УДК 517.95

О. М. Бугрій

# ПРО ФОРМУЛИ ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ДЛЯ СТЕПЕНЕВИХ ФУНКЦІЙ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

O. M. Buhrii. *On formulaes of integration by parts for special type of power functions*, Mat. Stud. **45** (2016), 118–131.

We investigate properties of the function $\psi_\alpha(u)$, where $\alpha > 0$, $u \in C^m(\overline{G})$ or $u \in W^{m,p}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^N$, $\psi_\alpha$ is some power function, for example, $\psi_\alpha(s) = |s|^{\alpha-1}s$. In particular, some formulaes of integration by parts and differentiation for observed functions are proved.

**Вступ.** В цій праці досліджено питання про інтегральні та диференціальні властивості композицій $\psi_\alpha(u)$ функцій $u$ з $C^m(\overline{G})$, або з $W^{m,p}(G)$, де $m \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$, $G$ — обмежена область в $\mathbb{R}^N$, та функцій $\psi_\alpha$, які є однією з таких

$$s \mapsto (s^+)^\alpha, \quad s \mapsto (s^-)^\alpha, \quad s \mapsto |s|^\alpha, \quad s \mapsto |s|^{\alpha-1}s, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $s^\pm = \max\{\pm s, 0\}$, $\alpha > 0$.

Зрозуміло, що якщо $\alpha > 1$, то $\psi_\alpha$ є неперервно диференційовною і тому для довільного $u \in C^1(\overline{G})$ матимемо включення $\psi_\alpha(u) \in C^1(\overline{G})$. Проте якщо $0 < \alpha \le 1$, то кожна з функцій (1) не є диференційовною в точці $s = 0$, а отже, навіть коли $u \in C^\infty(\overline{G})$, то може бути, що $\psi_\alpha(u) \notin C^1(\overline{G})$. Наприклад, якщо $0 < \alpha < 1$, $G = (0,1)$, $u(y) = y$, $y \in G$, то $\psi_\alpha(u) = y^\alpha$ і функція $(\psi_\alpha(u))' = \alpha\, y^{\alpha-1}$, $y \in G$, не є неперервною на $\overline{G}$ і не належить до $L^{\frac{1}{1-\alpha}}(G)$, хоча $u \in C^\infty(\overline{G})$. Тобто, зокрема, виникає запитання: з якого простору має бути функція $u$ і яким має бути параметр $p$, щоб функція $\psi_\alpha(u)$ належала до $C^1(\overline{G})$ чи $W^{1,p}(G)$? Відповідь на нього, частково, і дає ця стаття. Нас також цікавитимуть формули для обчислення похідних функцій $\psi_\alpha(u)$, якщо такі існують, та формули інтегрування частинами для $\psi_\alpha(u)$.

З результатів [1, с. 359] випливає, що $|u|^{\alpha-1}u \in W^{1,2}(G)$ при $u \in W^{2,2\alpha}(G)$ і $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. У праці [2, с. 66] розглянуто ситуацію $G = \Omega \times (0,T)$, де $\Omega$ — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$. Доведено таке: якщо $u \in L^\infty(0,T; L^{2(\alpha-1)}(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ і $\alpha \ge 2$, або $u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ і $1 < \alpha < 2$, то $\big(|u|^{\alpha-1}u\big)_t \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$ і виконується формула $\big(|u|^{\alpha-1}u\big)_t = \alpha|u|^{\alpha-1}u_t$.

**1. Формулювання основних результатів.** Нехай $N \in \mathbb{N}$ — фіксоване число, $\mathbb{N}_k = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \ge k\}$, де $k \in \mathbb{Z}$, $C^{k,1}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ — клас областей в просторі $\mathbb{R}^N$, визначений, наприклад, в [3, с. 48], зокрема, $C^{0,1}$ — клас областей зі строго ліпшицевими межами. Припустимо, що $G \subset \mathbb{R}^N$ — обмежена область класу $C^{0,1}$. Оскільки $G \in C^{0,1}$,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35R45, 46E35, 47H30.
*Keywords:* integration by parts formulae; differentiation formulae; exponential functions.
doi:10.15330/ms.45.2.118-131

то (див., наприклад, [3, с. 46]) у майже всіх точках із гіперповерхні $\partial G$ (відносно $(N-1)$-вимірної поверхневої міри) однозначно визначений одиничний вектор нормалі до $\partial G$, зовнішній по відношенню до $G$. Позначимо його через $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$.

Нехай для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\phi_\alpha(s) := \begin{cases} s^\alpha, & s > 0, \\ 0, & s \le 0, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Нехай $\alpha > 1$, $\psi_\alpha$ — одна з функцій, визначених в (1). Тоді правильні такі твердження.*

1) *Якщо $u \in C^1(\overline{G})$, то $\psi_\alpha(u) \in C^1(\overline{G})$. Крім того, для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$ скрізь на $G$ правильна рівність*
$$\big(\psi_\alpha(u)\big)_{y_j} = \psi'_\alpha(u) u_{y_j} \tag{3}$$
*і виконується формула інтегрування частинами*
$$\int_G \big(\psi_\alpha(u)\big)_{y_j} v\, dy = \int_{\partial G} \psi_\alpha(u)\, v\, \nu_j\, dS - \int_G \psi_\alpha(u)\, v_{y_j}\, dy \tag{4}$$
*для довільної $v \in C^1(\overline{G})$.*

2) *Якщо $u \in W^{1,p}(G)$ при $p \ge \alpha$, то $\psi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{p}{\alpha}}(G)$. Крім того, для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$ рівність (3) виконується майже скрізь в $G$, рівність (4) правильна за однієї з таких умов:*
   *(i) $v \in W^{1,r}(G)$, де $1 < r < N$, $\frac{\alpha}{p} + \frac{1}{r} \le 1 + \frac{1}{N}$, якщо $1 < \frac{p}{\alpha} < N$;*
   *(ii) $v \in W^{1,r}(G)$, де $r > N$, або $v \in W^{1,N}(G) \cap L^\infty(G)$, якщо $\frac{p}{\alpha} = 1$.*

   *Також для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$ правильна оцінка*
$$\|\big(\psi_\alpha(u)\big)_{y_j}; L^{\frac{p}{\alpha}}(G)\| \le C_1 \|u; L^p(G)\|^{\alpha-1} \|u_{y_j}; L^p(G)\|, \tag{5}$$
*де $C_1 > 0$ — стала, яка не залежить від $u$.*

**Теорема 2.** *Нехай $0 < \alpha \le 1$, $m \in \mathbb{N}$ — найменше число таке, що $\alpha > \frac{1}{m}$, $\psi_\alpha$ — одна з функцій, визначених в (1). Тоді правильні такі твердження.*

1) *Якщо $u \in C^m(\overline{G})$, то $\psi_\alpha(u) \in C(\overline{G}) \cap W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$. Крім того, для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$ майже скрізь в $G$ виконуються рівності*
$$\big((u^\pm)^\alpha\big)_{y_j} = \pm\alpha\, \phi_{\alpha-1}(u^\pm)\, u_{y_j}, \tag{6}$$
$$\big(|u|^\alpha\big)_{y_j} = \alpha\, \phi_{\alpha-2}(|u|) u\, u_{y_j}, \tag{7}$$
$$(|u|^{\alpha-1} u)_{y_j} = \alpha\, \phi_{\alpha-1}(|u|) u_{y_j} \tag{8}$$
*і виконуються формули інтегрування частинами*
$$\pm \int_G \alpha\, \phi_{\alpha-1}(u^\pm) u_{y_j}\, v\, dy = \int_{\partial G} (u^\pm)^\alpha\, v\, \nu_j\, dS - \int_G (u^\pm)^\alpha\, v_{y_j}\, dy, \tag{9}$$
$$\int_G \alpha\, \phi_{\alpha-2}(|u|) u\, u_{y_j}\, v\, dy = \int_{\partial G} |u|^\alpha\, v\, \nu_j\, dS - \int_G |u|^\alpha\, v_{y_j}\, dy, \tag{10}$$
$$\int_G \alpha\, \phi_{\alpha-1}(|u|) u_{y_j}\, v\, dy = \int_{\partial G} |u|^{\alpha-1} u\, v\, \nu_j\, dS - \int_G |u|^{\alpha-1} u\, v_{y_j}\, dy \tag{11}$$
*для всіх $v \in W^{1,1}(G) \cap L^m(G)$.*

*2) Якщо $u \in W^{m,p}(G)$ при $p \geq m\alpha$ і $G$ — обмежена область класу $C^{m-1,1}$, то $\psi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$. Крім того, для кожного $j \in \{1,\ldots,N\}$ рівності (6)–(8) виконується майже скрізь в $G$, правильні рівності (9)–(11) для всіх $v \in W^{1,m}(G)$, а також виконується оцінка*

$$\|\psi_\alpha(u); W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)\| \leq C_2 \|u; W^{m,p}(G)\|^\alpha, \tag{12}$$

*де $C_2 > 0$ — стала, яка не залежить від $u$.*

**Зауваження 1.** У рівностях (6)–(11) замість $\phi_\beta(s)$, де $\beta \leq 0$, можна писати $s^\beta$ для будь-яких $s \in \mathbb{R}$, якщо формально вважати, що $0^\beta = 0$.

**Зауваження 2.** Нехай $N = 1$, $G = (0,1)$, $0 < \alpha \leq 1$, $\psi_\alpha$ — одна з функцій, визначених в (1). Якщо $\alpha = \frac{1}{m}$, де $m \geq 2$, то гладкість функції $u$ не може забезпечити виконання включення $\psi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$. Справді, якщо $u(y) = y$, $y \in G$, а отже, $u \in C^\infty(\overline{G})$, то

$$\left|\big(\phi_\alpha(u)\big)_y\right|^{\frac{m}{m-1}} = \left|\big(y^{\frac{1}{m}}\big)'\right|^{\frac{m}{m-1}} = C_1(m)\left|y^{\frac{1}{m}-1}\right|^{\frac{m}{m-1}} = C_1(m)\, y^{-1} \notin L^1(G).$$

Отож, умова $\alpha > \frac{1}{m}$ твердження теореми 2 є точна в такому розумінні: якщо $\alpha > \frac{1}{m}$, то $\psi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$ для досить гладких функцій $u$; якщо $\alpha = \frac{1}{m}$, то, взагалі кажучи, $\phi_\alpha(u) \notin W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$ для деяких, навіть, нескінченно диференційовних $u$.

**2. Допоміжні твердження.** Спершу наведемо позначення і факти, які використовуватимемо далі. Очевидно, що якщо $\alpha > 0$, то

$$\phi_\alpha(s) = (s^+)^\alpha, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

і для всіх $s \in \mathbb{R}$ виконуються рівності

$$s^- = (-s)^+, \quad |s|^\alpha = (s^+)^\alpha + (s^-)^\alpha, \quad |s|^{\alpha-1}s = (s^+)^\alpha - (s^-)^\alpha. \tag{14}$$

Легко переконатися, що для будь-яких $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ виконуються (див., наприклад, [4, с. 82]) нерівності

$$s^+ \leq |s|, \quad |s_1^+ - s_2^+| \leq |s_1 - s_2|. \tag{15}$$

Як випливає з теореми A.1 ([5, с. 47]), якщо $v \in W^{1,r}(G)$, де $1 \leq r \leq \infty$, то $v^+ \in W^{1,r}(G)$ і, крім того, для кожного $j \in \{1,\ldots,N\}$ правильна рівність $(v^+)_{y_j} = \widetilde{\chi}(v) v_{y_j}$ майже скрізь в $G$, де

$$\widetilde{\chi}(s) := \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Також відомо (див. [3, с. 49] і [6, с. 103]), що для всіх $w \in W^{k,p}(G)$, де $k = p = 1$ або $1 < p < \infty$ і $k \in \mathbb{N}$, а $G$ — обмежена область класу $C^{k-1,1}$ виконується оцінка

$$\|w; W^{k-1,p}(\partial G)\| \leq C_3 \|w; W^{k,p}(G)\|, \tag{17}$$

де $C_3 > 0$ — стала, яка не залежить від $w$.

**Лема 1.** *Якщо $G \subset \mathbb{R}^N$ — обмежена область класу $C^{0,1}$, то*

$$\int_G w_{y_j}\, v\, dy = \int_{\partial G} w\, v\, \nu_j\, dS - \int_G w\, v_{y_j}\, dy, \qquad j \in \{1,\ldots,N\}, \tag{18}$$

*де функції $w, v$ задовольняють одну з таких умов:*

*i)* $v \in W^{1,q}(G)$, $w \in W^{1,r}(G)$, *де* $1 < q < N$, $1 < r < N$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le 1 + \frac{1}{N}$;

*ii)* $v \in W^{1,1}(G)$ *і або* $w \in W^{1,r}(G)$ *при* $r > N$, *або* $w \in W^{1,N}(G) \cap L^{\infty}(G)$;

*iii)* $v \in W^{1,1}(G) \cap L^m(G)$, $w \in W^{1,\frac{m}{m-1}}(G) \cap C(\overline{G})$, $m > 1$.

*Доведення.* Правильність тверджень *(i)* та *(ii)* випливає з [4, с. 70, 79, 80]. Доведемо *(iii)*. Нехай $v \in W^{1,1}(G) \cap L^m(G)$, $w \in W^{1,\frac{m}{m-1}}(G) \cap C(\overline{G})$, $\{w^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{G})$, $w^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} w$ в $W^{1,\frac{m}{m-1}}(G) \cap C(\overline{G})$. Згідно з пунктом *(ii)* записуємо (18) для $w^k$ замість $w$. Спрямувавши в отриманій рівності $k$ до $+\infty$, одержимо (18). □

**Лема 2.** *Нехай* $\alpha > 0$, $\psi_\alpha$ *— одна з функцій, визначених в (1),* $Q = G$ *або* $Q = \partial G$. *Тоді, якщо* $u \in L^p(Q)$, *де* $p \ge \max\{1, \alpha\}$, *то* $\psi_\alpha(u) \in L^{\frac{p}{\alpha}}(Q)$ *і для всіх* $q \in [1, \frac{p}{\alpha}]$ *правильні такі твердження:*

*1) виконується оцінка*
$$\|\psi_\alpha(u); L^q(Q)\| \le C_4 \|u; L^p(Q)\|^{\alpha}, \tag{19}$$
*де* $C_4 > 0$ *— стала, яка не залежить від* $u$;

*2) якщо* $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ *сильно в* $L^p(Q)$, *то*
$$\psi_\alpha(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \psi_\alpha(u) \quad \text{сильно в} \quad L^q(Q). \tag{20}$$

*Доведення.* Спершу доведемо лему для функції $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ (див. (2)), а затим використаємо (13) і (14).

а) Зрозуміло, що $\frac{p}{\alpha} \ge 1$. З (13) і (15) маємо, що $|\phi_\alpha(u)|^{\frac{p}{\alpha}} = |u^+|^p \le |u|^p \in L^1(Q)$. Тому з [7, с. 297] випливає, що $\phi_\alpha(u) \in L^{\frac{p}{\alpha}}(Q)$ і тоді для кожного $q \in [1, \frac{p}{\alpha}]$ матимемо оцінку $\|\phi_\alpha(u); L^q(Q)\| \le C_5 \|\phi_\alpha(u); L^{\frac{p}{\alpha}}(Q)\| \le C_5 \|u; L^p(Q)\|^{\alpha}$, тобто виконується (19).

б) З теореми 2.1 [8, с. 2] випливає, що для всіх $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ виконується нерівність
$$\big||\eta_1|^{r-2}\eta_1 - |\eta_2|^{r-2}\eta_2\big| \le C_6(r)(|\eta_1| + |\eta_2|)^{r-1-\beta}|\eta_1 - \eta_2|^{\beta}, \tag{21}$$
де $r > 1$, $0 \le \beta \le \min\{1, r-1\}$, $C_6(r) > 0$ — стала, яка не залежить від $\eta_1, \eta_2$. Візьмемо тут $r = \alpha + 1$, $\eta_1 = s_1^+$, $\eta_2 = s_2^+$, де $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Тоді отримаємо нерівність
$$|\phi_\alpha(s_1) - \phi_\alpha(s_2)| \le C_7(\alpha)(s_1^+ + s_2^+)^{\alpha-\beta}|s_1^+ - s_2^+|^{\beta},$$
де $C_7(\alpha) > 0$ — стала, яка не залежить від $s_1, s_2$. Використавши оцінки (15), одержимо
$$|\phi_\alpha(s_1) - \phi_\alpha(s_2)| \le C_7(\alpha)(|s_1| + |s_2|)^{\alpha-\beta}|s_1 - s_2|^{\beta}, \tag{22}$$
де $0 \le \beta \le \min\{1, \alpha\}$. Розглянемо два випадки: $0 < \alpha \le 1$ і $\alpha > 1$. Нехай спершу $0 < \alpha \le 1$. Тоді в (22) візьмемо $\beta = \alpha$ і отримаємо, що $|\phi_\alpha(s_1) - \phi_\alpha(s_2)| \le C_7(\alpha)|s_1 - s_2|^{\alpha}$. Звідси випливає оцінка
$$\int_Q |\phi_\alpha(u^m) - \phi_\alpha(u)|^{\frac{p}{\alpha}}\, dy \le C_8(\alpha) \int_Q |u^m - u|^p\, dy,$$
а з неї отримаємо (20) для $q = \frac{p}{\alpha}$, а тому і для $1 \le q < \frac{p}{\alpha}$. Якщо $\alpha > 1$, то візьмемо в (22) $\beta = 1$ і одержимо, що $|\phi_\alpha(s_1) - \phi_\alpha(s_2)| \le C_7(\alpha)(|s_1| + |s_2|)^{\alpha-1}|s_1 - s_2|$. Звідси, використавши нерівність Гельдера, отримаємо
$$\int_Q |\phi_\alpha(u^m) - \phi_\alpha(u)|^{\frac{p}{\alpha}}\, dy \le C_8(\alpha)\Big(\int_Q (|u^m| + |u|)^p\, dy\Big)^{\frac{1}{\alpha'}}\Big(\int_Q |u^m - u|^p\, dy\Big)^{\frac{1}{\alpha}},$$

де $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, і знову матимемо правильність твердження 2 леми для $q = \frac{p}{\alpha}$, а тому і для $1 \le q < \frac{p}{\alpha}$.

в) Ми довели твердження леми для функції $\psi_\alpha = \phi_\alpha$. Тому, використавши рівності (13) та (14), одержимо (19) і (20) для кожної функції, визначеної в (1). $\square$

**Лема 3.** *Нехай $0 < \beta \le 1$, $\phi_\beta$ — функція, яка визначена в (2) з $\beta$ замість $\alpha$,*

$$\chi_k(s) = \begin{cases} 1, & s > \frac{1}{k}, \\ 0, & s \le \frac{1}{k}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

*Тоді для функції $u \in C^1(\overline{G})$ і кожного $j \in \{1, \dots, N\}$ функція $\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}$ є вимірною на $G$ і для всіх $v \in W^{1,1}(G)$ виконується рівність*

$$\lim_{k\to\infty} \int_G \chi_k(u)\,\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}\,v\,dy = \int_{\partial G} \phi_\beta(u)\,v\,\nu_j\,dS - \int_G \phi_\beta(u)\,v_{y_j}\,dy. \tag{24}$$

*Доведення.* Нехай $v \in W^{1,1}(G)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Визначимо функції $\phi_{\beta,k}$ і $\widetilde{\xi}_{\beta,k}$ так:

$$\phi_{\beta,k}(s) = \begin{cases} k^\beta, & s \ge k, \\ s^\beta, & \frac{1}{k} < s < k, \\ \frac{1}{k^\beta}, & s \le \frac{1}{k}, \end{cases} \quad \widetilde{\xi}_{\beta,k}(s) = \begin{cases} \beta\, s^{\beta-1}, & \frac{1}{k} < s < k, \\ 0, & s \le \frac{1}{k} \text{ або } s \ge k, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_2.$$

Зрозуміло, що $\phi_{\beta,k}(s) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi_\beta(s)$ для кожного $s \in \mathbb{R}$. Крім того, для кожного $k \in \mathbb{N}_2$ функція $\phi_{\beta,k}$ задовольняє умову Ліпшіца на $\mathbb{R}$ і є недиференційовною лише в точках $s = \frac{1}{k}$ і $s = k$, причому $\frac{d}{ds}\,\phi_{\beta,k}(s) = \widetilde{\xi}_{\beta,k}(s)$ при $s \ne \frac{1}{k}$ і $s \ne k$. Тому з наслідку A.6 [5, с. 50] і леми A.4 ([5, с. 49]) випливає, що $\phi_{\beta,k}(u) \in W^{1,\infty}(G)$ і

$$\big(\phi_{\beta,k}(u)\big)_{y_j} = \widetilde{\xi}_{\beta,k}(u)u_{y_j} \quad \text{майже всюди на} \quad G. \tag{25}$$

Тоді з пункту *(ii)* леми 1 з $w = \phi_{\beta,k}(u)$ матимемо рівність (18) у вигляді

$$\int_G \big(\phi_{\beta,k}(u)\big)_{y_j}\,v\,dy = \int_{\partial G} \phi_{\beta,k}(u)\,v\,\nu_j\,dS - \int_G \phi_{\beta,k}(u)\,v_{y_j}\,dy. \tag{26}$$

Нехай $M = \max_{y\in\overline{G}} |u(y)|$, $k_0 \in \mathbb{N}$ — таке, що $k_0 \ge \max\{2, M\}$. Оскільки $|u| \le M \le k_0 \le k$, то з (25) отримаємо рівність $\big(\phi_{\beta,k}(u)\big)_{y_j} = \widetilde{\xi}_{\beta,k}(u)u_{y_j} = \chi_k(u)\,\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}$ при $k \in \mathbb{N}_{k_0}$. З оцінки $|\phi_{\beta,k}(u(y))| \le M^\beta\ \forall\, y \in G$ і теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (теорема 6 [7, с. 302]) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\partial G} \phi_{\beta,k}(u)\,v\,\nu_j\,dS = \int_{\partial G} \phi_\beta(u)\,v\,\nu_j\,dS, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_G \phi_{\beta,k}(u)\,v_{y_j}\,dy = \int_G \phi_\beta(u)\,v_{y_j}\,dy. \tag{27}$$

З (27) випливає існування границі справа в (26) при $k \to \infty$, а тому і границі зліва в (26). Отже, виконується (24).

Оскільки $\chi_k(u)\,\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}$ поточково в області $G$ і функція $\chi_k(u)\,\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}$ є вимірною для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, то з теореми 3 [9, с. 63] випливає вимірність функції $\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}$ на $G$. $\square$

**3. Обґрунтування основних результатів.**

*Доведення твердження 1 теореми 1.* Припустимо, що $u \in C^1(\overline{G})$. Оскільки $\alpha > 1$, то $\psi_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ і тоді $\big(\psi_\alpha(u)\big)_{y_j} = \psi'_\alpha(u)\, u_{y_j}$ на $G$. Тому з вигляду функції $\psi'_\alpha$ отримаємо рівності (6)–(8) і включення $\psi_\alpha(u) \in C^1(\overline{G})$. Крім того, з леми 1 одержимо (4) для всіх $v \in C^1(\overline{G})$. □

*Доведення твердження 2 теореми 1.* Нехай $u \in W^{1,p}(G)$ при $p \geq \alpha$, а $v \in C^1(\overline{G})$. Виберемо послідовність $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{G})$ таку, що $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $W^{1,p}(G)$, а тому (див. оцінку (17)) і сильно в $L^p(\partial G)$.

Одержимо спершу твердження 2 теореми для функції $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ (див. (2)).

а) Оскільки $1 < \alpha \leq p$, то $\frac{p}{\alpha-1} > 1$. Тоді на підставі твердження 2 леми 2

$$\phi_{\alpha-1}(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha-1}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p}{\alpha-1}}(G).$$

Відомо, що $[L^{\frac{p}{\alpha-1}}(G)]^* \cong L^{\frac{p}{p-(\alpha-1)}}(G)$. Оскільки $p \geq (\alpha-1)+1$, то $p \geq \frac{p}{p-(\alpha-1)}$. Тому з вибору $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ випливає, що $u^m_{y_j} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_{y_j}$ сильно в $L^{\frac{p}{p-(\alpha-1)}}(G)$. Тоді з леми 5.2 [3, с. 19] матимемо таке:

$$\int_G \alpha\phi_{\alpha-1}(u^m)u^m_{y_j}\, v\, dy \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_G \alpha\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j}\, v\, dy \tag{28}$$

і $\alpha\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \in L^1(G)$. На підставі твердження 2 леми 2 для $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ отримаємо, що

$$\phi_\alpha(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_\alpha(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p}{\alpha}}(G), \tag{29}$$

$$\phi_\alpha(u^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_\alpha(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{p}{\alpha}}(\partial G). \tag{30}$$

З (4) для $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ і для $u^m$ замість $u$ випливає рівність

$$\int_G \alpha\phi_{\alpha-1}(u^m)u^m_{y_j}\, v\, dy = \int_{\partial G} \phi_\alpha(u^m)\, v\nu_j\, dS - \int_G \phi_\alpha(u^m)\, v_{y_j}\, dy.$$

Звідси, спрямувавши $m \to \infty$ і використавши (28)–(30), одержимо рівність

$$\int_G \alpha\,\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j}\, v\, dy = \int_{\partial G} \phi_\alpha(u)\, v\, \nu_j\, dS - \int_G \phi_\alpha(u)\, v_{y_j}\, dy. \tag{31}$$

б) Беручи в (31) $v \in C_0^\infty(G)$, одержимо $\int_G \alpha\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j}\, v\, dy = -\int_G \phi_\alpha(u)\, v_{y_j}\, dy$. Отже, згідно з означенням похідної функції в сенсі Соболєва маємо виконання рівності

$$\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j} = \alpha\,\phi_{\alpha-1}(u)\, u_{y_j} \quad \text{майже скрізь на} \quad G. \tag{32}$$

в) З нерівності Юнга для показників $\alpha \in (1,p]$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1} > 1$ матимемо таке:

$$\left|\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j}\right|^{\frac{p}{\alpha}} = \alpha^{\frac{p}{\alpha}}\phi_{\frac{p}{\alpha'}}(u)|u_{y_j}|^{\frac{p}{\alpha}} \leq C_9(\phi_p(u) + |u_{y_j}|^p) \leq C_9(|u|^p + |u_{y_j}|^p) \in L^1(G).$$

Тому з [7, с. 297] отримаємо, що $\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j} \in L^{\frac{p}{\alpha}}(G)$ для кожного $j \in \{1,\ldots,N\}$. Отож, $\phi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{p}{\alpha}}(G)$.

г) З (32) і нерівності Гельдера для показників $\alpha, \alpha'$ матимемо таке:

$$\int_G \Big| \big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j} \Big|^{\frac{p}{\alpha}} dy = \int_G \Big| \alpha \phi_{\alpha-1}(u) u_{y_j} \Big|^{\frac{p}{\alpha}} dy = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \int_G \phi_{\frac{p}{\alpha'}}(u) |u_{y_j}|^{\frac{p}{\alpha}} dy \le$$
$$\le \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \Big( \int_G |\phi_{\frac{p}{\alpha'}}(u)|^{\alpha'} dy \Big)^{\frac{1}{\alpha'}} \Big( \int_G |u_{y_j}|^p dy \Big)^{\frac{1}{\alpha}} \le \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \Big( \int_G |u|^p dy \Big)^{\frac{1}{\alpha'}} \Big( \int_G |u_{y_j}|^p dy \Big)^{\frac{1}{\alpha}},$$

звідки і випливає (5) для $\psi_\alpha = \phi_\alpha$. Правильність (4) випливає з леми 1.

г) З (13), (14) і щойно отриманих для $\phi_\alpha$ результатів випливає повне доведення твердження 2 теореми 1. □

*Доведення твердження 1 теореми 2.* Нехай $\phi_\alpha$ — функція, визначена в (2).

1) Спершу доведемо таке: для довільного $m \in \mathbb{N}_2$ виконується твердження

$\mathbf{P_m}$: для кожних $\alpha \in (\frac{1}{m}, 1]$ і $u \in C^m(\overline{G})$ маємо, що $\phi_\alpha(u) \in C(\overline{G}) \cap W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$, правильні рівність (32) майже скрізь в $G$ та рівність (31) для довільної $v \in W^{1,1}(G) \cap L^m(G)$.

Використаємо метод математичної індукції.

а) Доведемо твердження $\mathbf{P_2}$. Нехай $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $u \in C^2(\overline{G})$. Взявши в (24) $v = u_{y_j}$, що законно, бо $u_{y_j} \in W^{1,1}(G)$, отримаємо рівність

$$\lim_{k\to\infty} \int_G f_k \, dy = \int_{\partial G} \phi_\beta(u) u_{y_j} \nu_j \, dS - \int_G \phi_\beta(u) u_{y_j y_j} \, dy, \tag{33}$$

де $f_k = \chi_k(u)\, \beta\, \phi_{\beta-1}(u) |u_{y_j}|^2$, $\beta \in (0, 1]$, $\chi_k$ визначено в (23), $k \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що

$$f_k(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(y) \quad \text{для} \quad y \in G, \tag{34}$$

де $f = \beta\, \phi_{\beta-1}(u) |u_{y_j}|^2 = \beta |\phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u) u_{y_j}|^2$. З існування цієї границі випливає, що існує стала $C_{10} > 0$ така, що правильна оцінка

$$\int_G f_k \, dy \le C_{10} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Очевидно, що $f_{k_1} \le f_{k_2}$ при $k_1 \le k_2$. Тому з теореми Леві про монотонну збіжність (теорема 7 [7, с. 303]) та (34) матимемо, що $f \in L^1(G)$ і

$$\int_G f_k \, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_G f \, dy. \tag{36}$$

З того, що $f \in L^1(G)$ випливає включення

$$\phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u) u_{y_j} \in L^2(G). \tag{37}$$

Поєднуючи (33) і (36), отримаємо рівність

$$\int_G \beta |\phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u) u_{y_j}|^2 \, dy = \int_{\partial G} \phi_\beta(u) u_{y_j} \nu_j \, dS - \int_G \phi_\beta(u) u_{y_j y_j} \, dy. \tag{38}$$

З (36) також одержимо збіжність

$$\|\chi_k(u)\, \phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u) u_{y_j}; L^2(G)\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|\phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u) u_{y_j}; L^2(G)\|. \tag{39}$$

З оцінки (35) і теореми 5.9 [3, с. 20] випливає існування елемента $g \in L^2(G)$ і підпослідовності $\{f_{k_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ таких, що $\sqrt{f_{k_\ell}} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} g$ слабко в просторі $L^2(G)$. Тоді з поточкової збіжності $\sqrt{f_{k_\ell}} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{f}$ і леми 1.19 [3, с. 39] випливає рівність $g = \sqrt{f}$. Отже, $\chi_{k_\ell}(u)\,\phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u)u_{y_j} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u)u_{y_j}$ слабко в $L^2(G)$. Тому з рівномірної опуклості простору $L^2(G)$ (див. лему 1.15 [3, с. 38]), збіжності (39) і теореми 5.12 [3, с. 21] одержимо таке:

$$\chi_{k_\ell}(u)\phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u)u_{y_j} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\frac{\beta-1}{2}}(u)u_{y_j} \quad \text{сильно в} \quad L^2(G) \tag{40}$$

для будь-якого $\beta \in (0,1]$. Зрозуміло, що значення виразу $\frac{\beta-1}{2}$ пробігає півінтервал $(-\frac{1}{2},0]$, якщо $\beta$ пробігає $(0,1]$. Ту саму множину $(-\frac{1}{2},0]$ пробігає значення виразу $\alpha-1$ при $\alpha \in (\frac{1}{2},1]$. Тому для всіх $\alpha \in (\frac{1}{2},1]$ існує $\beta \in (0,1]$ таке, що $\frac{\beta-1}{2} = \alpha - 1$ і (див. (40))

$$\chi_{k_\ell}(u)\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \quad \text{сильно в} \quad L^2(G). \tag{41}$$

З (37) матимемо включення $\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \in L^2(G)$.

Візьмемо в (24) $\beta = \alpha$, $k = k_\ell$, $v \in W^{1,1}(G) \cap L^2(G)$. Використавши (41), отримаємо (31) для будь-яких $\alpha \in (\frac{1}{2},1]$, $u \in C^2(\overline{G})$, $v \in W^{1,1}(G) \cap L^2(G)$.

З (31) вже стандартно одержимо рівність (32), з (41) — включення $(\phi_\alpha(u))_{y_j} \in L^2(G)$, а з вигляду $\phi_\alpha$ — включення $\phi_\alpha(u) \in C(\overline{G})$. Твердження $\mathbf{P_2}$ доведено.

б) Припустимо, що виконується твердження $\mathbf{P_m}$, де $m \in \mathbb{N}_2$, і доведемо $\mathbf{P_{m+1}}$. Отже, нехай $\alpha \in (\frac{1}{m+1},1]$, $u \in C^{m+1}(\overline{G})$. Для доведення можна в (24) взяти $v = |u_{y_j}|^{\gamma-1}u_{y_j}$, де $\gamma \in (\frac{1}{m},1]$. Проте обчислити похідну $v_{y_j}$ на цьому етапі доведення ми ще не вміємо. Щоб коректно реалізувати вказану підстановку візьмемо в (24) $v = \phi_\gamma(u_{y_j}) - \phi_\gamma(-u_{y_j})$, де $\gamma \in (\frac{1}{m},1]$. Це законно, бо з припущення індукції матимемо, що $\phi_\gamma(\pm u_{y_j}) \in C(\overline{G}) \cap W^{1,\frac{m}{m-1}}(G) \subset W^{1,1}(G)$. Крім того, $\big(\phi_\gamma(\pm u_{y_j})\big)_{y_j} = \pm\gamma\phi_{\gamma-1}(\pm u_{y_j})u_{y_jy_j}$. У результаті

$$\lim_{k\to\infty}\int_G \chi_k(u)\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}\big(\phi_\gamma(u_{y_j}) - \phi_\gamma(-u_{y_j})\big)\,dy =$$

$$= \int_{\partial G}\phi_\beta(u)\Big(\phi_\gamma(u_{y_j}) - \phi_\gamma(-u_{y_j})\Big)\nu_j\,dS - \int_G \phi_\beta(u)\,\gamma\Big(\phi_{\gamma-1}(u_{y_j}) + \phi_{\gamma-1}(-u_{y_j})\Big)u_{y_jy_j}\,dy, \tag{42}$$

де $\beta \in (0,1]$, $\gamma \in (\frac{1}{m},1]$, $\chi_k$ визначено в (23), $k \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що $s|s^+|^\gamma = |s^+|^{\gamma+1} = \widetilde{\chi}(s)|s|^{\gamma+1}$, де $s \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\chi}$ визначено в (16). Тому

$$g_k := \chi_k(u)\beta\,\phi_{\beta-1}(u)u_{y_j}\big(\phi_\gamma(u_{y_j}) - \phi_\gamma(-u_{y_j})\big) =$$

$$= \chi_k(u)\beta\,\phi_{\beta-1}(u)\Big(u_{y_j}\big|(u_{y_j})^+\big|^\gamma - u_{y_j}\big|(-u_{y_j})^+\big|^\gamma\Big) =$$

$$= \chi_k(u)\beta\,\phi_{\beta-1}(u)\Big(\widetilde{\chi}(u_{y_j})\big|u_{y_j}\big|^\gamma + \widetilde{\chi}(-u_{y_j})\big|u_{y_j}\big|^\gamma\Big) = \chi_k(u)\,\beta\Big|\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)\Big|^{\gamma+1} \times$$

$$\times \Big(\widetilde{\chi}(u_{y_j}) + \widetilde{\chi}(-u_{y_j})\Big)|u_{y_j}|^{\gamma+1} = \chi_k(u)\,\beta\Big|\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j}\Big|^{\gamma+1} \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

З існування границі в (42) випливає оцінка

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \int_G g_k\,dy \leq C_{11} \tag{44}$$

де $C_{11} > 0$ — стала, яка не залежить від $k$. Тому як і (36), (37) отримуємо

$$\int_G g_k\,dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_G g\,dy, \quad \text{де} \quad g = \beta\Big|\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j}\Big|^{\gamma+1}, \tag{45}$$

$$\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j} \in L^{\gamma+1}(G). \tag{46}$$

З (42), (43) і (45) отримаємо рівність

$$\int_G \beta\Big|\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j}\Big|^{\gamma+1}\,dy =$$

$$= \int_{\partial G}\phi_\beta(u)\Big(\phi_\gamma(u_{y_j}) - \phi_\gamma(-u_{y_j})\Big)\nu_j\,dS - \int_G \phi_\beta(u)\,\gamma\Big(\phi_{\gamma-1}(u_{y_j}) + \phi_{\gamma-1}(-u_{y_j})\Big)u_{y_jy_j}\,dy. \tag{47}$$

Далі, аналогічно як з (35)–(37) одержали (40), з (44)–(46) для всіх $\beta \in (0,1]$, $\gamma \in (\frac{1}{m}, 1]$ отримаємо, що

$$\chi_{k_\ell}(u)\,\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j} \quad \text{сильно в} \quad L^{\gamma+1}(G). \tag{48}$$

Оскільки $\gamma + 1 > \frac{1}{m} + 1 = \frac{m+1}{m}$, то з (48) одержимо збіжність

$$\chi_{k_\ell}(u)\,\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j} \underset{\ell\to+0}{\longrightarrow} \phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j} \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{m+1}{m}}(G). \tag{49}$$

Зрозуміло, що функція $z(\beta,\gamma) = \frac{\beta-1}{\gamma+1}$, $(\beta,\gamma) \in (0,1] \times (\frac{1}{m}, 1]$, є неперервною. Оскільки $z(+0, \frac{1}{m}+0) = \frac{-1}{\frac{1}{m}+1} = -\frac{m}{m+1}$, $z(1,1) = 0$, то множиною значень $z$ є півінтервал $(-\frac{m}{m+1}, 0]$. Цю ж множину $(-\frac{m}{m+1}, 0]$ пробігає значення виразу $\alpha - 1$, якщо $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, 1]$. Тому для всіх $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, 1]$ існують $\beta \in (0,1]$ та $\gamma \in (\frac{1}{m}, 1]$ такі, що $\frac{\beta-1}{\gamma+1} = \alpha - 1$, тобто $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{\gamma+1}$, і (49) означає, що

$$\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \in L^{\frac{m+1}{m}}(G), \tag{50}$$

$$\chi_{k_\ell}(u)\,\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \underset{\ell\to+0}{\longrightarrow} \phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j} \quad \text{сильно в} \quad L^{\frac{m+1}{m}}(G). \tag{51}$$

Відомо, що $[L^{\frac{m+1}{m}}(G)]^* \cong L^{m+1}(G)$. Тому з (24) при $\beta = \alpha$, $k = k_\ell$, $v \in W^{1,1}(G) \cap L^m(G)$, перейшовши до границі під знаком інтеграла, отримаємо (31) для $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, 1]$, $u \in C^{m+1}(\overline{G})$, $v \in W^{1,1}(G) \cap L^{m+1}(G)$. Далі, як і при завершенні доведення твердження $\mathbf{P_2}$, одержимо (32). Крім того, з (50) маємо включення $\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j} \in L^{\frac{m+1}{m}}(G)$ при $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, 1]$ і зрозуміло, що $\phi_\alpha(u) \in C(\overline{G})$.

Твердження $\mathbf{P_{m+1}}$ доведено, а тому згідно з методом математичної індукції маємо, що для кожного $m \in \mathbb{N}_2$ виконується $\mathbf{P_m}$.

2) З рівностей (13), (14) і отриманих для $\phi_\alpha$ результатів випливає правильність твердження 1 теореми 2. □

*Доведення твердження 2 теореми 2.* Нехай $\phi_\alpha$ — функція з (2).

1) Спершу доведемо таке: для довільного $m \in \mathbb{N}_2$ виконується твердження

$\mathbf{Q_m}$: якщо $\alpha \in (\frac{1}{m}, 1]$, $G$ — обмежена область класу $C^{m-1,1}$, $u \in W^{m,p}(G)$ при $p \geq m\alpha$, то $\phi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)$ і правильні оцінка (12) з $\psi_\alpha = \phi_\alpha$, рівність (32) майже скрізь в $G$ і рівність (31) для всіх функцій $v \in W^{1,m}(G)$.

Використаємо метод математичної індукції.

а) Доведемо твердження $\mathbf{Q_2}$. Нехай $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, $G$ — обмежена область класу $C^{1,1}$. Перш за все для довільної фіксованої функції $u \in C^2(\overline{G})$ доведемо оцінку (12) при $m = 2$, тобто, покажемо, що

$$\|\psi_\alpha(u); W^{1,2}(G)\| \le C_{12}\|u; W^{2,p}(G)\|^\alpha, \tag{52}$$

де $p \ge 2\alpha$, $C_{12} > 0$ — стала, яка не залежить від $u$. Зауважимо, що згідно з твердженням 1 цієї теореми маємо таке: $\psi_\alpha(u) \in C(\overline{G}) \cap W^{1,2}(G)$, правильна рівність (32) і рівність (31) для всіх функцій $v \in W^{1,m}(G)$. Нехай $j \in \{1, \dots, N\}$ і візьмемо в (38) $\beta = 2\alpha - 1$ (тоді $\beta \in (0, 1]$, бо $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$). Поділивши отриману рівність на $\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}$ і використавши рівність (32), яка виконується згідно вже доведеного твердження $\mathbf{P_2}$, одержимо, що

$$\int_G \Big|\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j}\Big|^2 dy = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}\Big(\int_{\partial G} \phi_{2\alpha-1}(u) u_{y_j} \nu_j \, dS - \int_G \phi_{2\alpha-1}(u) u_{y_j y_j} \, dy\Big) \le$$
$$\le \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}\Big(\int_{\partial G} \phi_{2\alpha-1}(u) |u_{y_j}| \, dS + \int_G \phi_{2\alpha-1}(u) |u_{y_j y_j}| \, dy\Big). \tag{53}$$

Нехай $J_1 = \int_{\partial G} \phi_{2\alpha-1}(u)|u_{y_j}| \, dS$. Тоді для всіх $r > 1$

$$J_1 \le \|\phi_{2\alpha-1}(u); L^{r'}(\partial G)\| \cdot \|u_{y_j}; L^r(\partial G)\|.$$

Оскільки $p \ge 2\alpha > 1$, то при $r = 2\alpha$ маємо такі оцінки:

$$r > 1, \; r' = \frac{r}{r-1} > 1, \; r \le p, \; r' = \frac{r}{2\alpha - 1} \le \frac{p}{2\alpha - 1}, \; 2\alpha - 1 < p.$$

Тому з оцінки (19) при $Q = \partial G$ і $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ одержимо, що

$$\|\phi_{2\alpha-1}(u); L^{r'}(\partial G)\| \le C_{13}\|u; L^p(\partial G)\|^{2\alpha-1},$$

а тому, врахувавши, що $L^p(\partial G) \circlearrowleft L^r(\partial G)$, матимемо оцінку

$$J_1 \le C_{14}\|u; L^p(\partial G)\|^{2\alpha-1} \cdot \|u_{y_j}; L^p(\partial G)\|,$$

де $C_{14} > 0$ — стала, яка не залежить від $u$. Аналогічну оцінку отримаємо для другого інтегралу в правій частині нерівності (53). Остаточно, взявши з обох частин (53) квадратний корінь, матимемо таке

$$\|\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j}; L^2(G)\| \le C_{15}\Big(\|u; L^p(\partial G)\|^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot \|u_{y_j}; L^p(\partial G)\|^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \|u; L^p(G)\|^{\alpha - \frac{1}{2}} \cdot \|u_{y_j y_j}; L^p(G)\|^{\frac{1}{2}}\Big), \tag{54}$$

де $C_{15} > 0$ — стала, яка не залежить від $u$.

Оскільки $p \ge 2\alpha$, то $2 \le \frac{p}{\alpha}$ і з оцінки (19) для $Q = G$ і $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ одержимо, що

$$\|\phi_\alpha(u); L^2(G)\| \le C_{16}\|u; L^p(G)\|^\alpha, \tag{55}$$

де $C_{16} > 0$ — стала, яка не залежить від $u$. З (54), (55) і (17) (тут використаємо умову $G \in C^{1,1}$) отримаємо (52) для $u \in C^2(\overline{G})$.

Нехай тепер $u \in W^{2,p}(G)$, $p \geq 2\alpha$, $\{u^\ell\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^2(\overline{G})$ — послідовність така, що $u^\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $W^{2,p}(G)$. З (52) маємо оцінку

$$\|\phi_\alpha(u^\ell); W^{1,2}(G)\| \leq C_{17}\|u^\ell; W^{2,p}(G)\|^\alpha, \tag{56}$$

де $C_{17} > 0$ — стала, яка не залежить від $\ell$ та $u$.

З вибору $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ випливає обмеженість правої частини (56) сталою, яка не залежить від $\ell$. Тому існує підпослідовність $\{u^{\ell_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ і функція $\chi \in W^{1,2}(G)$ такі, що

$$\phi_\alpha(u^{\ell_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{слабко в} \quad W^{1,2}(G). \tag{57}$$

Це означає, що

$$\phi_\alpha(u^{\ell_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{сильно в} \quad L^2(G),$$

$$\big(\phi_\alpha(u^{\ell_k})\big)_{y_j} = \alpha\,\phi_{\alpha-1}(u^{\ell_k})u^{\ell_k}_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{y_j} \quad \text{слабко в} \quad L^2(G), \quad j=\overline{1,N}.$$

Також з вибору послідовності $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ матимемо (можливо при переході до нової підпослідовності) збіжність

$$u^{\ell_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u, \quad u^{\ell_k}_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_{y_j} \quad \text{майже скрізь в} \quad G, \quad j=\overline{1,N}. \tag{58}$$

Тому $\chi = \phi_\alpha(u)$ і $\chi_{y_j} = \alpha\,\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j}$. Отже, виконується (31) і (32). Використовуючи лему 5.3 [3, с. 20], з (56) одержимо (52) для $u \in W^{2,p}(G)$ і $p \geq 2\alpha$. Твердження $\mathbf{Q_2}$ доведено.

б) Припустимо, що виконується твердження $\mathbf{Q_m}$, де $m \in \mathbb{N}_2$, і доведемо $\mathbf{Q_{m+1}}$. Нехай $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, 1]$, $G$ — обмежена область класу $C^{m,1}$. Перш за все для довільного фіксованого $u \in C^{m+1}(\overline{G})$ доведемо оцінку (12) з $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ та з $m+1$ замість $m$, тобто покажемо, що

$$\|\phi_\alpha(u); W^{1,\frac{m+1}{m}}(G)\| \leq C_{18}\|u; W^{m+1,p}(G)\|^\alpha, \tag{59}$$

де $p \geq (m+1)\alpha$, $C_{18} > 0$ — стала, яка не залежить від $u$.

Нехай, спочатку, $\alpha > \frac{1}{m}$. Оскільки $\frac{m+1}{m} < \frac{m}{m-1}$, то

$$W^{1,\frac{m}{m-1}}(G) \circlearrowleft W^{1,\frac{m+1}{m}}(G)$$

і за припущенням індукції (див. (12)) матимемо

$$\|\phi_\alpha(u); W^{1,\frac{m+1}{m}}(G)\| \leq C_{19}\|\phi_\alpha(u); W^{1,\frac{m}{m-1}}(G)\| \leq C_{20}\|u; W^{m,p}(G)\|^\alpha \leq C_{21}\|u; W^{m+1,p}(G)\|^\alpha,$$

тобто маємо (59).

Далі припускаємо, що $\frac{1}{m+1} < \alpha \leq \frac{1}{m}$. Як ми вже зазначали при доведенні $\mathbf{P_{m+1}}$, для кожного $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, 1]$ (а тому і для $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}])$ існують такі $(\beta, \gamma) \in (0,1] \times (\frac{1}{m}, 1]$, що виконується рівність

$$\alpha = \frac{\beta - 1}{\gamma + 1} + 1 = \frac{\beta + \gamma}{\gamma + 1}. \tag{60}$$

Оскільки $\gamma \in (\frac{1}{m}, 1]$, то $\gamma + 1 > \frac{m+1}{m}$ і тоді

$$\int_G \Big|\phi_{\frac{\beta-1}{\gamma+1}}(u)u_{y_j}\Big|^{\gamma+1} dy = \Big\|\phi_{\alpha-1}(u)u_{y_j}; L^{\gamma+1}(G)\Big\|^{\gamma+1} \geq C_{22}\Big\|\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j}; L^{\frac{m+1}{m}}(G)\Big\|^{\gamma+1},$$

де стала $C_{22} > 0$ не залежить від $u$. Звідси та з (47) випливає оцінка

$$\left\|\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j}; L^{\frac{m+1}{m}}(G)\right\|^{\gamma+1} \le C_{23}\Big(\int_{\partial G}\phi_\beta(u)\phi_\gamma(u_{y_j})\,dS + \int_{\partial G}\phi_\beta(u)\phi_\gamma(-u_{y_j})\,dS + \\ + \int_G \phi_\beta(u)\Big|\big(\phi_\gamma(u_{y_j})\big)_{y_j}\Big|\,dy + \int_G \phi_\beta(u)\Big|\big(\phi_\gamma(-u_{y_j})\big)_{y_j}\Big|\,dy\Big), \tag{61}$$

де

$$\alpha \in \Big(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\Big],\ \gamma \in \Big(\frac{1}{m}, 1\Big],\ \beta = \alpha(\gamma+1) - \gamma \in (0,1],\ C_{23} > 0$$

не залежить від $u$.

Покажемо, що

$$p \ge 1 + \beta. \tag{62}$$

Справді, оскільки $\alpha > \frac{1}{m+1}$, то $\alpha(m+1) > 1$. Отже,

$$\alpha(m+1)\Big(1 - \frac{1}{m}\Big) > 1 - \frac{1}{m}, \quad \alpha(m+1) > 1 - \frac{1}{m} + \alpha(m+1)\frac{1}{m} = 1 + \alpha - \frac{1}{m}(1-\alpha).$$

Звідси, врахувавши, що $p \ge \alpha(m+1)$ і $\gamma > \frac{1}{m}$, отримаємо (див. (60)) таке:

$$p \ge 1 + \alpha - \frac{1}{m}(1-\alpha) > 1 + \alpha - \gamma(1-\alpha) = 1 + \alpha(\gamma+1) - \gamma = 1 + \beta,$$

тобто, виконується (62).

Розглянемо вираз $I_1 = \int_{\partial G}\phi_\beta(u)\,\phi_\gamma(u_{y_j})\,dS$. Для всіх $r > 1$ отримаємо, що

$$I_1 \le \|\phi_\beta(u); L^{r'}(\partial G)\| \cdot \|\phi_\gamma(u_{y_j}); L^r(\partial G)\|.$$

Взявши $r = 1 + \beta$, з (62) одержимо, що $r \le p$. Крім того, $r > 1$, а тому $1 < r' = \frac{r}{r-1} = \frac{r}{\beta} \le \frac{p}{\beta}$. Тому з оцінки (19) для $Q = \partial G$ одержимо, що

$$\|\phi_\beta(u); L^{r'}(\partial G)\| \le C_{24}\|u; L^p(\partial G)\|^\beta. \tag{63}$$

Оскільки $\gamma \le 1$, то $1 \le \frac{1}{\gamma}$ та $r \le \frac{r}{\gamma} \le \frac{p}{\gamma}$. Крім того, $p > 1 \ge \gamma$ і $r > 1$. Тому з (19) для $Q = \partial G$ матимемо, що $\|\phi_\gamma(u_{y_j}); L^r(\partial G)\| \le C_{25}\|u_{y_j}; L^p(\partial G)\|^\gamma$. Отже,

$$I_1 \le C_{26}\|u; L^p(\partial G)\|^\beta \|u_{y_j}; L^p(\partial G)\|^\gamma.$$

Аналогічну оцінку зробимо для другого доданку правої частини нерівності (61).

Розглянемо вираз $I_2 = \int_G \phi_\beta(u)\big|\big(\phi_{\gamma-1}(u_{y_j})\big)_{y_j}\big|\,dy$. Для всіх $r > 1$ отримаємо, що

$$I_2 \le \|\phi_\beta(u); L^{r'}(G)\| \cdot \big\|\big(\phi_\gamma(u_{y_j})\big)_{y_j}; L^r(G)\big\|.$$

Аналогічно як (63) одержимо, що $\|\phi_\beta(u); L^{r'}(G)\| \le C_{27}\|u; L^p(G)\|^\beta$.

Покажемо, що $r \le \frac{m}{m-1}$. Дійсно, для виразу $s = r - \frac{m}{m-1}$ маємо, що

$$s = 1 - \frac{m}{m-1} + \alpha(\gamma+1) - \gamma = -\frac{1}{m-1} + \alpha(\gamma+1) - \gamma.$$

Оскільки $\alpha \le \frac{1}{m}$, то

$$s \le -\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}(\gamma+1) - \gamma = \frac{1}{m} - \frac{1}{m-1} + \gamma\Big(\frac{1}{m} - 1\Big) = -\frac{1}{m(m-1)} - \gamma\frac{m-1}{m} < 0.$$

Отже, $r \le \frac{m}{m-1}$ і з припущення індукції та (12) для $\psi_\alpha = \phi_\alpha$ матимемо, що

$$\|\big(\phi_\gamma(u_{y_j})\big)_{y_j}; L^r(G)\| \le C_{28}\|\big(\phi_\gamma(u_{y_j})\big)_{y_j}; L^{\frac{m}{m-1}}(G)\| \le C_{29}\|u_{y_j}; W^{m,p}(G)\|^\gamma \le$$

$$\le C_{30}\|u; W^{m+1,p}(G)\|^\gamma.$$

Отже,

$$I_2 \le C_{31}\|u; L^p(G)\|^\beta \|u; W^{m+1,p}(G)\|^\gamma.$$

Аналогічну оцінку зробимо для четвертого доданку правої частини нерівності (61).

Остаточно з (61), (17) і (60) отримаємо оцінку

$$\Big\|\big(\phi_\alpha(u)\big)_{y_j}; L^{\frac{m+1}{m}}(G)\Big\| \le C_{32}\Big(\|u; L^p(\partial G)\|^{\frac{\beta}{\gamma+1}}\|u_{y_j}; L^p(\partial G)\|^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} +$$

$$+ \|u; L^p(G)\|^{\frac{\beta}{\gamma+1}}\|u; W^{m+1,p}(G)\|^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\Big) \le C_{33}\|u; W^{m+1,p}(G)\|^\alpha, \tag{64}$$

де стала $C_{33} > 0$ не залежить від $u$.

Оскільки $p \ge (m+1)\alpha > 1 \ge \alpha$, то $\frac{m+1}{m} \le m+1 \le \frac{p}{\alpha}$ і з оцінки (19) для $q = \frac{m+1}{m}$ одержимо, що

$$\|\phi_\alpha(u); L^{\frac{m+1}{m}}(G)\| \le C_{34}\|u; L^p(G)\|^\alpha, \tag{65}$$

де $\alpha \in (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$, $C_{34} > 0$ — стала, яка не залежить від $u$.

З (64), (65) і випливає оцінка (59) для $u \in C^{m+1}(\overline{G})$.

Нехай тепер $u \in W^{m+1,p}(G)$ при $p \ge (m+1)\alpha$, $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^{m+1}(\overline{G})$ — послідовність така, що $u^\ell \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} u$ сильно в $W^{m+1,p}(G)$. Записавши (59) для $u = u^\ell$ і спрямувавши $\ell \to \infty$, аналогічно як при доведенні (52) отримуємо (59) для $u \in W^{m+1,p}(G)$. Далі доведення завершуємо як і при доведенні твердження $\mathbf{Q_2}$ і отримаємо включення $\phi_\alpha(u) \in W^{1,\frac{m+1}{m}}(G)$, рівність (32) майже скрізь в $G$, рівність (31) для всіх функцій $v \in W^{1,1}(G) \cap L^{m+1}(G)$.

Твердження $\mathbf{Q_{m+1}}$ доведено, а тому згідно з методом математичної індукції маємо, що для кожного $m \in \mathbb{N}_2$ виконується $\mathbf{Q_m}$.

2) З рівностей (13), (14) і отриманих для $\phi_\alpha$ результатів випливає доведення другого пункту теореми 2. □

## ЛІТЕРАТУРА


1. Metafune G., Spina C. *An integration by part formula in Sobolev spaces*// Mediterr. J. Math. – 2008. – V.5. – P. 357–369.
2. Lions J.-L., Strauss W.A. *Some non-linear evolution equations*// Bulletin de la S. M. F. – 1965. – V.93. – P. 43–96.
3. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen. – Moscow, 1978, 336 p. (in Russian)

4. Ladyzenskaya O.A., Uraltseva N.N. Linear and quasilinear elliptic equations. – Moscow, 1973, 576 p. (in Russian)
5. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications – Moscow, 1983, 256 p. (in Russian)
6. Baiocchi C., Capelo A. Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems. – Moscow, 1988, 448 p. (in Russian)
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Theory of functions and functional analysis. – Moscow, 1972, 496 p. (in Russian)
8. Byström J. *Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator*// Jour. of Ineq. in Pure and Appl. Math. – 2005. – V.6, Issue2. – Article 56.
9. Gorodetskyi V.V., Nagnybida N.I., Nastasiev P.P. Methods of solving of function analysis problems. – Kyiv, 1990, 479 p. (in Russian)

Ivan Franko National University of Lviv
ol_buhrii@i.ua

*Надійшло 30.12.2015*