УДК 517.51

О. В. Маслюченко[1,2], Д. П. Онипа[1]

ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

O. V. Maslyuchenko, D. P. Onypa. *The cluster sets of continuous functions*, Mat. Stud. **46** (2016), 44–50.

Let X be a metrizable space, D be a boundary locally connected open subset of X (i.e. for any $x \in \overline{D} \setminus D$ and for any neighborhood U of x there is a neighborhood V of x such that $V \subseteq U$ and $V \cap D$ is connected), L be a closed subset of $\overline{D} \setminus D$ and $\Phi\colon L \multimap \overline{\mathbb{R}}$ be a multivalued mapping. We proved that there is a continuous function $f\colon D \to \mathbb{R}$ such that the cluster set $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ for any $x \in L$ if and only if Φ is upper continuous compact-valued multifunction and $\Phi(x)$ is connected for any $x \in L$.

1. Вступ. Поняття граничної множини вперше було сформульовано Пенлеве ([1]) при вивченні особливостей аналітичних функцій комплексної змінної в крузі. Це топологічне поняття дає точнішу ніж коливання характеристику поведінки функції в особливій точці чи то всередині, чи на межі її області визначення, адже коливання — то числова характеристика, а гранична множина — як це видно з самого терміну — множинна. Коливання функції тісно пов'язане з поняттям граничної множини. А саме, коливання — це діаметр граничної множини. Задача на побудову функцій з даними коливаннями і про характеризацію коливань функцій з тих чи інших класів, вивчення якої почалось з роботи П. Костирка ([2]), на даний момент є детально дослідженою. Так, в працях [3, 4, 5, 6, 8, 11] описано коливання довільних функцій і функцій з першого та другого класів Бера, в [8, 10, 11] охарактеризовано коливання нарізно неперервних функцій, що визначені на добутку метризовних топологічних просторів, в [9] — коливання квазінеперервних функцій, а в [12, 13] — коливання майже неперервних функцій. Суміжним питанням про квазіколивання та інші узагальнення коливань займався Я. Борсік ([7]).

У всіх цих роботах вивчалася поведінка функцій всередині їх області визначення. Вперше такого сорту питання щодо поведінки функції на межі своєї області визначення, а саме, задачу про граничні коливання, було досліджено в [14] для локально сталих і в [15] для неперервних функцій. Граничні множини довільних дійснозначних функцій були охарактеризовані в праці [17], а задача про опис граничної множини функції, що визначена на $(0;1]$ і набуває значень в деякому локально лінійно зв'язному метризовному компакті, була розв'язана нами в [16]. Метою цієї статті є характеризація граничних множин дійснозначних неперервних функцій, що визначені на підпросторах метризовних просторів. Загальніше це питання було сформульоване в [16].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A15, 54C30, 54C10.
Keywords: cluster set; boundary locally connected set; usco mapping.
doi:10.15330/ms.46.1.44-50

Проблема. *Нехай X — топологічний простір, $L = \overline{D} \setminus D$, Y — щільний підпростір компактного топологічного простору $\overline{Y}$. Для яких мультифункцій $\Phi\colon L \multimap \overline{Y}$ існує неперервна функція $f\colon D \to Y$ така, що $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ для кожного $x \in L$?*

Введемо потрібні нам означення. Нехай X — топологічний простір, Y — щільний підпростір компакту $\overline{Y}$, D — підмножина простору X і $f\colon D \to Y$ — деяке відображення. Через $\mathcal{U}_x$ позначатимемо систему усіх околів точки x в просторі X. *Граничною множиною функції f в точці $x \in \overline{D}$* називається множина

$$\overline{f}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{f(U \cap D)}.$$

Відповідне многозначне відображення

$$\overline{f}\colon \overline{D} \multimap \overline{Y}$$

називатимемо *граничною мультифункцією відображення f*. В даній статті стрілка " $\to$ " вживається для позначення однозначного відображення, а стрілка " $\multimap$ " — для многозначного.

Як уже відмічалось раніше, дослідженню граничних мультифункцій довільних дійснозначних функцій була присвячена наша робота [17]. А саме, там отримано такий результат.

Теорема 1 ([17], Theorem 4.3)**.** *Нехай X — метризовний топологічний простір, Y — щільний підпростір метризовного компактного простору $\overline{Y}$, L — замкнена ніде не щільна в X множина, $\Phi\colon L \multimap \overline{Y}$ — неперервне зверху компактнозначне відображення і множина $D \subseteq X \setminus L$ така, що $L \subseteq \overline{D}$. Тоді існує функція $f\colon D \to Y$, для якої $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ при $x \in L$.*

В цій статті ми покажемо можливість побудови неперервних функцій з даними граничними множинами. А саме, ми розв'яжемо згадану проблему для випадку метризовного простору X, замкненої множини L, $Y = \mathbb{R}$ і $\overline{Y} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

2. Граничні мультифункції і гранично локально зв'язні множини. Нагадаємо, що многозначне відображення $\Phi\colon X \multimap Y$ між топологічними просторами X та Y називається *неперервним зверху*, якщо для довільної точки x з X і для кожної відкритої в Y множини V такої, що $\Phi(x) \subseteq V$, існує окіл U точки x в X, для якого $\Phi(U) \subseteq V$.

Твердження 1 ([17], Proposition 3.2)**.** *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір, $D \subseteq X$ і $f\colon D \to Y$. Тоді гранична мультифункція $\overline{f}\colon \overline{D} \multimap Y$ є неперервним зверху компактнозначним відображенням. Зокрема, для довільних точки $x \in \overline{D}$ і околу V множини $\overline{f}(x)$ існує окіл U точки x такий, що $f(U \cap D) \subseteq V$.*

Множину $D \subseteq X$ називатимемо *гранично локально зв'язною в X*, якщо для довільної точки $x \in \overline{D} \setminus D$ і для довільного околу U точки x існує окіл V точки x такий, що $V \subseteq U$ і перетин $V \cap D$ зв'язний. Зауважимо, що це поняття тісно пов'язане з множиною $L(D)$ (див. [20, с.241]). А саме, множина D буде гранично локально зв'язною в метричному просторі X тоді і тільки тоді, коли $\overline{D} \setminus D \subseteq L(D)$.

Твердження 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір, D — гранично локально зв'язна в X, $f\colon D \to Y$ неперервна і $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. Тоді $\overline{f}(x_0)$ є зв'язною.*

Доведення. Нехай

$$\mathcal{V}=\Big\{V\colon V \text{ — окіл } x_0, V\cap D \text{ — зв'язна множина}\Big\}.$$

Покажемо, що $\overline{f}(x_0)=\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}}\overline{f(V\cap D)}$. З того, що $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}_{x_0}$ маємо, що

$$\overline{f}(x_0)=\bigcap_{U\in\mathcal{U}_{x_0}}\overline{f(U\cap D)}\subseteq\bigcap_{V\in\mathcal{V}}\overline{f(V\cap D)}.$$

З іншого боку, з того, що D гранично локально зв'язна маємо, що для кожного $U\in\mathcal{U}_{x_0}$ існує $V_U\in\mathcal{V}$ такий, що $V_U\subseteq U$. Тоді

$$\overline{f}(x_0)=\bigcap_{U\in\mathcal{U}_{x_0}}\overline{f(U\cap D)}\supseteq\bigcap_{U\in\mathcal{U}_{x_0}}\overline{f(V_U\cap D)}\supseteq\bigcap_{V\in\mathcal{V}}\overline{f(V\cap D)}.$$

Користуючись тим, що зв'язність зберігається при неперервному відображенні ([18, с. 518]) маємо, що $\overline{f(V\cap D)}$ є континуумом (тобто зв'язним компактом) для кожного $V\in\mathcal{V}$. Але перетин спадної напрямленості континуумів є континуумом ([18, с. 522]). Тому $\overline{f}(x_0)=\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}}\overline{f(V\cap D)}$ є континуумом. Зокрема, $\overline{f}(x_0)$ є зв'язною множиною. □

Твердження 3. *Нехай X — топологічний простір. Для того, щоб $\Phi\colon X\multimap\overline{\mathbb{R}}$ була неперервною зверху компактнозначною мультифункцією зі зв'язними значеннями, необхідно і досить, щоб існували напівнеперервна знизу функція $\varphi_1\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ і напівнеперервна зверху функція $\varphi_2\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ такі, що $\Phi(x)=[\varphi_1(x);\varphi_2(x)]$ для кожного $x\in X$.*

Доведення. Необхідність. Для $x\in X$ покладемо $\varphi_1(x)=\inf\Phi(x)$ і $\varphi_2(x)=\sup\Phi(x)$. Оскільки $\Phi(x)$ зв'язна і компактна підмножина $\overline{\mathbb{R}}$, то $\Phi(x)=[\varphi_1(x);\varphi_2(x)]$ для кожного $x\in X$. Перевіримо напівнеперервність функцій φ_1 і φ_2.

Доведемо, що φ_1 напівнеперервна знизу. Візьмемо $x_0\in X$ і число $\gamma<\varphi_1(x_0)$. Оскільки $\varphi_1(x_0)=\inf\Phi(x_0)$, то $y>\gamma$ для кожного $y\in\Phi(x_0)$. Отже, множина $V=(\gamma;+\infty]$ є відкритим околом множини $\Phi(x_0)$. Але Φ неперервна зверху. Тому існує такий окіл U точки x_0, що $\Phi(U)\subseteq V$. Тоді для довільного $x\in U$ маємо, що $\varphi_1(x)=\inf\Phi(x)\in\overline{V}=[\gamma;\infty]$. Таким чином, $\varphi_1(x)\geq\gamma$ для кожного $x\in U$. Отже, φ_1 напівнеперервна знизу.

Напівнеперервність зверху функції φ_2 доводиться аналогічним чином.

Достатність. Ясно, що відрізок $\Phi(x)=[\varphi_1(x);\varphi_2(x)]$ є зв'язною компактною множиною для кожного x. Нехай $x_0\in X$. Встановимо неперервність зверху відображення Φ в точці x_0. Нехай V — довільна відкрита підмножина $\overline{\mathbb{R}}$ така, що

$$\Phi(x_0)=[\varphi_1(x_0);\varphi_2(x_0)]\subseteq V.$$

Візьмемо відкритий в $\overline{\mathbb{R}}$ проміжок W з кінцями $\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{R}}$ такий, що

$$[\varphi_1(x_0);\varphi_2(x_0)]\subseteq W\subseteq[\alpha;\beta]\subseteq V.$$

Тоді, оскільки $\varphi_1(x_0)>\alpha$, якщо $\alpha>-\infty$ і $\varphi_2(x_0)<\beta$, якщо $\beta<+\infty$. Тому неперервності знизу φ_1 маємо, що існує окіл U_1 точки x_0 в X такий, що для довільних $x\in U_1$ виконується, що $\varphi(x)\geq\alpha$. Також з неперервності зверху відображення φ_2 маємо, що існує окіл U_2 точки x_0 в X такий, що для довільних $x\in U_2$ виконується, що $\varphi(x)\leq\beta$. Тоді $U=U_1\cap U_2$ є околом точки x_0 в X і $\Phi(U)\subseteq[\alpha;\beta]\subseteq V$. Отже, Φ є неперервним зверху. □

3. Продовження за Дуґунджі. Нехай (X, d) — метричний простір і Y — локально опуклий топологічний векторний простір. Позначатимемо

$$d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x),$$

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X \colon d(x, a) < \varepsilon\}, \qquad B(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon d(x, A) < \varepsilon\},$$
$$B[a, \varepsilon] = \{x \in X \colon d(x, a) \le \varepsilon\}, \qquad B[A, \varepsilon] = \{x \in X \colon d(x, A) \le \varepsilon\}.$$

При потребі для цих множин використовуватимемо точніші позначення:

$$B_X(a, \varepsilon),\ B_X(A, \varepsilon),\ B_X[a, \varepsilon],\ B_X[A, \varepsilon].$$

Нехай $D \subseteq X$, A — непорожня замкнена в D множина і $g \colon A \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Розглянемо відкрите покриття

$$\mathcal{B} = \Big\{ B_D\big(x, \tfrac{1}{4} d(x, A)\big) \colon x \in D \setminus A \Big\}$$

метризовного простору $D \setminus A$. Як добре відомо (дивись, наприклад, [18]) існує локально скінченне на $D \setminus A$ розбиття одиниці $(\varphi_s)_{s \in S}$, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{B}$. Позначимо

$$U_s = \operatorname{supp} \varphi_s = \{x \in D \setminus A \colon \varphi_s(x) \ne 0\} = \varphi_s^{-1}((0; +\infty)).$$

Тоді $\{U_s \colon s \in S\}$ — локально скінченне покриття $D \setminus A$, вписане в покриття $\mathcal{B}$. Виберемо для кожного $s \in S$ таке $x_s \in D \setminus A$, для якого $U_s \subseteq B\big(x_s, \frac{1}{4} d(x_s, A)\big)$. Візьмемо $a_s \in A$ таке, що $d(x_s, a_s) < \frac{5}{4} d(x_s, A)$. Покладемо

$$f(x) = \triangle_{A,D} g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{s \in S} \varphi_s(x) g(a_s)\ , & x \in D \setminus A; \\ \quad g(x) & , \ x \in A. \end{cases}$$

Функція $f = \triangle_{A,D} g \colon D \to Y$ називається *продовженням за Дуґунджі* функції $g \colon A \to Y$. В роботі [19] доведено, що f є неперервним продовженням g.

Нехай Y — топологічний векторний простір і $\overline{Y}$ — деяка фіксована компактифікація цього простору (для простоти ми завжди вважатимемо, що $Y \subseteq \overline{Y}$). Як звичайно, через $\mathrm{co}(A)$ позначатимемо опуклу оболонку множини A в просторі Y. Для непорожньої підмножини E простору $\overline{Y}$ позначатимемо

$$[E] = \bigcap \mathcal{C}(E), \text{ де } \mathcal{C}(E) = \Big\{ \overline{\mathrm{co}(V \cap Y)} \colon E \subseteq V, V \text{ відкрита в } \overline{Y} \Big\}$$

(тут риска означає замикання в $\overline{Y}$). Множину $C \subseteq \overline{Y}$ називатимемо *квазіопуклою*, якщо $C = [C]$. Наприклад, якщо E є підмножиною $\mathbb{R}$ з двоточковою компактифікацією $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, то нескладно довести, що система $\mathcal{C}(E)$ складається з усіх замкнених відрізків в $\overline{\mathbb{R}}$, що містять множину E, а значить,

$$[E] = [\inf E; \sup E].$$

Тому в цій ситуації квазіопуклими множинами будуть замкнені відрізки в $\overline{\mathbb{R}}$ і тільки вони. З іншого боку, для одноточкової компактифікації $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ числової прямої матимемо, що $[\{\infty\}] = \alpha\mathbb{R}$. Тому одноточкова множина $\{\infty\}$ не є квазіопуклою. В цьому випадку можна довести, що квазіопуклими множинами будуть замкнені відрізки в $\mathbb{R}$ або весь простір $\alpha\mathbb{R}$.

Твердження 4. *Нехай* (X,d) *— метричний простір,* Y *— локально опуклий простір,* $\overline{Y}$ *— деяка його компактифікація,* $D\subseteq X$*,* A *— замкнена в* D *множина,* $g\colon A\to Y$ *— неперервна функція,* $f=\triangle_{A,D}g\colon D\to Y$ *— продовження за Дуґунджі функції* g *і* $x_0\in\overline{A}\setminus D$*. Тоді* $\overline{f}(x_0)\subseteq[\overline{g}(x_0)]$.

Доведення. Візьмемо $C_0\in\mathcal{C}\big(\overline{g}(x_0)\big)$ і покажемо, що $\overline{f}(x_0)\subseteq C_0$. Виберемо відкриту в $\overline{Y}$ множину V_0 для якої $C_0=\overline{\mathrm{co}(V_0)}$ і $\overline{g}(x_0)\subseteq V_0$. Нехай U_s, x_s, a_s і φ_s, де $s\in S$, — ті що фігурують в означенні продовження за Дуґунджі $f=\triangle_{A,D}g$. Для довільної точки $x\in D\setminus A$ позначимо

$$S_x=\{s\in S\colon x\in U_s\}.$$

Зрозуміло, що тоді множина S_x скінченна, $f(x)=\sum_{s\in S_x}\varphi_s(x)g(a_s)$ і $\sum_{s\in S_x}\varphi_s(x)=1$. Доведемо, що для довільних точок $x\in D\setminus A$ і $s\in S_x$ виконується нерівність $d(x,a_s)<\frac{3}{2}d(x_s,A)$. Зафіксуємо $x\in D\setminus A$ і $s\in S_x$. Тоді з означення множин S_x та U_s випливає, що $x\in U_s\subseteq B\big(x_s,\frac{1}{4}d(x_s,A)\big)$. Отже, $d(x,x_s)<\frac{1}{4}d(x_s,A)$. Але з іншого боку, вибираючи точки a_s, ми забезпечили виконання нерівності $d(x_s,a_s)<\frac{5}{4}d(x_s,A)$. Тому

$$d(x,a_s)\le d(x,x_s)+d(x_s,a_s)<\tfrac{1}{4}d(x_s,A)+\tfrac{5}{4}d(x_s,A)=\tfrac{3}{2}d(x_s,A).$$

Доведемо, що для деякого відкритого околу U_0 точки x_0 виконується включення $f(U_0\cap D)\subseteq V_0$. За твердженням 1, виберемо окіл U_1 точки x_0 такий, що $g(U_1\cap A)\subseteq V_0$. Візьмемо таке $\delta>0$, для якого $B(x_0,3\delta)\subseteq U_1$ і позначимо $U_0=B(x_0,\delta)$. Зафіксуємо $x\in U_0\cap(D\setminus A)$ і $s\in S_x$. Оскільки $x_0\in\overline{A}$, то $d(x,A)=d(x,\overline{A})\le d(x,x_0)<\delta$. Врахувавши, що $x\in U_s\subseteq B\big(x_s,\frac{1}{4}d(x_s,A)\big)$, одержимо $d(x,x_s)<\frac{1}{4}d(x_s,A)$, а значить,

$$d(x_s,A)\le d(x_s,x)+d(x,A)<\tfrac{1}{4}d(x_s,A)+\delta.$$

Звідси одержуємо, що $\frac{3}{4}d(x_s,A)<\delta$, а значить, $d(x_s,A)<\frac{4}{3}\delta$. Тоді

$$d(x,a_s)<\tfrac{3}{2}d(x_s,A)<\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\delta=2\delta.$$

Таким чином,

$$d(x_0,a_s)\le d(x_0,x)+d(x,a_s)<\delta+2\delta=3\delta.$$

Отже, ми встановили, що для довільних точок $x\in U_0\cap(D\setminus A)$ і $s\in S_x$ виконується, що $a_s\in B(x_0,3\delta)\subseteq U_1$, а значить,

$$g(a_s)\in g(U_1\cap A)\subseteq V_0\cap Y.$$

Тоді,

$$f(x)=\sum_{s\in S_x}\varphi_s(x)g(a_s)\in\mathrm{co}(V_0\cap Y)$$

для довільного $x\in U_0\cap(D\setminus A)$. Крім того, $f(x)=g(x)\in V_0\cap Y$ при $x\in U_0\cap A$. Таким чином, $f(U_0\cap D)\subseteq\mathrm{co}(V_0\cap Y)$. Тоді

$$\overline{f}(x_0)\subseteq\overline{f(U_0\cap D)}\subseteq\overline{\mathrm{co}(V_0\cap Y)}=C_0.$$

Таким чином, ми переконалися, що $\overline{f}(x_0)\subseteq C$ для довільного $C\in\mathcal{C}\big(\overline{g}(x_0)\big)$. Тому

$$\overline{f}(x_0)\subseteq\bigcap\mathcal{C}\big(\overline{g}(x_0)\big)=[\overline{g}(x_0)],$$

що і потрібно було довести. □

2. Гранична мультифункція неперервної функції. Нам буде потрібне наступне твердження.

Теорема 2 ([17], Theorem 3.3.). *Нехай X — метризовний простір, Y — щільний підпростір деякого метризовного компакту $\overline{Y}$, L — замкнена ніде не щільна підмножина X, $D = X \setminus L$, $\Phi\colon L \multimap \overline{Y}$ — неперервне зверху компактнозначне відображення. Тоді існують дискретна множина $A \subseteq D$ і функція $f\colon A \to Y$ такі, що $\overline{A} \setminus A = L$ і $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ для кожного $x \in L$.*

Спочатку ми встановимо досить загальний результат про функції зі значеннями в локально опуклих просторах, звідки, як наслідок, отримаємо характеризацію граничних множин для дійснозначних неперервних фунцій.

Теорема 3. *Нехай X — метризовний топологічний простір, Y — локально опуклий простір, $\overline{Y}$ — деяка його метризовна компактифікація, D — відкрита в X множина, L замкнена в $\overline{D} \setminus D$, $\Phi\colon L \multimap \overline{Y}$ — неперервне зверху многозначне відображення таке, що $\Phi(x)$ квазіопукла для довільного $x \in L$. Тоді існує неперервна функція $f\colon D \to Y$ така, що $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ для кожного $x \in L$.*

Доведення. Оскільки мультифункція Φ є компактнозначною неперервною зверху, то за теоремою 2 існують дискретна множина $A \subseteq D$ і функція $g\colon A \to \mathbb{R}$ такі, що $\overline{A} \setminus A = L$ і $\overline{g}(x) = \Phi(x)$ при $x \in L$. Оскільки $\overline{A} \setminus A = L \subseteq X \setminus D$, то множина A буде замкненою і дискретною в підпросторі D і тому функція g є неперервною. Нехай $f = \Delta_{A,D} g\colon D \to Y$ є неперервним продовженням за Дуґунжі функції g. Зафіксуємо $x_0 \in L$ і покажемо, що $\overline{f}(x_0) = \Phi(x_0)$. Враховуючи, що множина $\Phi(x_0)$ квазіопукла, за твердженням 4 отримуємо включення $\overline{f}(x_0) \subseteq [\overline{g}(x_0)] = [\Phi(x_0)] = \Phi(x_0)$. З іншого боку маємо, що

$$\Phi(x_0) = \overline{g}(x_0) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{g(U \cap A)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(U \cap A)} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \overline{f(U \cap D)} = \overline{f}(x_0).$$

Отже, $\overline{f}(x_0) = \Phi(x_0)$. □

Тепер перейдемо до встановлення основного результату.

Теорема 4. *Нехай X — метризовний топологічний простір, D — гранично локально зв'язна відкрита в X множина, L замкнена в $\overline{D} \setminus D$, $\Phi\colon L \multimap \overline{\mathbb{R}}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) *існує неперервна функція $f\colon D \to \mathbb{R}$ така, що $\overline{f}(x) = \Phi(x)$ для кожного $x \in L$;*

(ii) *Φ є неперервною зверху компактнозначною мультифункцією, причому $\Phi(x)$ зв'язна для кожного $x \in L$;*

(iii) *існують напівнеперервна знизу функція $\varphi_1\colon L \to \overline{\mathbb{R}}$ і напівнеперервна зверху функція $\varphi_2\colon L \to \overline{\mathbb{R}}$ такі, що $\Phi(x) = [\varphi_1(x); \varphi_2(x)]$ для кожного $x \in L$.*

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з твердження 1 і твердження 2. Твердження 3 дає нам імплікацію $(ii) \Rightarrow (iii)$. Імплікація $(iii) \Rightarrow (i)$ випливає з твердження 3, теореми 3 і того факту, що в $\overline{\mathbb{R}}$ замкнені відрізки є квазіопуклими. □

ЛІТЕРАТУРА

1. P. Painleve, *Lecons sur la theorie analytique des equations differentielles professees a Stockholm*, Paris, 1897.
2. P. Kostyrko, *Some properties of oscillation*, Math. Slovaca, **30** (1980), 157–162.
3. Z. Duszhynski, Z. Grande, S. Ponomarev, *On the ω-primitives*, Math. Slovaka, **51** (2001), 469–476.
4. J. Ewert, S. Ponomarev, *On the exsistance of ω-primitives on arbitrary metric spaces*, Math. Slovaca, **53** (2003), 51–57.
5. J. Ewert, S. Ponomarev, *Oscillation and ω-primiteves*, Real Anal. Exchange, **26** (2001–2002), 687–702.
6. S. Kowalczyk, *The ω-problem*, Diss. math. (Rozpr. mat.), **501** (2014), 1–55.
7. J. Borsik, *On quasioscillation*, Tatra Mountains Math. Publ., **2** (1993), 25–36.
8. O.V. Maslyuchenko, V.K. Maslyuchenko, *The construction of a separately continuous function with given oscillation*, Ukr. Math. J., **50** (1998), №7, 948–959. (in Ukrainian)
9. O.V. Maslyuchenko, *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces*, Houston Journal of Mathematics, **35** (2009), №1, 113–130.
10. O.V. Maslyuchenko, *The construction of ω-primitives: the oscillation of sum of functions*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka, **5** (2008), 151–163. (in Ukrainian)
11. O.V. Maslyuchenko *The construction of ω-primitives: strongly attainable spaces*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka, **6** (2009), 155–178. (in Ukrainian)
12. O.V. Maslyuchenko, *Fluctuations of almost continuous functions*, Naukovyj visnyk Chernivets'kogo universytetu. Matematyka, **528** (2010), 104–110. (in Ukrainian)
13. O.V. Maslyuchenko, *Decomposition of semi-continuous function as sum of two quasi-continuous functions and oscillation of almost continuous function*, Mat. Stud., **35** (2011), 205–214. (in Ukrainian)
14. O.V. Maslyuchenko, D.P. Onypa, *Limit oscillations of locally constant functions*, Buk. Math. J., **1** (2013), №3–4, 97–99. (in Ukrainian)
15. O.V. Maslyuchenko, D.P. Onypa, *Limit oscillations of continuous functions*, Carp. math. publ., **7** (2015), № 2, 191–196. (in Ukrainian)
16. O.V. Maslyuchenko, D.P. Onypa, *On cluster sets of continuous functions with values in locally arcwise connected spaces*, Buk. Math. J., **3** (2015), №3–4, 127–132. (in Ukrainian)
17. O.V. Maslyuchenko, D.P. Onypa, *Construction of functions with the given cluster sets*, Colloquium Mathematicum (to appear) (http://arxiv.org/abs/1602.07118).
18. R. Engelking, General topology, PWN, Warsaw, 1977.
19. R. Arens, *Extension of functions on fully normal spaces*, Pacific Journal of Mathematics, **2** (1952), №1, 11-22.
20. K. Kuratowski. Topology. V.2, Moscow: Mir, 1969. (in Russian)

[1] Chernivtsi National University
denys.onypa@gmail.com
[2] Instytite of Mathematics, Academia Pomeraniensis in Słupsk
ovmasl@gmail.com

Надійшло 17.06.2016