УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ У БАГАТОВИМІРНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

V. S. Il'kiv, N. I. Strap. *Nonlocal boundary value problem for a differential-operator equation with nonlinear right part in a complex domain*, Mat. Stud. **45** (2016), 170–181.

The paper is devoted to investigation of nonlocal boundary value problem for a differential-operator equation with the nonlinear right part and with the operator $B=(B_1,\dots,B_p)$, where $B_j\equiv z_j\frac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\dots,p$, — operators of the generalized differentiation on complex variable z_j. This problem is incorrect in the Hadamard sense and its sobvability related to the small denominators. By using of the Nash-Mozer iteration scheme the conditions of the sobvability of the problem in the scale of spaces of functions of several complex variables are established.

1. Вступ. Дослідження нелокальних крайових задач для різних типів диференціальних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними та встановлення умов коректної їх розв'язності є одним із важливих напрямів розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними ([1, 2]). В основному ці задачі пов'язані з проблемою малих знаменників і є некоректними щодо своїх параметрів, а їх коректність забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов на коефіцієнти рівнянь та параметри нелокальних умов ([3, 4]).

У даній статті досліджується нелокальна крайова задача для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною та оператором диференціювання $B=(B_1,\dots,B_p)$, де $B_j\equiv z_j\frac{\partial}{\partial z_j}$, $j\in\{1,\dots,p\}$, який діє на функції від просторових змінних $(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^p$. Доведення теорем побудовані за схемою ітерацій Неша-Мозера ([5, 6]). Тут виникають дві основні трудності: доведення оборотності лінеаризованих операторів, які отримуємо на кожному кроці ітерацій, а також поява при цьому проблеми малих знаменників. Оборотність лінеаризованих операторів отримано методом зі статті ([7]), а проблема малих знаменників вирішується за допомогою метричного підходу.

2. Основні позначення та постановка задачі. Нехай $\mathcal{S}$ однозв'язна область з проколотої у нулі комплексної площини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, а $\mathcal{D}^p:=[0,T]\times\mathcal{S}^p$ — циліндрична область, де $T>0$, $p\geq 2$. В області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною правою частиною

$$Lu\equiv L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial z}\Big)u\equiv\sum_{|\widehat{s}|\leq n}a_{\widehat{s}}B^s\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}=\varepsilon f(u), \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 35E05.
Keywords: differential equation; generalized differentiation; small denominators; the Nash-Moser scheme.
doi:10.15330/ms.45.2.170-181

$$M_m u \equiv \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = 0, \quad m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{2}$$

де $\widehat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s}$ — комплексні коефіцієнти ($a_{n,0} = 1$), ε — комплексний параметр, u — шукана функція. $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$, де $B_j^{s_j}$ — степені оператора B_j, зокрема, $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$. Компоненти оператора $B = (B_1, \ldots, B_p)$ є операторами узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, і $B_j(z^k) = k_j z^k$.

Розглянемо задачу на власні значення для оператора, породженого диференціальним виразом $L(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z})$ і крайовими умовами (2)

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) u = \lambda u, \qquad M_m u = 0, \quad m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{3}$$

Власними значеннями задачі (3), (2) є числа $\lambda_{m,k} = L(\tau(m), k)$, $\tau(m) = \frac{\ln \mu}{T} + \frac{i\,2\pi m}{T}$, $(m, k) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, які утворюють точковий спектр σ_p оператора L. Власними функціями, що відповідають власному значенню $\lambda_{m,k}$, є функції $\varphi_{m^*,k^*} = e^{\tau(m^*)t} z^{k^*}$, $(m, k) \in R_{m,k}$, де $R_{m,k}$ — множина розв'язків у цілих числах m^*, $k^* = (k_1^*, \ldots, k_p^*)$ рівняння $L(\tau(m^*), k^*) = L(\tau(m), k)$ [1].

Для задачі (1), (2) розглянемо простори

$$\mathbf{H}_q = \Big\{ u(t, z) = \sum_{(m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}} u_{m,k}\, e^{\tau(m)t}\, z^k : \|u\|_q^2 := \sum_{(m,k) \in \mathbb{Z}^{p+1}} |u_{m,k}|^2 (1 + m^2 + |k|^2)^q < +\infty \Big\},$$

де $q \in \mathbb{R}$, $|k|^2 = |k_1|^2 + \ldots + |k_p|^2$.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати, використовуючи схему ітерацій Неша-Мозера ([5, 6, 7]). Для кожного $N \in \mathbb{N}$ розіб'ємо простір $\mathbf{H}_q$ наступним чином:

$$\mathbf{H}_q = \mathbf{W}^{(N)} \oplus \mathbf{W}^{(N)\perp}, \quad \mathbf{W}^{(N)} = \Big\{ u \in \mathbf{H}_q : u = \sum_{1 + m^2 + |k|^2 \le N^2} u_{m,k}\, e^{\tau(m)t}\, z^k \Big\},$$

$$\mathbf{W}^{(N)\perp} = \Big\{ u \in \mathbf{H}_q : u = \sum_{1 + m^2 + |k|^2 > N^2} u_{m,k}\, e^{\tau(m)t}\, z^k \Big\}.$$

Позначимо через $\mathrm{P}_N : \mathbf{H}_q \to \mathbf{W}^{(N)}$ і $\mathrm{P}_N^\perp : \mathbf{H}_q \to \mathbf{W}^{(N)\perp}$, $N \in \mathbb{N}$, оператори проектування у просторі $\mathbf{H}_q$ на $\mathbf{W}^{(N)}$ і $\mathbf{W}^{(N)\perp}$ відповідно, які для довільної $u \in \mathbf{H}_q$ визначаються наступними формулами

$$\mathrm{P}_N\, u = \sum_{1 + m^2 + |k|^2 \le N^2} u_{m,k}\, e^{\tau(m)t}\, z^k, \quad \mathrm{P}_N^\perp\, u = \sum_{1 + m^2 + |k|^2 > N^2} u_{m,k}\, e^{\tau(m)t}\, z^k. \tag{4}$$

Використовуючи введені позначення, отримаємо, що $\mathbf{W}^{(N)} = \mathrm{P}_N \mathbf{H}_q$ і $\mathbf{W}^{(N)\perp} = \mathrm{P}_N^\perp \mathbf{H}_q$.

З означень простору $\mathbf{H}_q$ і проектора P_N випливає, що для будь-яких $N \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ і $r \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\|\mathrm{P}_N u\|_{q+r} \le N^r \|u\|_q \quad \text{для кожної} \quad u \in \mathbf{H}_q, \tag{5}$$

$$\|\mathrm{P}_N^\perp u\|_q \le N^{-r} \|u\|_{q+r} \quad \text{для кожної} \quad u \in \mathbf{H}_{q+r}. \tag{6}$$

Існування розв'язку задачі (1), (2) базується на наступних властивостях $(P1)$–$(P4)$ коефіцієнтів рівняння $a_{\widehat{s}}$ та функції $f : \mathbf{H}_d \to \mathbf{H}_d$, яка, за припущенням, відображає простір $\mathbf{H}_d$ в себе для деякого $d > (p+1)/2$.

Нехай числа $l \geq d+2$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що виконуються умови $(P1)$–$(P4)$, що наведені у роботі [6]. Перші три властивості характеризують поведінку функції f у кулі $K_1 = \{u \in \mathbf{H}_d : \ \|u\|_d \leq 1\}$ простору $\mathbf{H}_d$.

$(P1)$ $f \in C^2(\mathbf{H}_d; \mathbf{H}_d)$, зокрема f, $\mathrm{D}_u f$, $\mathrm{D}_u^2 f$ обмежені на K_1.

$(P2)$ Для будь-якого $d \leq d' < l$ та функції $u \in \mathbf{H}_{d'}$ виконується нерівність $\|f(u)\|_{d'} \leq c_0(1 + \|u\|_{d'})$, тобто $c_0 = \sup\left\{\sup\left\{\frac{\|f(u)\|_{d'}}{1+\|u\|_{d'}} : u \in \mathbf{H}_{d'}\right\} : d'\right\} < \infty.$

$(P3)$ Для будь-якого $d \leq d' \leq l-2$ та функцій u і h з простору $\mathbf{H}_{d'}$ виконується оцінка

$$\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\|_{d'} \leq c_2(\|u\|_{d'}\|h\|_d^2 + \|h\|_d\|h\|_{d'}),$$

тобто, $c_2 = \sup\left\{\sup\left\{\frac{\|f(u+h)-f(u)-\mathrm{D}_u f(u)h\|_{d'}}{\|u\|_{d'}\|h\|_d^2+\|h\|_d\|h\|_{d'}} : \{u,h\} \subset \mathbf{H}_{d'}\right\} : d'\right\} < \infty.$

З властивості $(P3)$ випливає, що

$$\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\|_d \leq 2c_2\|h\|_d^2.$$

Для формулювання властивості $(P4)$ введемо наступні позначення. Нехай коефіцієнти рівняння (1) належать кругу $\mathcal{O}_A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < A\}$ радіуса $A > 0$.

Позначимо вектори $\vec{\varepsilon} = (\operatorname{Re}\varepsilon, \operatorname{Im}\varepsilon)$ і $\vec{a} = (\operatorname{Re} a_{\widehat{s}(j)}, \operatorname{Im} a_{\widehat{s}(j)})_{j\in\{0,1,\dots,p\}}$ для $\widehat{s}(j) = (\underbrace{0,\dots,0}_{j}, n, 0, \dots, 0)$ і вважаємо, що $a_{\underbrace{0,\dots,0}_{j},n,0,\dots,0} = \theta_{2j+1} + i\,\theta_{2j+2}$, де θ_{2j+1} і θ_{2j+2} — дійсні числа. Тоді вектор $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^{p+1}$ можна записати у вигляді: $\vec{a} = (\theta_1, \dots, \theta_{2p+2})$.

Введемо послідовність натуральних чисел N_q, $q \in \{0, 1, \dots\}$, за формулою $N_q = N_0^{2^q}$ з великим $N_0 \geq 2$ і зауважимо, що $N_{q+k} = N_q^{2k}$, де $k \in \mathbb{N}$.

Оператор L розглядатимемо за умови $p \geq 2n$ на множині параметрів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^{p+1}$, всі інші $a_{\widehat{s}}$ вважатимемо фіксованими. Для $\eta > \frac{p+1-2n}{4}$ і $\gamma > 0$ побудуємо послідовність множин A_0, A_1, …, де A_q — множина тих коефіцієнтів $\vec{a}$ рівняння (1), для яких виконується оцінка

$$|L(\tau(m), k)| \geq \gamma(1 + m^2 + |k|^2)^{-\eta} \quad \text{при} \quad 1 + m^2 + |k|^2 \leq N_q^2, \quad q \in \{0, 1, \dots\}. \tag{7}$$

За визначенням множин A_q очевидними є такі вкладення
$$\ldots \subseteq A_q \subseteq A_{q-1} \subseteq \ldots \subseteq A_1 \subseteq A_0 \subset \mathcal{O}_A^{p+1}.$$

Позначимо $c_1 = \sup\limits_{h\in K_1} \|D_u f(u)[h]\|_{\overline{d}}$. Введемо відповідні до множин A_q множини $\mathcal{A}_q$ формулою $\mathcal{A}_q = \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times A_q$, $q \geq 0$, де

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{3\gamma}{16c_3}, \frac{\gamma}{2c_3 N_0^{2\eta}}\right\}, \tag{8}$$

$c_3 = \max\{c_0, c_1, 2c_2\}$ і, зокрема, $\ldots \subseteq \mathcal{A}_q \subseteq \mathcal{A}_{q-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}_A^{p+1}$.
Нижче для доповнення деякої множини C в $\mathcal{O}_A^{p+1}$ використовуватимемо позначення $\overline{C}$.

Для довільних $u \in \mathbf{W}^{(N)}$, $h \in \mathbf{W}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, та параметра $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ позначимо

$$\mathcal{L}_N[h] \equiv \mathcal{L}_N(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u)[h] = Lh - \varepsilon \mathrm{P}_N \mathrm{D}_u f(u)h,$$

де L — ліва частина рівняння (1), проектор P_N задає формула (4).

Наступна властивість $(P4)$ є властивістю неперервності оператора, оберненого до лінійного оператора $\mathcal{L}_{N_q}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u):\mathbf{W}^{(N_q)}\to\mathbf{W}^{(N_q)}$.

$(P4)$ Нехай для $u\in\mathbf{W}^{(N_q)}\cap K_1$ існує таке $\overline{\overline{d}}>d+2\eta$, що $D_uf\in C^1(\mathbf{H}_d;\mathbf{H}_{\overline{\overline{d}}})$ і для будь-яких $h\in\mathbf{W}^{(N_q)}$, $d\le\overline{d}\le\overline{\overline{d}}-2\eta$, $\gamma>0$, що для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_q$ оператор $\mathcal{L}_{N_q}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u):\mathbf{W}^{(N_q)}\to\mathbf{W}^{(N_q)}$ є оборотним і

$$\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1}(\varepsilon,\vec{a},u)[h]\|_{\overline{d}}\le\frac{2}{\gamma}N_q^{2\eta}\|h\|_{\overline{d}}. \tag{9}$$

Доведення властивості $(P4)$. Для довільного $q\ge0$ подамо оператор $\mathcal{L}_{N_q}$ у вигляді $\mathcal{L}_{N_q}=\mathcal{D}-\mathcal{T}_q$, де $\mathcal{D}$ — діагональний оператор, $\mathcal{D}=L$, а $\mathcal{T}_q=\varepsilon\mathrm{P}_{N_q}\mathrm{D}_uf$, і факторизуємо

$$\mathcal{L}_{N_q}=|\mathcal{D}|^{\frac12}\mathcal{U}|\mathcal{D}|^{\frac12}-\mathcal{T}_q=|\mathcal{D}|^{\frac12}(\mathcal{U}-\mathcal{R}_1)|\mathcal{D}|^{\frac12}=|\mathcal{D}|^{\frac12}\mathcal{U}(\mathcal{I}-\mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1)|\mathcal{D}|^{\frac12},$$

причому $\mathcal{U}=|\mathcal{D}|^{-\frac12}\mathcal{D}|\mathcal{D}|^{-\frac12}$ і $\mathcal{R}_1=|\mathcal{D}|^{-\frac12}\mathcal{T}_q|\mathcal{D}|^{-\frac12}$.

Оператори $\mathcal{D}$ і $|\mathcal{D}|^\alpha$, $\alpha\ge0$, визначені і діють у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q\}_{q\in\mathbb{R}}$, зокрема, якщо $h=\sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}}h_{m,k}\varphi_{m,k}$, то

$$\mathcal{D}h=\sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}}\lambda_{m,k}\ h_{m,k}\ \varphi_{m,k},\qquad|\mathcal{D}|^\alpha h=\sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}}|\lambda_{m,k}|^\alpha\ h_{m,k}\ \varphi_{m,k}.$$

Для $\alpha<0$ оператори $|\mathcal{D}|^\alpha$ існують за умови $\lambda_{m,k}\ne0$ для всіх $(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}$. Оператори $\mathcal{D}$ і $|\mathcal{D}|^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, у просторі $\mathbf{W}^{(N_q)}$ представлені діагональними матрицями, мають власні значення $\lambda_{m,k}$ і $|\lambda_{m,k}|^\alpha$, відповідно, і власні функції $\varphi_{m,k}=e^{\tau(m)t}z^k$ при $1+m^2+|k|^2\le N_q^2$.

Лема 1. *Для всіх векторів $\vec{a}\in A_q$ оператор $|\mathcal{D}|$ є оборотним і для довільних $\overline{d}\in\mathbb{R}$ та $h\in\mathbf{W}^{(N_q)}$ виконується оцінка*

$$\left\||\mathcal{D}|^{-\frac12}h\right\|_{\overline{d}}\le\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|h\|_{\overline{d}+\eta},\quad\eta>\frac{p+1-2n}{4}.$$

Доведення цієї леми буде наведено далі.

Розглянемо оператор, обернений до оператора $\mathcal{L}_{N_q}$:

$$\mathcal{L}_{N_q}^{-1}=|\mathcal{D}|^{-\frac12}(\mathcal{I}-\mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1)^{-1}\mathcal{U}^{-1}|\mathcal{D}|^{-\frac12}=|\mathcal{D}|^{-\frac12}(\mathcal{I}-\mathcal{R})^{-1}\mathcal{U}^{-1}|\mathcal{D}|^{-\frac12},$$

де $\mathcal{R}=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1$ і $(\mathcal{I}-\mathcal{R})^{-1}=\mathcal{I}+\sum\limits_{p=1}^{\infty}\mathcal{R}^p$ за умови збіжності ряду.

Норми операторів $\mathcal{U}$ та $\mathcal{R}_1$ у просторі $\mathbf{H}_{\overline{d}}$ для всіх $d\le\overline{d}\le\overline{\overline{d}}-2\eta$ характеризують леми 2 та 3, які будуть доведені у пункті 4.

Лема 2. *Нехай точковий спектр оператора L не містить нуля, тобто $0\notin\sigma_p$. Тоді для будь-якого $\overline{d}\in\mathbb{R}$ оператор $\mathcal{U}$ є ізометричним у просторі $\mathbf{H}_{\overline{d}}$.*

Лема 3. *Для оператора $\mathcal{R}_1$: $\mathbf{W}^{(N_q)}\to\mathbf{W}^{(N_q)}$ для всіх $d\le\overline{d}\le\overline{\overline{d}}-2\eta$ і $u\in\mathbf{W}^{(N_q)}$ справджується оцінка*

$$\|\mathcal{R}_1h\|_{\overline{d}}\le c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|h\|_{\overline{d}}.$$

Зауваження. За властивістю $(P1)$ величина $c_1<\infty$ і є для функції f сталою Ліпшиця.

З формули $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1$ і лем 1 та 2 для всіх $d \le \overline{d} \le \overline{\overline{d}} - 2\eta$ отримаємо нерівність

$$\|\mathcal{R}h\|_{\overline{d}} = \|\mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1 h\|_{\overline{d}} = \|\mathcal{R}_1 h\|_{\overline{d}} \le c_1 \frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|h\|_{\overline{d}}.$$

Запишемо оцінку $\|(I-\mathcal{R})^{-1}h\|_{\overline{d}} \le \|h\|_{\overline{d}} + \sum_{r\in\mathbb{N}} \|\mathcal{R}^r h\|_{\overline{d}}$, де

$$\|\mathcal{R}^r h\|_{\overline{d}} = \|\mathcal{R}(\mathcal{R}^{r-1})h\|_{\overline{d}} \le c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|\mathcal{R}^{r-1}h\|_{\overline{d}} \le \Big(c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^r\|h\|_{\overline{d}},$$

з якої, за умови (8), маємо

$$\|(\mathcal{I}-\mathcal{R})^{-1}h\|_{\overline{d}} \le \|h\|_{\overline{d}}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{c_1|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^r < \|h\|_{\overline{d}}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{c_1\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^r =$$
$$= \|h\|_{\overline{d}}\Big(1-\frac{c_1\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^{-1} = \frac{\gamma}{\gamma - c_1\varepsilon_0}\|h\|_{\overline{d}}.$$

Повертаючись до оцінки норми оператора $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$, виводимо, що для $d \le \overline{d} \le \overline{\overline{d}} - 2\eta$ та векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_q$ справджуються оцінки

$$\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1}h\|_{\overline{d}} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma - c_1\varepsilon_0}\big\||\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}h\big\|_{\overline{d}+\eta} \le \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma}{\gamma - c_1\varepsilon_0}\|h\|_{\overline{d}+2\eta} \le$$
$$\le \frac{N_q^{2\eta}}{\gamma - c_1\varepsilon_0}\|h\|_{\overline{d}} = \frac{N_q^{2\eta}}{\frac{\gamma}{2} - c_1\varepsilon_0 + \frac{\gamma}{2}}\|h\|_{\overline{d}} \le \frac{2}{\gamma}N_q^{2\eta}\|h\|_{\overline{d}}.$$

Отже, властивість $(P4)$ доведено. □

З властивості $(P4)$ випливає, що нерівність (9) виконується для векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_q$. Для довільного $\gamma > 0$ послідовність вкладених множин $\{\mathcal{A}_q\}_{q\in\{0,1,\dots\}}$ збіжна до множини $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_\infty(\gamma) = \lim\limits_{q\to\infty}\mathcal{A}_q$. Саме на цій множині існує розв'язок задачі (1), (2).

3. Встановлення умов розв'язності задачі (1)**,** (2)**.** Рекурентно задамо послідовність функцій $\{u_q\}_{q\ge 0}$, $u_q \in \mathbf{W}^{(N_q)}$, визначених на множинах $\mathcal{A}_q$, яка збігатиметься до розв'язку $u \in \mathbf{H}_d$ задачі (1), (2) для всіх векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_\infty$. Метою побудови є також показати, що множина параметрів $\mathcal{A}_\infty$, для яких існує розв'язок задачі (1), (2), є досить великою у множині $\mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}_A^{p+1}$ та знайти оцінку знизу її міри.

Теорема 1. *Нехай виконуються властивості* $(P1)$—$(P4)$, $\beta = 12\eta$, $\eta > \frac{1}{4}(p+1-2n)$. *Тоді існує послідовність функцій* $\{u_q\}_{q\ge 0}$, *в якій* $u_q = \sum_{i=0}^{q} h_i \in \mathbf{W}^{(N_q)}$ *є розв'язком рівняння*

$$Lu_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_q} f(u_q) = 0, \qquad (P_{N_q})$$

який визначений для всіх векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_q$, *і має властивості* $B_q \le B_0 N_{q+1}^{2\eta}$, $q \in \mathbb{N}$, $\|h_i\|_d \le 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-2\eta}$, $1 \le i \le q$, *де* $B_q = 1 + \|u_q\|_{d+\beta}$ *для* $q \ge 0$, *зокрема,* $B_0 \le 1 + \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2c_0 N_0^{14\eta}$.

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. За умови $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_0$ знайдемо розв'язок рівняння

$$Lu - \varepsilon \mathrm{P}_{N_0} f(u) = 0. \qquad (P_{N_0})$$

Для довільного $w = \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_0^2} w_{m,k}\varphi_{m,k}$ існує $L^{-1}\colon \mathbf{W}^{(N_0)} \to \mathbf{W}^{(N_0)}$, зокрема,

$$L^{-1}w = \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_0^2} \lambda_{m,k}^{-1}\, w_{m,k}\, \varphi_{m,k} = \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_0^2} \frac{w_{m,k}\ \varphi_{m,k}}{L(\tau(m),k)},$$

тому, з оцінки (7) випливає нерівність

$$\left\|L^{-1}w\right\|_d^2 = \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_0^2} (1+m^2+|k|^2)^d \frac{|w_{m,k}|^2}{|L(\tau(m),k)|^2} \le$$
$$\le \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_0^2} \frac{1}{\gamma^2}(1+m^2+|k|^2)^{d+2\eta}|w_{m,k}|^2 = \frac{1}{\gamma^2}\|w\|_{d+2\eta}^2.$$

Тоді,

$$\left\|L^{-1}w\right\|_d \le \frac{1}{\gamma}\|w\|_{d+2\eta} \le \frac{1}{\gamma}N_0^{2\eta}\|w\|_d. \tag{10}$$

Рівняння (P_{N_0}) зводимо до вигляду $u{=}\varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}f(u)$. Позначимо $H^0(u){=}\varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}f(u)$ значення оператора $H^0\colon \mathbf{W}^{(N_0)}{\to}\mathbf{W}^{(N_0)}$ на елементі $u{\in}\mathbf{W}^{(N_0)}$, тоді знаходження розв'язку рівняння (P_{N_0}) зводиться до відшукання нерухомої точки $u \in \mathbf{W}^{(N_0)}$ оператора H^0.

Покажемо, що для кожного вектора $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}_0$ оператор H^0 є стиском у кулі $G^0 = \{u \in \mathbf{W}^{(N_0)}\colon\ \|u\|_d \le \rho_0 = \frac{|\varepsilon|}{\gamma}2c_0N_0^{2\eta}\}$.

З нерівності (10), властивості $(P2)$ та формули (8), випливає оцінка

$$\|H^0(u)\|_d \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}\|f(u)\|_d \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0(1+\|u\|_d) \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0(1+\rho_0) =$$
$$= \frac{\rho_0}{2} + \frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0\rho_0 \le \frac{\rho_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0\rho_0 \le \rho_0,$$

тобто $H^0(G^0) \subset G^0$. Для довільних $u,\ u' \in G^0$ виконується рівність

$$H^0(u) - H^0(u') = \varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}(f(u) - f(u')).$$

Тоді, використовуючи нерівність (10), запишемо оцінку

$$\|H^0(u) - H^0(u')\|_d \le \frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}\|f(u) - f(u')\|_d \le c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}\|u-u'\|_d \le c_1\frac{\varepsilon_0}{\gamma}N_0^{2\eta}\|u-u'\|_d.$$

З умови (8) випливає, що відображення $H^0\colon \mathbf{W}^{(N_0)} \to \mathbf{W}^{(N_0)}$ є стиском у кулі G^0. Тобто, $u = u_0 \in G^0 \subset \mathbf{W}^{(N_0)}$ є єдиним розв'язком рівняння (P_{N_0}) і $B_0 \le 1{+}N_0^{\beta}\rho_0 = 1{+}\frac{|\varepsilon|}{\gamma}2c_0N_0^{14\eta}$. Нульовий крок індукції зроблено.

Далі за індукцією будуємо елементи послідовності $\{u_q\}_{q>0}$, для оцінки норми яких у просторі $\mathbf{H}_{d+\beta}$ використовуємо лему 4, доведення якої наведемо у наступному пункті.

Лема 4. *Для елементів послідовності* $\{u_q\}_{q\ge 0}$ *виконується нерівність*

$$B_{q+1} \le (1+N_{q+1}^{2\eta})B_q. \tag{11}$$

З нерівності (11) за індукцією отримаємо, що

$$B_q \le B_0 \prod_{i=1}^{q} (1 + N_i^{2\eta}) = B_0 \prod_{i=1}^{q} \Big(1 + \big(N_0^{2^i}\big)^{2\eta}\Big).$$

Оскільки $1 + \big(N_0^{2^i}\big)^{2\eta} \le \big(N_0^{2^i + 2^{-i}}\big)^{2\eta}$, то справджується нерівність

$$B_q \le B_0 \prod_{i=1}^{q} \big(N_0^{2^i+2^{-i}}\big)^{2\eta} = B_0 N_0^{\sum\limits_{i=1}^{q} 2\eta(2^i+2^{-i})} = B_0 N_0^{2\eta 2^{q+1} - 2\eta + \sum\limits_{i=1}^{q} 2\eta 2^{-i}} \le B_0 N_{q+1}^{2\eta}.$$

Вважаючи відомими функції u_0, u_1, $\ldots$, u_q, доведемо існування розв'язку $u_{q+1} \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння

$$L u_{q+1} - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_{q+1}) = 0. \qquad (P_{N_{q+1}})$$

Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$, то $h_{q+1} \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ і $B_{q+1} = 1 + \|u_{q+1}\|_{d+\beta} \le B_0 N_{q+2}^{2\eta}$. Оцінимо доданок h_{q+1} у просторі $\mathbf{H}_d$.

Для кожного $h \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ запишемо процедуру лінеаризації

$$\begin{gathered} L(u_q + h) - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q + h) = L u_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) + Lh - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \mathrm{D}_u f(u_q) h + \\ + \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \mathrm{D}_u f(u_q) h + \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q + h) = r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h - \\ - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q) - \mathrm{D}_u f(u_q) h) = r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h + R_q(h), \end{gathered}$$

де $r_q = L u_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)$, $\quad R_q(h) = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q) - \mathrm{D}_u f(u_q) h)$, у підсумку h_{q+1} є розв'язком у просторі $\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ лінеаризованого рівняння

$$r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h + R_q(h) = 0.$$

Оскільки u_q є розв'язком рівняння (P_{N_q}), тобто, $L u_q = \varepsilon \mathrm{P}_{N_q} f(u_q)$, то

$$r_q = \varepsilon (\mathrm{P}_{N_q} - \mathrm{P}_{N_{q+1}}) f(u_q) = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_q}^{\perp} \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) \in \mathbf{W}^{(N_q)\perp} \cap \mathbf{W}^{(N_{q+1})}.$$

Звідси, використовуючи формулу (6) та властивість $(P2)$, отримаємо

$$\|r_q\|_d = |\varepsilon| N_q^{-\beta} \|\mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)\|_{d+\beta} \le |\varepsilon| c_0 N_q^{-\beta} B_q \le |\varepsilon| c_0 B_0 N_q^{-\beta} N_{q+1}^{2\eta}.$$

Для оцінки норми $\|R_q(h)\|_d$ елемента $R_q(h) \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ за властивістю $(P3)$ отримаємо

$$\|R_q(h)\|_d \le 2 c_2 |\varepsilon| \|h\|_d^2.$$

Оскільки для будь-яких $h,\ h' \in \mathbf{W}^{(N_{q+1})}$

$$\begin{gathered} R_q(h) - R_q(h') \le -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')) = \\ = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')), \end{gathered}$$

то за властивістю $(P3)$ виконується така оцінка

$$\begin{gathered} \|R_q(h) - R_q(h')\|_d \le |\varepsilon| \| f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')\|_d \le \\ \le |\varepsilon| \| f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q + h')(h - h') + \mathrm{D}_u f(u_q + h')(h - h') - \\ - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')\|_d \le |\varepsilon| (2 c_2 \|h - h'\|_d^2 + c_1 \|h - h'\|_d \|h'\|_d) \le \end{gathered}$$

$$\le |\varepsilon|(2c_2\|h-h'\|_d(\|h\|_d+\|h'\|_d)+c_1\|h-h'\|_d\|h'\|_d)\le c_3|\varepsilon|(\|h\|_d+2\|h'\|_d)\|h-h'\|_d.$$

За властивістю $(P4)$ оператор $\mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)$ є оборотним для всіх $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_{q+1}$, $u_q\in\mathbf{W}^{(N_q)}$, $h\in\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ і $\|\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)[h]\|_d\le\frac{2}{\gamma}N^{2\eta}_{q+1}\|h\|_d$. Позначимо через $H_{q+1}(h)=-\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)\big(r_q+R_q(h)\big)$ значення оператора $H_{q+1}\colon \mathbf{W}^{(N_{q+1})}\to\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ на елементі $u\in\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$. Тоді розв'язування рівняння $(\mathrm{P}_{N_{q+1}})$ еквівалентне до знаходження нерухомої точки $h_{q+1}=h\in\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h=H_{q+1}(h)$.

Лема 5. *Для кожного вектора $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_{q+1}$ оператор H_{q+1}, де $q\ge 0$, є стиском у кулі $G_{q+1}=\{h\in\mathbf{W}^{(N_{q+1})}\colon\ \|h\|_d\le\rho_{q+1}=4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N^{-2\eta}_{q+1}\}$.*

З леми 5 випливає існування для $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_{q+1}$ єдиного розв'язку $h_{q+1}\in\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h=H_{q+1}(h)$, який задовольняє нерівність $\|h_{q+1}\|_d\le\rho_{q+1}=4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N^{-2\eta}_{q+1}$.

Отже, функція $u_{q+1}=u_q+h_{q+1}$ є розв'язком у $\mathbf{W}^{(N_{q+1})}$ рівняння $(P_{N_{q+1}})$, який визначений для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}_{q+1}\subseteq\mathcal{A}_0$ і $u_{q+1}=\sum_{i=0}^{q+1}h_i$, де $h_i\in\mathbf{W}^{(N_i)}$, та виконується оцінка $\|h_i\|_d\le 4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-2\eta}$ для будь-якого $i\in\{0,1,\dots,q+1\}$. □

Знайдемо міру множини $\mathcal{A}_\infty$, для елементів якої справджується теорема 1.

Теорема 2. *Множину $\mathcal{A}_\infty$ визначає формула $\mathcal{A}_\infty=\bigcap_{q\ge0}\mathcal{A}_q$, а для її міри $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty$ виконується така оцінка*

$$\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty\ge\varepsilon_0^2A^{2p+2}\pi^{p+2}\Big(1-\gamma^2\frac{4^{p+1}(p+1)K}{A^2\pi^{p+1}}\Big),$$

де $K=\sum\limits_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}}(1+|k|^2+m^2)^{-\alpha}$, $\alpha=2\eta+n>\frac{p+1}{2}$.

Доведення. Оскільки $\mathcal{A}_q=\bigcap_{l=0}^q\mathcal{A}_l$, то $\mathcal{A}_\infty=\lim_{q\to\infty}\mathcal{A}_q=\bigcap_{q=0}^\infty\mathcal{A}_q$. Для оцінки міри $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty$ виділимо старшу частину $L_1(\tau(m),k)$ многочлена $L(\tau(m),k)$, а саме,

$$L(\tau(m),k)=L_1(\tau(m),k)+L_2(\tau(m),k),$$

де

$$L_1(\tau(m),k)=a_{n,0,\dots,0}\big(\tau(m)\big)^n+\sum_{i=1}^{p}a_{\underbrace{0,\dots,0}_{j},n,0,\dots,0}k_j^n=\sum_{j=1}^{2p+2}\theta_j\big(\varphi_j(m,k)+i\ \xi_j(m,k)\big),$$

зокрема, $\operatorname{Re}L_1(\tau(m),k)=\sum_{i=1}^{2p+2}\theta_j\varphi_j(m,k)$ та $\operatorname{Im}L_1(\tau(m),k)=\sum_{i=1}^{2p+2}\theta_j\xi_j(m,k)$.

Зауважимо, що $\operatorname{meas}\mathcal{A}_\infty=\varepsilon_0^2A^{2p+2}\pi^{p+2}-\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}}_\infty$, де $\overline{\mathcal{A}}_\infty=\bigcup_{q=0}^\infty\overline{\mathcal{A}}_q$, $\overline{\mathcal{A}}_q=\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\overline{A}_q$ і $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}}_\infty=\lim\limits_{q\to\infty}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}}_q$. Знайдемо міру множини $\overline{\mathcal{A}}_\infty$. Для цього оцінимо міру множини $\overline{A}_q=\bigcup_{1+m^2+|k|^2\le N_q^2}\overline{A}_{m,k}$, де $\overline{A}_{m,k}$ — множина векторів $\vec{a}$, для яких при фіксованому векторові (m,k) з умовою $1+m^2+|k|^2\le N_q^2$ виконується нерівність

$$|L(\tau(m),k)|<\gamma(1+m^2+|k|^2)^{-\eta}.$$

Очевидно, що $\overline{A}_{m,k}\subset\overline{A'}_{m,k}$, де $\overline{A'}_{m,k}$ — множина тих векторів $\vec{a}$ для яких при фіксованому векторові (m,k), такому, що $1+m^2+|k|^2\le N_q^2$, виконуються нерівності

$$|\operatorname{Re}L(\tau(m),k)|<\gamma(1+m^2+|k|^2)^{-\eta},\qquad |\operatorname{Im}L(\tau(m),k)|<\gamma(1+m^2+|k|^2)^{-\eta}.$$

$\overline{A'}_{m,k}$ — це множина точок $\vec{a}$, які знаходяться між гіперплощинами

$$\sum_{i=1}^{2p+2} \theta_j \varphi_j(m,k) = \operatorname{Re} L_2(\tau(m),k) \pm \gamma(1+m^2+|k|^2)^{-\eta},$$
$$\sum_{i=1}^{2p+2} \theta_j \xi_j(m,k) = \operatorname{Im} L_2(\tau(m),k) \pm \gamma(1+m^2+|k|^2)^{-\eta}.$$

Можна отримати оцінку (див. [1]) $\operatorname{meas} \overline{A'}_{m,k} \le d^{2p} \cdot S$, де d — діаметр мінімальної кулі, що містить множину векторів $\vec{a}$, а число S визначається формулою

$$S = 4\gamma^2(1+m^2+|k|^2)^{-2\eta} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{2p+2} \varphi_j^2(m,k)\Big)^{-\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{2p+2} \xi_j^2(m,k)\Big)^{-\frac{1}{2}},$$

Для S виконується нерівність

$$S \le \frac{4(p+1)\gamma^2(1+m^2+|k|^2)^{-2\eta}}{(m^2+|k|^2)^n}.$$

Отже, для міри множини $\overline{A}_q$ можна записати оцінку

$$\operatorname{meas} \overline{A}_q \le \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_q^2} \operatorname{meas} \overline{A}_{m,k} \le \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_q^2} \operatorname{meas} \overline{A'}_{m,k} \le$$
$$\le 4d^{2p}(p+1)\gamma^2 \sum_{1+m^2+|k|^2 \le N_q^2} (1+m^2+|k|^2)^{-\alpha} \le 4d^{2p}(p+1)\gamma^2 \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}} (1+m^2+|k|^2)^{-\alpha},$$

де $\alpha = 2\eta + n$. Оскільки $\eta > \frac{p+1-2n}{4}$, то $\alpha > \frac{p+1}{2}$ і ряд $K := \sum\limits_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}} (1+|k|^2+m^2)^{-\alpha}$ є збіжним, тобто, $K < \infty$. Тоді, $\operatorname{meas} \overline{A}_q \le 4d^{2p}(p+1)\gamma^2 K$ і $\operatorname{meas} \overline{\mathcal{A}}_q \le 4\pi\varepsilon_0^2 K d^{2p}(p+1)\gamma^2$. Оскільки $\operatorname{meas} \overline{\mathcal{A}}_\infty = \lim\limits_{q\to\infty} \operatorname{meas} \overline{\mathcal{A}}_q$, то $\operatorname{meas} \overline{\mathcal{A}}_\infty \le 4\pi\varepsilon_0^2 K d^{2p}(p+1)\gamma^2$.

Міра множини $\mathcal{A}_\infty$ має асимптотику $\operatorname{meas} \mathcal{A}_\infty = \operatorname{meas}(\mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}_A^{p+1}) + O(\gamma^2)$, $\gamma \to 0$, зокрема,

$$\operatorname{meas} \mathcal{A}_\infty \ge \varepsilon_0^2 A^{2p+2}\pi^{p+2} - 4\pi\varepsilon_0^2 K A^{2p} 4^p (p+1)\gamma^2 = \varepsilon_0^2 A^{2p+2}\pi^{p+2}\Big(1 - \gamma^2 \frac{4^{p+1}(p+1)K}{A^2\pi^{p+1}}\Big).$$

□

Теорема 3. *Для довільного* $\gamma > 0$ *і натурального* $N_0 \ge 2$ *та всіх векторів* $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_\infty$, *де* ε_0 — *число задане формулою* (8), *ряд* $\sum_{i\ge0} h_i$ *є збіжним у просторі* $\mathbf{H}_d$ *до розв'язку* u *задачі* (1), (2), *норма якого визначається нерівністю* $\|u\|_d \le \frac{8c_3B_0}{N_0^{2\eta}}\frac{|\varepsilon|}{\gamma}$.

Доведення. За теоремою 1 для всіх $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}_\infty$ виконується $\sum_{i\ge0} \|h_i\|_d \le \sum_{i\ge0} 4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-2\eta}$. Тоді ряд $\sum_{i\ge0} h_i$ збігається у $\mathbf{H}_d$ до деякої функції $u \in \mathbf{H}_d$, оскільки мажорантний ряд $\sum_{i\ge0} \|h_i\|_d$ є збіжним, зокрема

$$\|u\|_d \le \sum_{i\ge0} \|h_i\|_d \le \sum_{i\ge0} 4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-2\eta} = 4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\sum_{i\ge0}\big(N_0^{2^i}\big)^{-2\eta} \le 4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\frac{2}{N_0^{2\eta}} = \frac{8c_3B_0}{N_0^{2\eta}}\frac{|\varepsilon|}{\gamma}.$$

Покажемо, що $Lu = \varepsilon f(u)$. Функція u_q є розв'язком рівняння (P_{N_q}), тоді

$$Lu_q = \varepsilon P_{N_q} f(u_q) = \varepsilon f(u_q) - \varepsilon P^{\perp}_{N_q} f(u_q). \tag{12}$$

З властивості (6) проектора $P^{\perp}_{N_q}$ у просторі $\mathbf{H}_d$, властивості $(P2)$ і оцінки для B_q з доведення теореми 1, маємо

$$\|P^{\perp}_{N_q} f(u_q)\|_d \leq N_q^{-\beta} \|f(u_q)\|_{d+\beta} \leq c_0 N_q^{-\beta} B_q \leq c_0 B_0 N_q^{-12\eta} N_{q+1}^{2\eta} =$$
$$= c_0 B_0 N_q^{-12\eta} N_q^{4\eta} = c_0 B_0 N_q^{-8\eta} = c_0 B_0 N_0^{-8\eta 2^q}.$$

Таким чином, $P^{\perp}_{N_q} f(u_q) \to 0$ при $q \to \infty$, далі з властивості $(P1)$ права частина (12) є збіжною до $\varepsilon f(u)$ у $\mathbf{H}_d$, а з неперервності оператора L маємо, що ліва частина (12) Lu_q при $q \to \infty$ збігається до Lu у сенсі розподілів. □

4. Доведення допоміжних тверджень.

Доведення леми 1. Для всіх векторів $\vec{a} \in A_q$ оператор $|\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$ існує і оскільки $h = \sum_{1+m^2+|k|^2 \leq N_q^2} e^{\tau(m)t}\ z^k\ h_{m,k}$, то

$$|\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h = \sum_{1+m^2+|k|^2 \leq N_q^2} \frac{h_{m,k}\varphi_{m,k}}{\sqrt{|L(\tau(m),k)|}},$$

а з нерівності (7) випливає оцінка

$$\big\||\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h\big\|^2_{\overline{d}} \leq \sum_{1+m^2+|k|^2 \leq N_q^2} (1+m^2+|k|^2)^{\overline{d}} \frac{|h_{m,k}|^2}{|L(\tau(m),k)|} \leq$$
$$\leq \sum_{1+m^2+|k|^2 \leq N_q^2} \frac{1}{\gamma}(1+m^2+|k|^2)^{\overline{d}+\eta} |h_{m,k}|^2 = \frac{1}{\gamma}\|h\|^2_{\overline{d}+\eta},$$

що доводить лему 1. □

Доведення леми 2. Оскільки $\mathcal{U} = |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D} |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}}$, то його дію на $h \in \mathbf{H}_{\overline{d}}$ задає формула

$$\mathcal{U}h = \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}^{p+1}} \frac{\lambda_{m,k}}{|\lambda_{m,k}|}\ h_{m,k}\ \varphi_{m,k},$$

де $\lambda_{m,k}$ — власні значення оператора $\mathcal{D}$. Використовуючи означення простору $\mathbf{H}_{\overline{d}}$ і норми у цьому просторі, отримаємо, що $\|\mathcal{U}^{-1}h\|_{\overline{d}} = \|h\|_{\overline{d}}$. □

Доведення леми 3. Оскільки $\mathcal{R}_1 h = \varepsilon |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{P}_{N_q}(D_u f |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h)$, то використовуючи лему 1 та нерівність (5), отримаємо

$$\|\mathcal{R}_1 h\|_{\overline{d}} \leq |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|\mathrm{P}_{N_q} \mathrm{D}_u f |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h\|_{\overline{d}+\eta} \leq |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} N_q^{-\eta} \|\mathrm{D}_u f |\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h\|_{\overline{d}+2\eta} \leq$$
$$\leq |\varepsilon| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} N_q^{-\eta} c_1 \||\mathcal{D}|^{-\frac{1}{2}} h\|_{\overline{d}} \leq c_1 |\varepsilon| \frac{1}{\gamma} N_q^{-\eta} \|h\|_{\overline{d}+\eta} \leq c_1 |\varepsilon| \frac{1}{\gamma} \|h\|_{\overline{d}}.$$

□

Доведення леми 4. Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$ і $h_{q+1} \in G_{q+1}$, то

$$B_{q+1} = 1 + \|u_{q+1}\|_{d+\beta} \le 1 + \|u_q\|_{d+\beta} + \|h_{q+1}\|_{d+\beta} = B_q + \|h_{q+1}\|_{d+\beta}.$$

Для норми функції $h_{q+1} = -\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q)\big(r_q + R_q(h_{q+1})\big)$ у $\mathbf{H}_{d+\beta}$ справджується оцінка

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta} \le \frac{2}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1}\big(\|r_q\|_{d+\beta} + \|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta}\big). \tag{13}$$

Оскільки $r_q = -\varepsilon \mathrm{P}^{\perp}_{N_q} \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)$, то, використавши $(P2)$, запишемо оцінку для норми $\|r_q\|_{d+\beta}$ у вигляді

$$\|r_q\|_{d+\beta} \le |\varepsilon| \|f(u_q)\|_{d+\beta} \le |\varepsilon| c_0 (1 + \|u_q\|_{d+\beta}) = |\varepsilon| c_0 B_q. \tag{14}$$

Для оцінки величини $\|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta}$ застосщвуємо лему 5 і властивість $(P3)$

$$\|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta} \le |\varepsilon| c_2 \big(\|u_q\|_{d+\beta}\|h_{q+1}\|^2_d + \|h_{q+1}\|_d \|h_{q+1}\|_{d+\beta}\big) \le |\varepsilon| c_2 \big(B_q \rho^2_{q+1} + \rho_{q+1}\|h_{q+1}\|_{d+\beta}\big). \tag{15}$$

Підставляючи оцінки (14) і (15) у нерівність (13), одержимо

$$\begin{aligned}
\|h_{q+1}\|_{d+\beta} &\le \frac{2}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1}\Big(|\varepsilon| c_0 B_q + |\varepsilon| c_2 \big(B_q \rho^2_{q+1} + \rho_{q+1}\|h_{q+1}\|_{d+\beta}\big)\Big) = \\
&= 2c_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + 2c_2 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho^2_{q+1} B_q + 2c_2 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta} < \\
&< 2c_0 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + 2c_2 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho^2_{q+1} B_q + 2c_2 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta} < \\
&< 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho^2_{q+1} B_q + c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta}.
\end{aligned}$$

Враховуючи лему 5 та рівність (8), отримаємо наступну оцінку

$$\begin{aligned}
\|h_{q+1}\|_{d+\beta} &\le 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + \frac{\rho_{q+1}}{4} B_q + \frac{1}{4}\|h_{q+1}\|_{d+\beta} < \\
&< 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + c_3 B_0 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{-2\eta}_{q+1} B_q + \frac{1}{4}\|h_{q+1}\|_{d+\beta} = \\
&= 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} B_q (N^{2\eta}_{q+1} + \frac{1}{2} B_0 N^{-2\eta}_{q+1}) + \frac{1}{4}\|h_{q+1}\|_{d+\beta} \le 4c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + \frac{1}{4}\|h_{q+1}\|_{d+\beta}.
\end{aligned}$$

Тоді, $\frac{3}{4}\|h_{q+1}\|_{d+\beta} \le 4c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q$, звідки, враховуючи формулу (8), виводимо

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta} \le \frac{16}{3} c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q \le N^{2\eta}_{q+1} B_q.$$

Отже, $B_{q+1} \le B_q + N^{2\eta}_{q+1} B_q = (1 + N^{2\eta}_{q+1}) B_q$, що й потрібно було довести. □

Доведення леми 5. За властивістю $(P4)$ маємо

$$\|H_{q+1}(h)\|_d \le \frac{2}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1}\big(\|r_q\|_d + \|R_q(h)\|_d\big) \le 2c_0 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} N^{-\beta}_q N^{2\eta}_{q+1} + 4c_2 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \|h\|^2_d.$$

Враховуючи значення β, рівність $N_{q+1} = N_q^2$ та формулу (8), справедливою є нерівність

$$\|H_{q+1}(h)\|_d \leq 2c_0B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-2\eta} + 4c_2\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\rho_{q+1}^2 \leq 2c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-2\eta} + 2c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\rho_{q+1}^2 \leq$$
$$\leq \frac{\rho_{q+1}}{2} + 8B_0\Big(c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^2\rho_{q+1} \leq \frac{\rho_{q+1}}{2} + 8B_0\Big(c_3\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^2\rho_{q+1} \leq \rho_{q+1}$$

і оператор H_{q+1} відображає G_{q+1} в себе.

Для довільних $h,\ h' \in G_{q+1}$ виконується рівність

$$H_{q+1}(h) - H_{q+1}(h') = -\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q)\big(R_q(h) - R_q(h')\big),$$

а для норми цієї різниці у просторі $\mathbf{H}_d$ справедливою є оцінка

$$\|H_{q+1}(h) - H_{q+1}(h')\|_d \leq \frac{2}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\big\|R_q(h) - R_q(h')\big\|_d \leq$$
$$\leq 2c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}(\|h\|_d + 2\|h'\|_d)\|h - h'\|_d \leq 2c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}12c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-2\eta}\|h - h'\|_d \leq$$
$$\leq 24B_0\Big(c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^2\|h - h'\|_d < 24B_0\Big(c_3\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^2\|h - h'\|_d.$$

З формули (8) випливає, що $24B_0\Big(c_3\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^2 < 1$, звідки і випливає твердження леми. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations, Kiev: Naukova Dumka, 2002. – 415 p. (in Ukrainian)
2. Eloea Paul W., Ahmadb Bashir, *Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions*, J. Applied Mathematics Letters, **18** (2005), №5, 521–527.
3. Borok V.M., Fardigola L.V. *Nonlocal well-posed boundary-value problems in a layer.* Mathematical notes, **48** (1990), №1, 20–25. (in Russian)
4. Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V. *Problem with nonlocal two-point condition in time variable for homogeneous partial differential equation of infinite order in spatial variables.* Math.Methods Phys. Mech. Fields, **51** (2008), №4, 17–26. (in Ukrainian)
5. Berti M., Bolle P., *Cantor families of periodic solutions of wave equations with C^k nonlinearities*, Nonlinear Differential Equations and Applications, **15** (2008), 247–276.
6. Berti M., Bolle P., *Sobolev periodic solutions of nonlinear wave equations in higher spatial dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. **195**, (2010), №2, 609–642.
7. Berti M., Bolle P., *Cantor families of periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations*, Duke Math. J. **134**, (2006), №2, 359–419.

National University "Lviv Polytechnic"
ilkivv@i.ua
n.strap@i.ua

Надійшло 28.09.2015