + T(s(c_{k+1}))$. On a $f(Tc_k) = f(Tz_k) + f(T(s(c_{k+1}))) = f(Tz_k) + f(h(Tc_{k+1})) = f(Tz_k) + f(Tc_{k+1})^2 \geq 1 + f(Tc_{k+1})^2$ pour tout $k \geq 0$. D'ou $f(Tc_0) \geq 1 + f(Tc_1)^2 \geq 2 + f(Tc_2)^2 \geq k + f(Tc_k)^2$, i.e. $f(Tc_0) \geq k$ pour tout $k \geq 0$, ce qui est absurde.

Comme conséquence, on a:

Théorème 3.3.4. *Soient A, B deux R-algèbres topologiques métrisables et complètes. On suppose que B satisfait à la condition:*
(D): Pour toute suite $(y_n)_n$ dans B, $y_n \neq 0$, $y_n \nrightarrow 0$, il existe un caractère f de B tel que $f(y_n) \nrightarrow 0$.
Alors toute application linéaire $T\colon A \to B$ vérifiant $T(x^2) = (Tx)^2$ pour tout x de A, est continue.

Preuve. On considère $s\colon A \to A$, $s(x) = x^2$ et $h\colon B \to B$, $h(x) = x^2$. Remarquons que f de la condition (D) est dans I_h. On applique alors le théorème 3.3.3.

Théorème 3.3.5. *Soit A une R-a.l.m.c. séquentiellement complète. Soit B une R-algèbre topologique métrisable complète satisfaisant à la condition (D) du théorème 3.3.4. Alors toute application linéaire T de A dans B vérifiant $T(x^2) = (Tx)^2$, $x \in A$, est bornée.*

Preuve. On applique le théorème 3.3.3 et le théorème de structure de M. Akkar ([1]) affirmant que si A est une a.l.m.c. séquentiellement complète, alors A est bornologiquement limite inductive d'algèbres de Fréchet.

Remarques.

1. Les théorèmes 3.3.4 et 3.3.5 sont des améliorations des théorèmes 1 de [11] et 1 de [10].
2. Dans l'énoncé du théorème 3.3.3, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par un corps archimédien.
3. $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach, mais $\mathbb{C}$ ne satisfait pas à la condition (D) car le seul caractère réel de $\mathbb{C}$ est l'application nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.
4. On peut remplacer B dans les théorèmes 3.3.4 et 3.3.5 par $\mathbb{R}$; c'est une $\mathbb{R}$-algèbre de Banach qui satisfait à la condition (D).

Comme application du théorème 3.3.3, on a:

Corllaire 3.3.6. Soit A un $\mathbb{R}$-e.v.t. métrisable et complet. Soit $s\colon A \to A$ une application continue avec $s(0) = 0$. Considérons $I_s = \{g \in A^*\colon g(s(x)) = g(x)^2$ pour tout x de $A\}$ et supposons que I_s est non vide. Si A satisfait à la condition:
(P): Pour toute suite $(y_n)_n$ dans A, $y_n \neq 0$, $y_n \nrightarrow 0$, il existe $f \in I_s$ tel que $f(y_n) \nrightarrow 0$;
alors A posséde une unique topologie d'e.v.t. métrisable complet.

Corollaire 3.3.7. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre topologique métrisable complète satisfaisant à la condition:*
(D): Pour toute suite $(y_n)_n$ dans A, $y_n \neq 0$, $y_n \nrightarrow 0$, il existe un caractère f de A tel que $f(y_n) \nrightarrow 0$.
Alors A posséde une unique topologie d'algèbre métrisable complète.

Preuve. On considère l'application $s\colon A \to A$, $s(x) = x^2$ et on applique le corollaire 3.3.6.

Remarque. Le corollaire 3.3.7 est une amélioration du corollaire 2 de [11].

3.4. Algèbres à bases. Dans [8] et [9], T. Husain et J. Liang considérent les algèbres à bases et donnent les résultats suivants:

Théorème 3.4.1 ([9]). *Soit $(A, (p_i)_{i\geq 1})$ une algèbre de Fréchet à base $(x_i)_{i\geq 1}$ vérifiant:*
(1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j$, $i \leq j$;
(2) $p_i(x_i) \neq 0$, $p_i(x_{i+1}) = 0$.
Alors tout caractère de A est continu.

Théorème 3.4.2 ([8]). *Soit A une algèbre de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle. Alors tout caractère de A est continu.*

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont longues, calculatoires et n'utilisent aucun résultat de la théorie spectrale des a.l.m.c. Dans [3], nous avons donné des démonstrations courtes des deux théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 en utilisant une caractérisation du spectre ponctuel ([16, corollaire 5.6]) dans les a.l.m.c. commutatives et complètes.

Remarque. Dans [2], on a montré que toute algèbre à base $(x_i)_{i\geq 1}$ vérifiant les conditions (1) et (2) du théorème 3.4.1 est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre C^N.

Nous donnons deux nouvelles preuves, également courtes, du Théorème 3.4.2 en utilisant le lemme de Do. Sin. Sya (théorème 3.3.2).

1ère preuve du Théorème 3.4.2. On pose $B = \{x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in A\colon \alpha_k \in R$ pour tout $k \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}(R)$. B vérifie les conditions du théorème 3.3.2. Soit f un caractère de A. S'il existe $k \geq 1$ tel que $f(x_k) \neq 0$, alors f est continu ([8]). Supposons que $f(x_k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Soit $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in A$. On considère les suites complexes $(a_k)_{k\geq 1}$ et $(b_k)_{k\geq 1}$ définies par: $a_k = 0$ si $\alpha_k = 0$, $a_k = \alpha_k^{-1}\operatorname{Re}(\alpha_k)$ si $\alpha_k \neq 0$; $b_k = 0$ si $\alpha_k = 0$, $b_k = \alpha_k^{-1}\operatorname{Im}(\alpha_k)$ si $\alpha_k \neq 0$. $|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$ entrainent que $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k x_k \in A$ et $x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha_k x_k \in A$. On remarque que x_1 et x_2 sont des éléments de B. On a $x = x_1 + x_2$ et $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$. Le théorème 3.3.2 entraine que la restriction de f à B est nulle, d'ou f est nul.

La deuxième preuve du théorème 3.4.2 consiste à montrer que tout algèbre A, de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle, peut être munie d'une involution continue et que tout caractère de A est hermitien. Avant de donner la deuxième preuve, nous avons les résultats suivants:

Proposition 3.4.3. *Soit A une a.l.m.c. complète involutive à base orthogonale et hermitienne, alors tout caractère de A est hermitien.*

Preuve. D'après la proposition 8 de [7], chaque fonction coordonnée est hermitienne. Soit H le sous espace vectoriel réel de A formé par les éléments hermitiens de A. On a $H = \{x \in A\colon x^* = x\} = \{x \in A\colon c_n(x^*) = c_n(x)$ pour tout $n \geq 1\} = \{x \in A\colon \overline{c_n(x)} = c_n(x)$ pour tout $n \geq 1\} = \{x \in A\colon c_n(x) \in R$ pour tout $n \geq 1\}$. Soit f un caractère de A et $x \in H$. Si $f(x) \neq 0$, il existe $c_k \in \{c_n\colon n \geq 1\}$ ([13]) tel que $f(x) = c_k(x) \in R$. Il s'ensuit que la restriction de f à H est à valeurs réelles. Soit $x \in A$, en utilisant le fait que $A = H + iH$, on obtient que $f(x^*) = \overline{f(x)}$.

Théorème 3.4.4. *Soit A une algèbre de Fréchet involutive à base orthogonale et hermitienne, alors tout caractère de A est continu.*

Preuve. Soit f un caractère de A. D'après la proposition 3.4.3, f est hermitien. f se prolonge à A^+ (algèbre obtenue par adjonction de l'unité) en une forme positive, alors f est continu (théorème 4 de [17]).

2ème preuve du Théorème 3.4.2. Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in A$, alors $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n x_n$ converge dans A, ceci provient du fait que la base $(x_n)_{n\geq 1}$ est inconditionnelle ([14]). On considère l'application $v\colon A \to A$, $v(x) = \bar{x}$, v est une involution sur A. On remarque que $\|x\|_r' = \|\bar{x}\|_r'$ pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, ainsi v est continue. On a $\bar{x}_n = x_n$ pour tout $n \geq 1$, d'ou la base $(x_n)_{n\geq 1}$ est hermitienne. Il s'ensuit d'après le théorème 3.4.4 que tout caractère de A est continu.

Dans [20], en utilisant un résultat de R. Arens ([5, théorème 6.3]), W. Zelazko obtient le théorème suivant:

Théorème 3.4.5 ([20]). *Soit A une algèbre de Fréchet commutative. Si $M(A)$ est auplus dénombrable, alors tout caractère de A est continu.*

Comme conséquence, on a:

Corollaire 3.4.6 ([20]). *Soit A une algèbre de Fréchet à base orthogonale, alors tout caractère de A est continu.*

Remarque. Le corollaire 3.4.6 est une bonne amélioration du théorème 3.4.2 car la base de A n'est pas nécessairement inconditionnelle.

L'auteur remercie Messieurs les Professeurs M. Akkar et M. Oudadess dont les remarques et suggestions ont contribué à l'amélioration du manuscrit.

REFERENCES

1. M. Akkar, *Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes*, C. R. Acad. Sc. Paris, **279** (1974), Série A, 941–944.
2. M. Akkar, M. El Azhari, M. Oudadess, *Théorèmes de structure sur certaines algèbres de Fréchet*, Ann. Sc. Math. Quebec, **11** (1987), 245–252.
3. M. Akkar, M. El Azhari, M. Oudadess, *Continuité des caractères dans les algèbres de Fréchet à bases*, Canad. Math. Bull., **31** (1988), 168–174.
4. G.R. Allan, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc., **15** (1965), 399–421.
5. R. Arens, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J., **5** (1958), 169–182.
6. T. Husain, *Infrasequential topological algebras*, Canad. Math. Bull., **22** (1979), 413–418.
7. T. Husain, *Positive functionals on topological algebras with bases*, Math. Japonica, **28** (1983), 683–687.
8. T. Husain, J. Liang, *Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases*, Canad. J. Math., **29** (1977), 270–276.
9. T. Husain, J. Liang, *Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **46** (1977), 8–11.
10. T. Husain, S.B. Ng, *Boundedness of multiplicative linear functionals*, Canad. Math. Bull., **17** (1974), 213–215.

11. T. Husain, S.B. Ng, *On continuity of algebra homomorphism and uniqueness of metric topology*, Math. Zeit., **139** (1974), 1–4.
12. T. Husain, S.B. Ng, *On the boundedness of multiplicative and positive functionals*, J. Austral. Math. Soc., **21** (1976), 498–503.
13. T. Husain, S. Watson, *Topological algebras with orthogonal Schauder bases*, Pacific J. Math., **91** (1980), 339–347.
14. T. Husain, S. Watson, *Algebras with unconditional orthogonal bases*, Proc. Amer. Math. Soc., **79** (1980), 539–545.
15. G.A. Joseph, *Multiplicative functionals and a class of topological algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., **17** (1977), 391–399.
16. E.A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **11** (1952).
17. S.B. Ng, S. Warner, *Continuity of positive and multiplicative functionals*, Duke Math. J., **39** (1972), 281–284.
18. M. Oudadess, *Rayon de régularité dans les algèbres infraséquentielles*, Canad. J. Math., **36** (1984), 84–94.
19. Do. Sin. Sya, *On semi normed rings with an involution*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, **23** (1959), 509–528.
20. W. Zelazko, *Functional continuity of commutative m-convex B_0-algebras with countable maximal ideal spaces*, Colloq. Math., **51** (1987), 395–399.

Ecole Normale Supérieure
Avenue Oued Akreuch
Takaddoum, Rabat, Morocco
mohammed.elazhari@yahoo.fr

Received 7.08.2015