УДК 512.552.13

В. В. Бохонко, О. В. Пігура

МАКСИМАЛЬНО НЕГЕЛЬФАНДОВІ ІДЕАЛИ ДУО-ОБЛАСТІ БЕЗУ

V. V. Bokhonko, O. V. Pihura *Maximally non-Gelfand Bezout duo-domains*, Mat. Stud. **46** (2016), 13–19.

In the paper we consider the maximal non-Gelfand ideals and establish their properties. We study also the locally non-Gelfand Bezout duo-domains and establish their connection with elementary divisors of the rings.

Гельфандові кільця введені в 1979 р. Малвеєм, як кільця, для яких можливі узагальнення гельфандової дуальності. Найбільш відомим їхнім прикладом є кільця $\mathcal{C}(X)$ неперервних дійсних функцій на топологічному просторі X (див., наприклад, [3]).

У даній статті на основі поняття гельфандового елемента, введено поняття максимально негельфандового ідеалу і досліджено деякі властивості цих ідеалів. Зокрема, розглянуто гельфандовий аналог радикала Джекобсона і досліджено його властивості. Вивчено локально негельфандову дуо-область Безу.

Нехай R — дуо-область. Всі необхідні означення і факти можна знайти в [2]–[3].

Означення 1. Ненульовий елемент $a \in R$ називається *гельфандовим*, якщо довільний простий правий ідеал P такий, що $a \in P$, міститься у єдиному максимальному правому ідеалі.

Позначимо через $S = S(R)$ множину всіх гельфандових елементів кільця R. Відзначимо, що множина $S = S(R)$ непорожня, оскільки, $1 \in S = S(R)$.

Твердження 1. *Множина S всіх гельфандових елементів дуо-області Безу на R є насиченою мультиплікативно замкненою множиною.*

Доведення. Нехай $a, b \in S$. Припустимо, що існує простий правий ідеал P такий, що $ab \in P$ і $P \subset M_1 \cap M_2$, де M_1, M_2 — різні максимальні праві ідеали R. Оскільки, $ab \in P$, то або $a \in P$, або $b \in P$. Якщо $a \in P$, то $a \in P \subset M_1 \cap M_2$, що неможливо, позаяк $a \in S$. Випадок $b \in P$ розглядається подібно. Отримані суперечності доводять, що S мультиплікативно замкнена.

Нехай $ab \in S$ і $a \notin S$. Тоді існує простий правий ідеал P такий, що $a \in P \subset M_1 \cap M_2$, де M_1, M_2 — різні максимальні праві ідеали. Тому, $ab \in P \subset M_1 \cap M_2$, що неможливо, бо $a, b \in S$. Отже, S — насичена мультиплікативно замкнена множина. □

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A23.
Keywords: non-Gelfand ideal; divisor; ring; Bezout duo-domain.
doi:10.15330/ms.46.1.13-19

Означення 2. Правий ідеал I кільця R називається *гельфандовим*, якщо I містить хоча б один гельфандовий елемент. У протилежному випадку, правий ідеал I називається *негельфандовим.*

Зауважимо, що довільний ненульовий елемент правого негельфандового ідеалу I є негельфандовим.

Нехай H — множина всіх негельфандових правих ідеалів кільця R. Оскільки, $0 \in H$ то множина H непорожня. Нехай $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — довільний ланцюг правих ідеалів множини H. Розглянемо правий ідеал $I = \cup_{\alpha\in\Omega} I_\alpha$.

Якщо $I \notin H$, то існує такий гельфандовий елемент a, що $a \in I$. За означенням правого ідеала I маємо, що існує такий $\beta \in \Omega$, що $a \in I_\beta$. Тобто, за означенням, правий ідеал I_β є гельфандовим, що неможливо, тому, що $I_\beta \in H$.

Отже, множина H — індукована. За лемою Цорна в H існує принаймні один максимальний елемент.

Означення 3. Правий негельфандовий ідеал N кільця R називається *максимально негельфандовим*, якщо для довільного правого ідеалу I, де $N \subset I$, $I \neq N$, існує гельфандовий елемент a такий, що $a \in I$.

Сформулюємо таке елементарне твердження.

Твердження 2. *Довільний негельфандовий правий ідеал дуо-області Безу міститься хоча б в одному максимальному негельфандовому правому ідеалі.*

У статті [2] доведене таке твердження.

Твердження 3. *Кожний максимально негельфандовий правий ідеал дуо-області Безу є простим ідеалом.*

Доведення. Нехай P — довільний максимально негельфандовий правий ідеал. Доведення проведемо, міркуючи від супротивного. Нехай існують такі елементи $b, c \in R$, що $c \notin P$, $b \notin P$, але $cb \in P$. Розглянемо правий ідеал $P + cR$. Оскільки,

$$P \subset P + cR,$$

де $c \notin P$, то правий ідеал $P + cR$ є гельфандовим, тобто, існують такі елементи $p_1 \in P$ та $r_1 \in R$, що елемент $x = p_1 + cr_1$ теж гельфандовий.

У випадку

$$P \subset P + bR,$$

подібно маємо, що $y = p_2 + br_2$ є гельфандовим елементом для деяких елементів $p_2 \in P$ та $r_2 \in R$.

Оскільки $cb \in P$, то, очевидно, що $xy \in P$, що неможливо, бо за твердженням 1, xy — гельфандовий елемент. □

Твердження 4. *Нехай R — дуо-область Безу, в якій довільний ненульовий простий правий ідеал містить гельфандовий елемент. Тоді R — область, у якій довільний ненульовий простий правий ідеал міститься у єдиному максимальному.*

Доведення. За твердженням 3, достатньо довести, що R не має негельфандових елементів. Припустимо, що в R існує ненульовий негельфандовий елемент a. Розглянемо правий ідеал aR. Очевидно, що він є негельфандовим, оскільки, $a \in aR$. Зауважимо, що всі елементи правого ідеалу aR є негельфандовими, бо у протилежному випадку елемент a як дільник гельфандового елемента був би гельфандовим.

Тоді $aR \subset M$, де M — максимально негельфандовий правий ідеал, який є простим. Оскільки, довільний ненульовий простий правий ідеал містить гельфандовий елемент то отримаємо суперечність. □

Позначимо через $A(R)$ перетин усіх максимально негельфандових правих ідеалів.

Твердження 5. *Нехай R — дуо-область Безу і елемент a — гельфандовий в R, а $b \in A(R)$. Тоді, для довільного $x \in R$, елемент $a + bx$ гельфандовий.*

Доведення. Припустимо, що елемент $a+bx$ негельфандовий. Тоді, $(a+bx)R$ негельфандовий правий ідеал R. За твердженням 2, існує максимально негельфандовий правий ідеал N, який містить правий ідеал $(a + bx)R$, а тому, і елемент $a + bx$. Оскільки, b належить до всіх максимально негельфандових правих ідеалів, то $a = (a+bx) - bx \in N$, що неможливо за означенням правого ідеалу N. □

Твердження 6. *Якщо I такий правий ідеал дуо-області Безу, що для довільних $i \in I$ та гельфандового елемента a, елемент $i + a$ є гельфандовим, то $I \subset A(R)$.*

Доведення. Припустимо, що існує максимально негельфандовий правий ідеал N такий, що $I \nsubseteq N$. За означення максимально гельфандового правого ідеала, існує гельфандовий елемент a, що належить до $I + N$. Тоді, $a = -i+n$, де $i \in I$, $n \in N$. За визначенням I маємо, що $n = a + i$ є гельфандовим елементом, що неможливо, бо $n \in N$. □

Зауважимо, що твердження 5 та 6, встановлюють для правого ідеалу $A(R)$ властивості, подібні до властивостей радикала Джекобсона. Тому, $A(R)$ назвемо *гельфандовим аналогом* радикала Джекобсона.

Наступне твердження у випадку єдиного максимального негельфандового правого ідеала вказує на те, що така дуо-область має властивості подібні до властивостей локальної області.

Твердження 7. *Для дуо-області Безу, наступні властивості еквівалентні:*

1) *у кільці R існує єдиний максимально негельфандовий правий ідеал N;*
2) *сума довільних двох негельфандових елементів є негельфандовим елементом.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Припустимо, що існують негельфандові елементи a та b сума яких $a + b$ — гельфандовий. Через обмеження накладені на R маємо, що $a \in N$ та $b \in N$. Оскільки, N — правий ідеал, то

$$a + b \in N,$$

що неможливо через припущення, що $a+b$ — гельфандовий елемент, а N — максимально негельфандовий правий ідеал.

(2) $\Rightarrow$ (1). Очевидно, оскільки добуток будь-якого негельфандового елемента на довільний елемент кільця є негельфандовим елементом. □

Означення 4. Дуо-кільце R називається *PM-кільцем*, якщо довільний простий правий ідеал R міститься у єдиному максимальному правому ідеалі.

Зауважимо, що елемент a дуо-області R є гельфандовим тоді і тільки тоді, коли фактор-кільце R/aR є PM-кільцем.

Поширюючи міркування зі статті [1] на випадок дуо-кільця, отримаємо наступне твердження.

Твердження 8. *Нехай R є дуо-кільце. Наступні два твердження еквівалентні:*

1) R є PM-кільце;

2) з рівності $a+b=1$ в R випливає, що $(1+ar)(1+bs)=0$ для деяких елементів $r,s\in R$.

Теорема 1. *Нехай R — дуо-область Безу і $a\in R$. Наступні два твердження еквівалентні:*

1) a — гельфандовий елемент;

2) якщо $aR+bR+cR=R$, то $a=r\cdot s$, $rR+bR=R$, $sR+bR=R$.

Доведення. Нехай $aR+bR+cR=R$. Позначимо $\overline{R}=R/aR$, $\overline{b}=b+aR$, $\overline{c}=c+aR$. Тоді

$$\overline{bR}+\overline{cR}=\overline{R}.$$

За твердженням 8, існують такі елементи $\overline{p},\overline{q}\in R$, що

$$(\overline{1}+\overline{b}\overline{p})(\overline{1}+\overline{c}\ \overline{q})=\overline{0}.$$

Позначимо $\alpha=1+bp$, $\beta=1+cq$. Очевидно, що $\alpha R+bR=R$ і $\beta R+cR=R$, а для $\overline{\alpha}=\alpha+\overline{R}$, $\overline{\beta}=\beta+\overline{R}$ маємо

$$\overline{\alpha}\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta}=\overline{0}.$$

Звідси $\alpha\beta\in aR$, тобто, $\alpha\beta=at$, для деякого елемента $t\in R$.

Нехай $\alpha R+aR=rR$ тоді $\alpha=rx$, $a=rs$ і $xR+sR=R$. Оскільки $\alpha=rx$, то $a=rs$ і $\alpha R+aR=rR$, то $xR+sR=R$, бо $xR+bR=R$. Звідки $rR+bR=R$. З огляду на те, що $\alpha\beta=at$, а R — дуо-область, з рівності

$$rx\beta=rst,$$

маємо $x\beta=st$.

З рівності $xR+sR=R$ маємо $xu+sv=1$ для деяких елементів $u,v\in R$. Звідси $xu\beta+sv\beta=\beta$, а тому

$$x\beta u'+sv\beta=\beta,$$

де u' деякий елемент кільця R такий, що $u\beta=\beta u'$. З рівності $x\beta=st$ маємо

$$ytu'+sv\beta=\beta,$$

тобто $yj=\beta$, а з рівності $\beta R+cR=R$ отримуємо

$$sR+cR=R.$$

Отже, ми довели, що $a = r \cdot s$, де r, s такі, що $rR + bR = R$, $sR + cR = R$.

Нехай $\overline{b} + \overline{c} = \overline{1}$ в R. Тоді, $b + c + ax = 1$ для деякого елемента $x \in R$. З рівності $a = r \cdot s$, де r, s такі, що $rR + bR = R$, $sR + cR = R$, отримуємо

$$rk + b\lambda = 1,\ s\omega + c\mu = 1,$$

для деяких елементів $k, \lambda, \mu, \omega \in R$. Звідси, $\overline{(1 - b\lambda)}\ \overline{(1 - c\mu)} = \overline{0}$ в R. Тоді, за твердженням 8, R/aR є PM-кільцем, тобто, a — гельфандовий елемент. □

Означення 5. Нехай R — дуо-область Безу. Назвемо кільце R, *кільцем гельфандового рангу* 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $r \in R$, що $a + br$ — гельфандовий елемент.

Теорема 2. *Нехай R — дуо-область Безу гельфандового рангу 1. Тоді R — кільце елементарних дільників.*

Доведення. Нехай A — довільна матриця вигляду $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де a, b, c такі, що $aR + bR + cR = R$. Для доведення теореми нам досить встановити, що матриця A володіє канонічною діагонально редукцією ([1]). Запишемо

$$ax + by + cz = 1,$$

для деяких елементів $x, y, z \in R$, звідки $bR + (ax + cz)R = R$.

Кільце R є кільцем гельфандового рангу 1, тому, існує елемент $t \in R$ такий, що $b + (ax + cz)t$ — гельфандовий елемент. Послідовно маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ zt & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = B$$

де $\alpha \in R$ такий елемент, що $\alpha a = axt$, оскільки, $aR + bR + cR = R$ і $b + (ax + cz)t = d$. Відповідно до обмежень, накладених на d, за твердженням 4 маємо, що елемент d можна подати у вигляді $d = rs$, де r, s такі, що $rR + aR = R$ і $sR + cR = R$.

Нехай елемент $p \in R$ такий, що $sp + ck = 1$ для деякого елемента $k \in R$. Звідси, отримаємо $rsp + rck = r$ та $dp + cr'k = r$, де r' такий елемент, що $rc = cr'$.

Також маємо $(dp + cq)R + aR = R$, де використано позначення $r'k := q$.

Нехай $Rp + Rq = \delta R$. Тоді $p = \delta p_1$, $q = \delta q_1$ і $\delta = up + vq$, де $Rp_1 + Rq_1 = R$. Зауважимо, що $Rp \subset Rp_1$ і $Rp + Rc = R$, $Rp_1 + Rc = R$. Оскільки, $Rp_1 + Rq_1 = R$, то

$$Rp_1 + R(p_1 d + q_1 c) = R.$$

З того, що $dp + cq = (dp_1 + cp_1)\delta$ та $(dp + cq)R + aR = R$ випливає

$$(dp_1 + cp_1)R + aR = R.$$

Оскільки $Rp_1 + R(dp_1 + cq_1) = R$, то $p_1 R + (dp_1 + cq_1)R = R$, звідки маємо

$$ap_1 R + (dp_1 + cp_1)R = R.$$

Отже, матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ володіє діагональною редукцією. Тоді, звідси випливає, що матриця A теж володіє діагонально канонічною редукцією. □

Наслідок 1. *Нехай R є PM^*-дуо-область Безу. Тоді, R — кільце елементарних дільників.*

Доведення. Твердження наслідку слідує з того факту, що PM^*-дуо-область є дуо-областю гельфандового рангу 1. □

Теорема 3. *Дуо-область Безу R є областю з єдиним максимально негельфандовим правим ідеалом тоді і лише тоді, коли для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, один з елементів a або b є гельфандовим.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай R — кільце з єдиним гельфандовим правим ідеалом, тоді для елементів $a, b \in R$ таких, що

$$aR + bR = R$$

випливає, що один з елементів a або b є гельфандовим, оскільки максимально негельфандовий правий ідеал є власним.

Доведемо достатність. Нехай R — така дуо-область, що для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, один з елементів a або b є гельфандовим. Доведемо, що кільце R є кільцем з єдиним максимально негельфандовим правим ідеалом. Припустимо, що це не так, тобто, існують два максимально негельфандові праві ідеали $N_1, N_2 \in R$. Оскільки, R є дуо-областю Безу і N_1 і N_2 — непорівнювані прості праві ідеали, то

$$N_1 + N_2 = R.$$

Тобто, $n_1 + n_2 = 1$, де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Очевидно, що

$$n_1 R + n_2 R = R,$$

а, звідси, через обмеження накладені на дуо-область Безу, отримуємо, що один з елементів n_1 та n_2 є гельфандовими, що неможливо, тому, що N_1 і N_2 є максимально негельфандовими правими ідеалами за припущенням. □

Означення 6. Дуо-область Безу назвається *локально гельфандовою*, якщо вона містить єдиний максимально негельфандовий правий ідеал.

Прикладом локально гельфандового кільця є приклад Хенріксона, тобто

$$R = \{z_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$$

Радикал Джекобсона — це єдиний максимально негельфандовий правий ідеал цього кільця.

Теорема 4. *Дуо-область Безу R є локально гельфандовою тоді і лише тоді, коли для довільного елемента $a \in R$ або a, або $1 - a$ є гельфандовим елементом.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай R — локально гельфандова область. Розглянемо правий ідеал N — єдиний максимально негельфандовий. Візьмемо довільний елемент $a \in N$. Очевидно, що $(1 - a) \notin N$. Отже, $1 - a$ є гельфандовим елементом.

Розглянемо інший варіант, тобто, $a \notin N$. Тоді, елемент a є гельфандовим. Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Припустимо, що існує два максимально негельфандові праві ідеали N_1 та N_2. Очевидно, що $N_1 + N_2 = R$. Звідси маємо, що $n_1 + n_2 = 1$, де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Тоді один з елементів n_1 або $1 - n_1$ є гельфандовим. Отримали суперечність. □

Наступні твердження є наслідками з теореми 1.

Теорема 5. *Дуо-область Безу R, в якій кожен ненульовий простий правий ідеал міститься у єдиному максимальному правому ідеалі, є локально гельфандовим кільцем.*

Теорема 6. *Довільна локально гельфандова дуо-область Безу R є кільцем елеметарних дільників.*

Доведення. За теоремою 2, для доведення теореми 6 досить встановити, що локально гельфандова дуо-область Безу є кільцем гельфандового рангу 1.

Нехай $aR = bR = R$. Якщо a — гельфандовий елемент, тоді $a + b \cdot 0$ — шукане представлення. Якщо ж a не гельфандовий, тоді з очевидної рівності

$$aR + (a + b)R = R$$

і теореми 3 випливає, що $a + b \cdot 1$ — гельфандовий елемент, а це означає, що R є кільцем гельфандового рангу 1. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Zabavsky B.V., Diagonal reduction of matrices over rings// Math. Studies, Monograph Series, V.16. – Lviv: VNTL Publishers, 2012, 251 p.
2. Pihura O.V. *The maximal non-Gelfand ideals of commutative Bezout domains*// Applied Problems of Mechanics and Mathematics. – 2015. – V.13. –P. 47–52.
3. Sun S.H. *Noncommutative rings in which every prime ideals are conteined in a unique maximal ideal*// Pure Appl. Algebra. – 1991. – V.76. – P. 179–192.

Ivan Franko National University of Lviv
pihuraoksana@mail.ru
linabokhonko@gmail.com

Надійшло 19.07.2016
Після переробки 10.08.2016