Математичні Студії. Т.46, №1 Matematychni Studii. V.46, No.1

УДК 517.928

А. А. Плотников

ПОШАГОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

A. A. Plotnikov. *Step averaging differential inclusions with variable dimension on a finite interval*, Mat. Stud. **46** (2016), 81–88.

Nonlinear differential inclusion with variable dimension and justification of the step scheme of the averaging method on a finite interval is considered in this paper.

1. Введение. Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А. Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Основные результаты теории дифференциальных включений изложены в работах [1–5].

Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова ([6]). Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов динамических систем сыграли работы Ю. А. Митропольского, В. И. Арнольда, В. М. Волосова, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова, О. П. Филатова, М. М. Хапаева, T. Dontchev, M. Kisieliwicz, J. A. Sanders и др. [3, 4, 7–14]).

В данной статье мы рассмотрим дифференциальные включения с переменной размерностью. Такие дифференциальные включения относятся к импульсным дифференциальным включениям ([3, 4]). Однако в отличие от ранее рассматриваемых импульсных дифференциальных включений, в данном случае в моменты импульсных воздействий меняется размерность системы, а сам импульс "связывает" разноразмерные решения в эти моменты времени. Также к таким системам сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания ([15–17]) и управляемые системы переменной размерности ([19]).

В этой статье обоснована возможность применения для исследования таких систем пошаговой схемы усреднения на конечном промежутке.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup 0$.

Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, которые удовлетворяют следующим условиям

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A60, 34C29.
Keywords: averaging method; differential inclusion; variable dimension.
doi:10.15330/ms.46.1.81-88

1) $n(\cdot)$ — кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа;

2) если $n(t-0)-n(t)\neq 0$, то $n(\tau)-n(t)=0$ для всех $\tau\in[t,t+\theta]$.

Очевидна справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой функции $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$ полупрямую $\mathbb{R}_+$ можно разбить не более чем на счетное число множеств $I_i=[t_i,t_{i+1})$, $i=0,1,\ldots$ таких, что $\mathbb{R}_+=\bigcup_i I_i$ и $I_i\cap I_j=\varnothing$, если $i\neq j$, где $n(t)-n(t_i)=0$ для всех $t\in I_i$.*

Обозначим через Φ_n множество функций $\varphi(t,x)$, соответствующих функции $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$ таких, что

$$\varphi(t,x)=\begin{cases}x, & n(t-0)=n(t),\\ \psi(x), & n(t-0)\neq n(t),\end{cases}$$

где $\psi\colon\mathbb{R}^{n(t-0)}\to\mathbb{R}^{n(t)}$ — непрерывная функция.

Например, $\psi(x)=M(n(t),n(t-0))x$, где $M(n(t),n(t-0))=(m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$ — матрица размерности $n(t)\times n(t-0)$, принадлежащая некоторому множеству матриц $M=\{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$ размерностей $(k\times l)$, $k=1,2,\ldots$, $l=1,2,\ldots$.

Возьмем произвольную функцию $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$ и $\varphi(\cdot,\cdot)\in\Phi_n$.

Определение 1. Функцию $x(\cdot,n)$ назовем *функцией с переменной размерностью*, если $x(t,n)\in\mathbb{R}^{n(t)}$ для всех $t\geq 0$.

Определение 2. Будем говорить, что функция с переменной размерностью $x(\cdot,n)$ *непрерывна на интервале* $(t',t'')\subset\mathbb{R}_+$, если она непрерывна в точках $t\in(t',t'')$, где $n(t)-n(t-0)=0$ и непрерывна справа в точках $t\in(t',t'')$, где $n(t)-n(t-0)\neq 0$.

Определение 3. Будем говорить, что функция с переменной размерностью $x(\cdot,n)$ *абсолютно непрерывна на сегменте* $[t',t'']\subset\mathbb{R}_+$, если она непрерывна на (t',t'') и абсолютно непрерывна на любом сегменте $[\tau',\tau'']\subset[t',t'']$, где $n(t)-n(t-0)=0$ для всех $t\in[\tau',\tau'']$.

Замечание 1. Аналогично, можно ввести определение измеримости (дифференцируемости, интегрируемости, липшицевости и др.) функции $x(\cdot,n)$.

Определение 4. Многозначное отображение $F(\cdot,n)$ назовем *отображением с переменной размерностью*, если множество $F(t,n)\subset\mathbb{R}^{n(t)}$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$.

Определение 5. Будем говорить, что многозначное отображение с переменной размерностью $F(\cdot,n)$ *непрерывно на интервале* $(t',t'')\subset\mathbb{R}_+$, если оно непрерывно в точках $t\in(t',t'')$, где $n(t)-n(t-0)=0$ и непрерывно справа в точках $t\in(t',t'')$, где $n(t)-n(t-0)\neq 0$.

Определение 6. Будем говорить, что многозначное отображение $F(\cdot,n)$ *удовлетворяет условию Липшица на сегменте* $[t',t'']\subset\mathbb{R}_+$ с постоянной $L>0$, если оно непрерывно на (t',t'') и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L на любом сегменте $[\tau',\tau'']\subset[t',t'']$, где $n(t)-n(t-0)=0$ для всех $t\in[\tau',\tau'']$.

Рассмотрим следующую систему с переменной размерностью

$$\dot{x}(t,n,\varphi)\in F(t,x(t,n,\varphi),n),\ \ x(0,n,\varphi)=x_0, \tag{1}$$

где $t\in\mathbb{R}_+$ — время; $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot)\in\Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ — фазовый вектор; $F(t,x,n)\colon\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{n(t)}\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{n(t)})$ — многозначное отображение с переменной размерностью.

Определение 7. Абсолютно непрерывная функция с переменной размерностью $x(\cdot,n,\varphi)$ называется *решением системы (1) на отрезке* $[0,T]$, если

1) $\dot{x}(t,n,\varphi)\in F(t,x(t,n,\varphi),n)$ для почти всех $t\in(0,T)$,
2) $x(0,n,\varphi)=x_0$,
3) $x(t,n,\varphi)=\varphi(t,x(t-0,n,\varphi))$ для всех $t\in[0,T]$.

Замечание 2. Если $n(t)\equiv n$, то система (1) будет обычным дифференциальным включением.

Предложение 1. *Пусть функция* $n(\cdot)$ *ограничена* $\overline{n}\geq 1$ *для всех* $t\geq 0$.

Обозначим через $Q_i=\{\,(t,x):\ t\in I_i,\ x\in\mathbb{R}^{n(t)}\}$, где I_i соответствуют лемме 1.

Предложение 2. *Многозначное отображение* $F(t,x,n)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) $F(\cdot,x,n)$ *непрерывно по* t *на* $\mathbb{R}_+$;

b) $F(t,\cdot,n)$ *липшицево с постоянной* λ *по* x *на* Q_i, $i=0,1,...$;

c) существует такая постоянная $\kappa>0$, *что* $h_{n(t)}(F(t,x,n),\{0\}_{n(t)})\leq\kappa(1+\|x\|_{\mathbb{R}^{n(t)}})$ *для всех* $(t,x)\in Q_i$, $i=0,1,...$, *где* $\{0\}_{n(t)}$ *— нулевой вектор в пространстве* $\mathbb{R}^{n(t)}$, $\|x-y\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}$ *— евклидова метрика в пространстве* $\mathbb{R}^{n(t)}$, *а* $h_{n(t)}(A,B)$ *— метрика Хаусдорфа в пространстве* $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n(t)})$.

Теорема 1 ([18])**.** *Если* $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$, $\varphi(\cdot,\cdot)\in\Phi_n$ *и* $F(t,x,n)$ *удовлетворяют условиям предположений 1 и 2, то на некотором отрезке* $[0,T]$ *у системы (1) существует решение* $x(\cdot,n,\varphi)$.

Обозначим через $X(t,n,\varphi)$ сечение множества решений системы (1) в момент времени $t\in[0,T]$.

Теорема 2 ([18])**.** *Если* $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$, $\varphi(\cdot,\cdot)\in\Phi_n$ *и* $F(t,x,n)$ *удовлетворяют условиям предположений 1 и 2 и многозначное отображение* $F(t,x,n)\colon\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{n(t)}\to\operatorname{conv}(\mathbb{R}^{n(t)})$, *то* $X(t,n,M)\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n(t)})$ *для всех* $t\in[0,T]$.

3. Метод пошагового усреднения. Пусть $G_i=\{\,(t,x)\,:\,t\in I_i,\ x\in M_i\subset\mathbb{R}^{n(t)}\}$, где I_i соответствуют лемме 1, M_i — выпуклые множества, а $G=\bigcup_i G_i$.

Теперь рассмотрим следующую систему с малым параметром.

$$\dot{x}\in\varepsilon F(t,x,n),\ \ x(0,n,\varphi)=x_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, $t\in\mathbb{R}_+$ — время; $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot)\in\Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ — фазовый вектор; $F(t,x,n)\colon G\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n(t)})$ — многозначное отображение с переменной размерностью.

Возьмем некоторое $\omega>0$. Обозначим через Γ множество точек пространства $\mathbb{R}_+$ таких, что $\gamma_i=i\omega$, $i=0,1,...$, а через Υ множество точек τ_i таких, что $n(\tau_i-0)-n(\tau_i+0)\neq 0$.

Обозначим через Ξ множество точек t_i, $i=0,1,...$ таких, что $\Xi=\Gamma\cup\Upsilon$.

Очевидно, что $t_{i+1}-t_i\leq\omega$ для всех $i=0,1,....$

Поставим в соответствие системе (2) следующую усредненную систему

$$\dot{y}\in\varepsilon\overline{F}(t,y,n),\ \ y(0,n,\varphi)=x_0, \tag{3}$$

где

$$\overline{F}(t,x,n)=\Big\{F_i(x,n):\ F_i(x,n)=\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}F(s,x,n)ds,\ t\in[t_i,t_{i+1}),\ i=0,1,...\Big\}. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области G выполняются следующие условия:*

1) *функция $n(\cdot)\in\Sigma_\theta$ ограничена константой $\overline{n}>0$ для всех $t\geq 0$;*
2) *$F(\cdot,\cdot,n)\colon G\to \mathrm{conv}(\mathbb{R}^{n(t)})$ – непрерывно, равномерно ограниченно константой $b>0$ и удовлетворяет условию липшица по x с константой $\lambda>0$, т.е.*

$$h_{n(t)}(F(t,x,n),\{0\}_{n(t)})\leq b,\qquad h_{n(t)}(F(t,x_1,n),F(t,x_2,n))\leq\lambda\|x_1-x_2\|_{n(t)};$$

3) *существует $0<\mu<1$ такое, что для всех $\tau_i\in\Upsilon$ и любых $x_1,x_2\in M_{i-1}$*

$$\|\varphi(\tau_i,x_1)-\varphi(\tau_i,x_2)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_i)}}\leq\mu\|x_1-x_2\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_i-0)}};$$

4) *для всех $x_0\in M_0'\subset M_0$ и $t>0$ решения системы (3) с некоторой ρ-окрестностью принадлежат области G.*

Тогда для любого $L>0$ существуют $\varepsilon_0(L)>0$ и $C(L)>0$ такие, что для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения

1) *для любого решения $x(\cdot)$ системы (2) существует решение $y(\cdot)$ системы (3) такое, что*
$$\|x(t)-y(t)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}<C\varepsilon; \tag{5}$$
2) *для любого решения $y(\cdot)$ системы (3) существует решение $x(\cdot)$ системы (2) такое, что выполняется неравенство (5).*

Доказательство. Из условия 2) теоремы следует, что отображение $\overline{F}(t,x,n)$ равномерно ограниченно константой $b>0$ и удовлетворяет условию Липшица по x с константой $\lambda>0$, т.е. для любого $t\in[t_i,t_{i+1}),\ i=0,1,2,...$ имеем

$$h_{n(t)}(\overline{F}(t,x,n),\{0\}_{n(t)})\leq h_{n(t)}\Big(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}F(s,x,n)ds,\{0\}_{n(t)}\Big)\leq$$
$$\leq\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}h_{n(t)}(F(s,x,n),\{0\}_{n(t)})ds\leq b;$$
$$h_{n(t)}(\overline{F}(t,x_1,n),\overline{F}(t,x_2,n))\times$$
$$\times h_{n(t)}\Big(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}F(s,x_1,n)ds,\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}F(s,x_2,n)ds\Big)\leq$$
$$\leq\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}h_{n(t)}(F(t,x_1,n),F(t,x_2,n))\leq\lambda\|x_1-x_2\|_{n(t)}.$$

Теперь докажем выполнение первого утверждения. Обозначим через Ξ_ε и Υ_ε множества $[0,L\varepsilon^{-1}]\cap\Xi$ и $[0,L\varepsilon^{-1}]\cap\Upsilon$. Очевидно, что множества Ξ_ε и Υ_ε конечны и будем считать, что они содержат $k+1$ элементов $t_0,t_1,...,t_k$ и l элементов $\tau_1,...,\tau_l$, соответственно. Так же обозначим через $t_{k+1}=L\varepsilon^{-1}$.

Возьмем любое решение $x(\cdot,n,\varphi)$ системы (2). Тогда

$$x(t,n,\varphi)=x(t_i,n,\varphi)+\varepsilon\int_{t_i}^{t}u(s)ds \tag{6}$$

для всех $t\in[t_i,t_{i+1})$, если $t_{i+1}\in\Upsilon$ и $t\in[t_i,t_{i+1}]$, если $t_{i+1}\notin\Upsilon$, $i=0,1,...,k$, где $u(\cdot)$ — измеримая вектор-функция такая, что $u(t)\in F(t,x(t,n,\varphi),n)$ почти для всех $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$. А так же $x(0,n,\varphi)=x_0$ и $x(t_i,n,\varphi)=\varphi(t_i,x(t_i-0,n,\varphi))$ для всех $t_i\in\Xi_\varepsilon\cap\Upsilon$.

Теперь рассмотрим функцию

$$x^1(t,n,\varphi)=x^1(t_i,n,\varphi)+\varepsilon\int_{t_i}^{t}u_i(s)ds, \tag{7}$$

для всех $t\in[t_i,t_{i+1})$, если $t_{i+1}\in\Upsilon$ и $t\in[t_i,t_{i+1}]$, если $t_{i+1}\notin\Upsilon$, $i=0,1,...,k$, где $u_j(\cdot)$ — измеримая вектор-функция такая, что $u_i(t)\in F(t,x^1(t_i,n,\varphi),n)$ и

$$\|u_i(t)-u(t)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}=\min_{u\in F(t,x^1(t_i,n,\varphi),n)}\|u-u(t)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}$$

почти для всех $t\in[t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,...,k$. А так же $x^1(0,n,\varphi)=x_0$ и $x^1(t_i,n,\varphi)=\varphi(t_i,x^1(t_i-0,n,\varphi))$ для всех $t_i\in\Xi_\varepsilon\cap\Upsilon$.

Возьмем произвольное $t\in(0,L\varepsilon^{-1})$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $t\in(0,\tau_1)$, где $\tau_1\in\Upsilon_\varepsilon$;

2) $t\in(\tau_j,\tau_{j+1})$, где $\tau_j,\tau_{j+1}\in\Upsilon_\varepsilon$, $j\in\{1,...,l-1\}$;

3) $t\in(\tau_l,t_{k+1})$, где $\tau_l\in\Upsilon_\varepsilon$;

4) $t=\tau_r$, где $\tau_r\in\Upsilon_\varepsilon$, $r\in\{1,...,l\}$.

Рассмотрим первый случай. Предположим, что $[0,\tau_1]\cap\Xi_\varepsilon=\{t_0,...,t_m\}$, где $t_0=0$, $t_m=\tau_1$. Пусть $t\in(t_{j-1},t_j)$, $j\in\{1,...,m\}$. Из (6) и (7), имеем

$$\|x(t,n,\varphi)-x(t_{j-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}}\le\varepsilon b(t-t_{j-1})\le\varepsilon b\omega,$$
$$\|x^1(t,n,\varphi)-x^1(t_{j-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}}\le\varepsilon b(t-t_{j-1})\le\varepsilon b\omega.$$

Пусть $\delta_{j-1}=\|x(t_{j-1},n,\varphi)-x^1(t_{j-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}}$, тогда

$$\begin{gathered}\|x(t,n,\varphi)-x^1(t_{j-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}}\le\\ \le\|x(t,n,\varphi)-x(t_{j-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}}+\|x(t_{j-1},n,\varphi)-x^1(t_{j-1},n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\le\\ \le\delta_{j-1}+\varepsilon b(t-t_{j-1}),\\ \|u(t)-u_j(t)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}}\le h_{\mathbb{R}^{n(0)}}(F(t,x(t,n,\varphi),n),(F(t,x^1(t_{j-1},n,\varphi),n))\le\\ \le\lambda(\delta_{j-1}+\varepsilon b(t-t_{j-1})).\end{gathered}$$

Следовательно, $\delta_j\le\delta_{j-1}+\varepsilon\lambda(\delta_{j-1}+\varepsilon b\omega)\omega=(\varepsilon\lambda\omega+1)\delta_{j-1}+\lambda\varepsilon^2b\omega^2$.

Так как $\delta_0=0$, то

$$\begin{gathered}\delta_{j+1}\le(\varepsilon\lambda\omega+1)\delta_j+\lambda\varepsilon^2b\omega^2\le\\ \le(\varepsilon\lambda\omega+1)((\varepsilon\lambda\omega+1)\delta_{j-1}+\lambda\varepsilon^2b\omega^2)+\lambda\varepsilon^2b\omega^2\le\\ =(\varepsilon\lambda\omega+1)^2\delta_{j-1}+\lambda\varepsilon^2b\omega^2[(\varepsilon\lambda\omega+1)+1]\le\\ \le(\varepsilon\lambda\omega+1)^2((\varepsilon\lambda\omega+1)\delta_{j-2}+\lambda\varepsilon^2b\omega^2)+\lambda\varepsilon^2b\omega^2[(\varepsilon\lambda\omega+1)+1]=\\ =(\varepsilon\lambda\omega+1)^3\delta_{j-2}+\lambda\varepsilon^2b\omega^2[(\varepsilon\lambda\omega+1)^2+(\varepsilon\lambda\omega+1)+1]\le...\le\\ \le(\varepsilon\lambda\omega+1)^{j+1}\delta_0+\lambda\varepsilon^2b\omega^2[(\varepsilon\lambda\omega+1)^j+...+(\varepsilon\lambda\omega+1)+1]\le\\ \le\varepsilon b\omega((1+\varepsilon\lambda\omega)^{j+1}-1)\le\varepsilon b\omega((1+\varepsilon\lambda\omega)^{\frac{L}{\varepsilon\omega}}-1)\le\varepsilon b\omega(e^{\lambda L}-1).\end{gathered}$$

Тогда для $t \in [0, \tau_1)$ имеем

$$\|x(t,n,\varphi) - x^1(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}} \leq \|x(t,n,\varphi) - x(t_j,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}} + \\ + \|x(t_j,n,\varphi) - x^1(t_j,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}} + \|x^1(t_j,n,\varphi) - x^1(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}} \leq \\ \leq 2b\omega\varepsilon + b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} - 1) = b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1). \tag{8}$$

Если $t = \tau_1$, то

$$\|x(\tau_1,n,\varphi) - x^1(\tau_1,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_1)}} = \|\varphi(\tau_1, x(\tau_1 - 0,n,\varphi)) - \varphi(\tau_1, x^1(\tau_1 - 0,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_1)}}\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_1)}} \leq \\ \leq \mu\|x(\tau_1 - 0,n,\varphi) - x^1(\tau_1 - 0,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(0)}} \leq \mu b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1). \tag{9}$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$. Предположим так же, что $[\tau_j, \tau_{j+1}] \cap \Xi_\varepsilon = \{t_0, ..., t_m\}$ и $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i \in \{1, ..., m\}$, где $t_0 = \tau_j$, $t_m = \tau_{j+1}$. Тогда, аналогично, имеем

$$\|x(t,n,\varphi) - x(t_{i-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_j)}} \leq \varepsilon b(t - t_{i-1}) \leq \varepsilon b\omega, \\ \|x^1(t,n,\varphi) - x^1(t_{i-1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_j)}} \leq \varepsilon b(t - t_{i-1}) \leq \varepsilon b\omega, \\ \delta_i \leq (\varepsilon\lambda\omega + 1)\delta_{i-1} + \lambda\varepsilon^2 b\omega^2 \leq \\ \leq (\varepsilon\lambda\omega + 1)^i\delta_0 + \lambda\varepsilon^2 b\omega^2[(\varepsilon\lambda\omega + 1)^{i-1} + ... + (\varepsilon\lambda\omega + 1) + 1] \leq \\ \leq (\varepsilon\lambda\omega + 1)^i\delta_0 + \lambda\varepsilon^2 b\omega^2[(\varepsilon\lambda\omega + 1)^{i-1} + ... + (\varepsilon\lambda\omega + 1) + 1] \leq \\ \leq e^{\lambda L}(\mu^j + ... + \mu)b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1) + \varepsilon b\omega(e^{\lambda L} - 1),$$

$$\|x(t,n,\varphi) - x^1(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_j)}} \leq e^{\lambda L}(\mu^j + ... + \mu + 1)b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1) \leq e^{\lambda L}\frac{1}{1-\mu}b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1).$$

Если $t = \tau_{j+1}$, то $\|x(\tau_{j+1},n,\varphi) - x^1(\tau_{j+1},n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(j+1)}} \leq e^{\lambda L}\frac{\mu}{1-\mu}b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1)$.
Следовательно, если $t \in (\tau_l, t_{k+1})$, то

$$\|x(t,n,\varphi) - x^1(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(\tau_l)}} \leq e^{\lambda L}\frac{1}{1-\mu}b\omega\varepsilon(e^{\lambda L} + 1). \tag{10}$$

Далее из (4), имеем для $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, m}$

$$\overline{F}(t, x^1(t_j,n,\varphi), n) = \frac{1}{t_{j+1} - t_j}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, x^1(t_j,n,\varphi), n)ds.$$

Тогда существует измеримая функция $v_j(\cdot)$ такая, что $v_j(t) \in \overline{F}(t, x^1(t_j,n,\varphi), n)$ для почти всех $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{0, m}$ и

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j(s)ds = \int_{t_j}^{t_{j+1}} u_j(s)ds.$$

Рассмотрим функцию

$$y^1(t,n,\varphi) = y^1(t_j,n,\varphi) + \varepsilon\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j(s)ds,\ j = \overline{0, m},\ y^1(0) = x_0.$$

Так как $x^1(0,n,\varphi) = y^1(0,n,\varphi) = x_0$, то для всех $j \in \{1, ..., m+1\}$ мы имеем

$$x^1(t_j,n,\varphi) = y^1(t_j,n,\varphi),\ \|y^1(t,n,\varphi) - y^1(t_j,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t_j)}} \leq b\omega\varepsilon,$$

$$\|x^1(t,n,\varphi)-y^1(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t_j)}}\le 2b\omega\varepsilon. \tag{11}$$

Далее, для $t\in[t_j,t_{j+1})$, $j=\overline{0,m}$ имеем

$$\operatorname*{dist}_{n(t)}(y^1(t,n,\varphi),\varepsilon\overline{F}(t,y^1(t,n,\varphi),n))\le\varepsilon h_{n(t)}(\overline{F}(t,x^1(t_j,n,\varphi),n),\overline{F}(t,y^1(t,n,\varphi),n))\le$$
$$\le\varepsilon\lambda\|x^1(t_j,n,\varphi)-y^1(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\lambda b\omega\varepsilon^2, \tag{12}$$

где $\operatorname{dist}_{n(t)}(a,C)=\min\limits_{c\in C}\|a-c\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}$, $a\in\mathbb{R}^{n(t)}$, $C\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^{n(t)})$.

Теперь воспользуемся теоремой А. Ф. Филиппова ([3, 4]) и найдем ближайшее к функции $y^1(\cdot,n,\varphi)$ решение $y(\cdot,n,\varphi)$ системы (3) и оценим $\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}$ для всех $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$.

Возьмем $\tau_j\in\Upsilon_\varepsilon$, $j\in\{1,...,l\}$ и обозначим через I_j, $j=\overline{0,l}$ промежутки $[0,\tau_1)$, $[\tau_j,\tau_{j+1})$, $j=\overline{1,l-1}$ и $[\tau_l,L\varepsilon^{-1}]$.

Из (12) и теоремы А. Ф. Филиппова существует решение $y(\cdot,n,\varphi)$ системы (3) такое, что для всех $t\in I_0$

$$\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\|y^1(0,n,\varphi)-y(0,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}e^{\varepsilon\lambda t}+b\omega\varepsilon^2\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-s)}ds.$$

Так как $y^1(0,n,\varphi)=y(0,n,\varphi)=x_0$, то для всех $t\in I_0$

$$\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\varepsilon\lambda t}-1).$$

Так как $y^1(\tau_1,n,\varphi)=\varphi(\tau_1,y^1(\tau_1-0,n,\varphi))$, $y(\tau_1,n,\varphi)=\varphi(\tau_1,y(\tau_1-0,n,\varphi))$, то

$$\|y^1(\tau_1,n,\varphi)-y(\tau_1,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\mu\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\varepsilon\lambda\tau_1}-1).$$

Аналогично, для $t\in I_1$ получим

$$\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\|y^1(\tau_1,n,\varphi)-y(\tau_1,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}e^{\varepsilon\lambda(t-\tau_1)}+b\omega\varepsilon^2\int_{\tau_1}^t e^{\varepsilon\lambda(t-s)}ds\le$$
$$\le\mu\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\varepsilon\lambda\tau_1}-1)e^{\varepsilon\lambda(t-\tau_1)}+\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\varepsilon\lambda(t-\tau_1)}-1).$$

Так как $\mu<1$, то $\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\varepsilon\lambda t}-1)$.

Далее, используя метод математической индукции, легко получить, что для всех $t\in I_j$ и любого $j\in\{0,...,l\}$ выполняется неравенство

$$\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\varepsilon\lambda t}-1).$$

Следовательно, для всех $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$

$$\|y^1(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\lambda L}-1). \tag{13}$$

Из (10), (11) и (13) получим

$$\|x(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le 2b\omega\varepsilon+\frac{b\omega\varepsilon}{\lambda}(e^{\lambda L}-1)+e^{\lambda L}\frac{1}{1-\mu}b\omega\varepsilon(e^{\lambda L}+1), \tag{14}$$

то есть $\|x(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{\mathbb{R}^{n(t)}}\le C\varepsilon$, где $C=2b\omega+\frac{b\omega}{\lambda}(e^{\lambda L}-1)+e^{\lambda L}\frac{1}{1-\mu}b\omega(e^{\lambda L}+1)$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. □

Замечание 3. Если в условии 3) теоремы $\mu\ge 1$, то утверждения теоремы остаются справедливыми, если множество Υ конечно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aubin J.-P., Cellina A., Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. – Springer-Verlag, 1984.
2. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. *Differential inclusions and optimal control*// Proc. Steklov Inst. Math. – 1986. – V.169. – P. 199–259.
3. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities. – de Gruyter Stud. Math.: 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co., 2011.
4. Plotnikov V.A., Plotnikov A.V., Vityuk A.N., Differential equations with a multivalued right-hand side: Asymptotic methods. – AstroPrint, Odessa. 1999. (in Russian)
5. Smirnov G.V. Introduction to the theory of differential inclusions. – Graduate Studies in Mathematics, Vol. 41, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2002.
6. Krylov N.M., Bogoliubov N.N. Introduction to nonlinear mechanics. – Princeton University Press, Princeton, 1947.
7. Arnol'd, V.I. Mathematical methods of classical mechanics. – Nauka, Moscow, 1989. (in Russian)
8. Filatov A.N. Asymptotic methods in the theory of differential and integrodifferential equations. – Izdat. "Fan" Uzbek. SSR. Tashkent, 1974. (in Russian)
9. Filatov A.N., Sharova L.V. Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations. – Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)
10. Filatov O.P., Khapaev M.M. Averaging of systems of differential inclusions. – Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta imeni M. V. Lomonosova, Moscow, 1998. (in Russian)
11. Gama R., Smirnov G. *Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method*// Set-Valued Var. Anal. – 2014. – V.22, №2. – P. 349–374.
12. Klymchuk S., Plotnikov A., Skripnik N. *Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions*// Phys. D. – 2012. – V.241, №22. – P. 1932–1947.
13. Lochak P., Meunier C. Multiphase averaging for classical systems. – Appl. Math. Sci., V.72, Springer-Verlag, New York, 1988.
14. Sanders J.A., Verhulst F. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. – Appl. Math. Sci., V.59, Springer-Verlag, New York, 1985.
15. Fedoseev A.V. *Research methods of optimum control of one model of working out of group of deposits of a mineral with the limited stores*// Methods of the system analysis and problems of rational use of resources, Vychislitel'nyj Tsentr AN SSSR, Moskva. – 1977. – P. 117–134. (in Russian)
16. Khachaturov V.R., Bosolejl R., Fedoseev A.V. Simulation modelling and optimum control problems at long-term planning of manufacture of long-term agricultural crops. – Vychislitel'nyj Tsentr AN SSSR, Moskva, 1985. (in Russian)
17. Romanenko A.V., Fedoseev A.V. *Optimal control of economic systems with a growth structure*// Comput. Math. Math. Phys. – 1993. – V.33, №8. – P. 1017–1026.
18. Kichmarenko O.D., Plotnikov A.V. *Nonlinear differential inclusion with variable dimension and their properties*// Visn. Odes. Nats. Univ. Matematika i Mekhanika. – 2013. – V.18, №2. – P. 29—34. (in Russian)
19. Kichmarenko O.D., Plotnikov A.A. *The averaging of control linear differential equations with variable dimension on finite interval*// International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – V.5, №1. – P. 25–35.

Department of Optimal Control and Economic Cybernetics,
Odessa National University named after I.I.Mechnikov,
aaplotnikov@ukr.net

Поступило 10.10.2016