УДК 519.5

М. М. Бокало, А. М. Цебенко

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

M. M. Bokalo, A. M. Tsebenko. *Optimal control in problems without initial conditions for evolutionary variational inequalities*, Mat. Stud. **46** (2016), 51–66.

Optimal control in problems without initial conditions for the evolution variational inequalities is studied. Control functions are contained in a free member of the inequalities. The case of general cost function is considered, which includes either cases of distributed observations or final observations. The existence of an optimal control is proved.

Вступ. У цій праці розглядаємо проблему, пов'язану з оптимальним керуванням системами, стан яких описується задачею без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей. Наведемо приклад досліджуваних тут задач.

Нехай $p > 2$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Позначимо $Q := \Omega \times (-\infty, 0]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (-\infty, 0]$, $\Omega_t := \Omega \times \{t\}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Нехай $L^q(F)$, де $q \in [1, \infty]$, F — вимірна множина в $\mathbb{R}^k$ $(k = n$ або $k = n + 1)$, — стандартний простір Лебега; $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ — простір визначених на Q і вимірних функцій таких, що їх звуження на будь-яку вимірну обмежену множину $Q' \subset Q$ належить $L^q(Q')$; $W^{1,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid v_{x_i} \in L^p(\Omega)\ (i = \overline{1, n})\}$ — стандартний простір Соболєва.

Припустимо, що $U := L^2(Q)$ — простір керувань, U_∂ — опукла замкнена множина в U — множина допустимих керувань. Нехай K — опукла замкнена множина в $W^{1,p}(\Omega)$, що містить 0. Стан керованої еволюційної системи для кожного керування $u \in U_\partial$ описуємо функцією $y = y(u) = y(x, t; u)$, $(x, t) \in Q$, з простору $L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такою, що $y_{x_i} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1, n})$, $y_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, і для майже всіх $t \in S$ маємо $y(\cdot, t; u) \in K$ та

$$\int\limits_{\Omega_t} \{y_t(v - y) + |\nabla y|^{p-2}\nabla y \nabla(v - y) + |y|^{p-2} y(v - y)\}\, dx \geq \int\limits_{\Omega_t} (f + u)(v - y)\, dx \quad \forall\, v \in K, \tag{1}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ — задана функція, $\nabla y := (y_{x_1}, \ldots, y_{x_n})$.

Нехай функцію вартості $J\colon U_\partial \to \mathbb{R}$ маємо у вигляді

$$J(u) = \|y(\cdot, 0; u) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|u\|^2_{L^2(Q)},$$

де $\mu > 0$, $z_0 \in L^2(\Omega)$ — задані.

Тоді задача, яка нас цікавить, формулюється так: знайти $u^* \in U_\partial$ таке, що

$$J(u^*) = \inf_{u \in U_\partial} J(u).$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26D10, 47J20, 47J22 49J40, 49J21.
Keywords: optimal control; parabolic variational inequality; variational inclusion.
doi:10.15330/ms.46.1.51-66

Як показано далі, ця задача має розв'язок.

Відмітимо, що нерівність (1) можна записати в більш абстрактній, але зручній для дослідження, формі. Справді, провівши відповідні ототожнення функцій і функціоналів, матимемо неперервні та щільні вкладення $W^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (W^{1,p}(\Omega))'$, де $(W^{1,p}(\Omega))'$ — спряжений до $W^{1,p}(\Omega)$ простір. Легко бачити, що в цьому випадку для будь-яких $h \in L^2(\Omega)$ і $v \in W^{1,p}(\Omega)$ маємо $\langle h, v\rangle = (h, v)$, де $\langle \cdot, \cdot\rangle$ — позначення дії елемента з $(W^{1,p}(\Omega))'$ на елемент з $W^{1,p}(\Omega)$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $L^2(\Omega)$. Тому можемо використовувати позначення $(\cdot, \cdot)$ замість $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

Введемо позначення $S := (-\infty, 0]$, $V := W^{1,p}(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ і визначимо оператор $A\colon V \to V'$ за правилом

$$(A(v), w) = \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w + |v|^{p-2}vw\right] dx, \quad v, w \in V.$$

Тоді задача на визначення стану системи полягає у відшуканні функції $y \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$ такої, що $y' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ та для майже всіх $t \in S$ маємо $y(t) \in K$ і

$$(y'(t) + A(y(t)), v - y(t)) \geq (f(t) + u(t), v - y(t)) \quad \forall\, v \in K, \tag{2}$$

де $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ — задана функція, $u \in U_\partial \subset U = L^2(S; H)$ — допустиме керування.

Відмітимо, що варіаційну нерівність (2) можна записати у вигляді субдиференціального включення. Для цього покладемо $I_K(v) := 0$, якщо $v \in K$, і $I_K(v) := +\infty$, якщо $v \in V \setminus K$, а також

$$\Phi(v) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx + I_K(v), \quad v \in V.$$

Легко переконатись, що функціонал $\Phi\colon V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ є опуклим і напівнеперервним знизу. Тоді з відомих результатів (див., наприклад, [24, с. 83]) випливає, що задачу на знаходження розв'язків варіаційної нерівності (2) можна записати у вигляді задачі для субдиференціального включення: знайти функцію $y \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$ таку, що $y' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ і для майже всіх $t \in S$ маємо $y(t) \in D(\partial\Phi)$ та

$$y'(t) + \partial\Phi(y(t)) \ni f(t) + u(t) \text{ в } H. \tag{3}$$

Саме задачами оптимального керування для систем, стан яких описується еволюційними включеннями типу (3), і присвячена ця праця. Принагідно відзначимо, що у відомих монографіях [3, 24] та багатьох статтях, присвячених згаданій тематиці, диференціальні включення часто називають варіаційними нерівностями. В нашій роботі будемо притримуватися цієї традиції.

Задачі оптимального керування системами, стан яких описується варіаційними нерівностями, є досить популярними. Велика кількість таких задач була розглянута у монографії [3] та інших працях (див., наприклад, [1, 10, 16, 17]). Зокрема, у праці [1] розглядається задача оптимального керування системами, стан яких описується параболічними варіаційними нерівностями. Там доведено існування оптимального керування та виведено необхідні умови оптимальності. У праці [16] досліджено оптимальне керування системами, що описуються параболічними варіаційними нерівностями у випадку, коли область зміни просторового аргументу не обов'язково є обмеженою. У праці [17] доведено існування оптимального керування системами, стан яких описується нелінійними варіаційними нерівностями у випадку, коли керування є коефіцієнтом нерівності, використовуючи прямий метод варіаційного числення і лему про компактність.

Ця праця присвячена задачам оптимального керування системами, стан яких описується еволюційними варіаційними нерівностями без початкових умов. Частковим випадком задачі без початкових умов для еволюційних варіаційних нерівностей є задача без початкових умов або, іншими словами, задача Фур'є для еволюційних рівнянь. Дослідження задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей проводились у працях [5, 6, 9, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 26] та ін. Відзначимо, що єдиність розв'язків цієї задачі для лінійних параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей можлива лише при певних обмеженнях на поведінку розв'язків при $t \to -\infty$. Вперше це у випадку рівняння теплопровідності строго обґрунтував А. М. Тіхонов ([27]). Натомість, як показав М. М. Бокало ([9]), задача без початкових умов для деяких нелінійних параболічних рівнянь має єдиний розв'язок в класі функцій з довільною поведінкою при $t \to -\infty$. Аналогічні результати отримано і для еволюційних варіаційних нерівностей в [5].

Задачі оптимального керування системами, стан яких описується задачами без початкових умов для еволюційних рівнянь раніше вже досліджувались авторами (див., наприклад, [8, 7]). А от, наскільки нам відомо, задачі оптимального керування системами, стан яких описується задачами без початкових умов для варіаційних нерівностей раніше зовсім не розглядалися, що і слугує однією з мотивацій для дослідження таких задач.

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі наведені основні позначення, означення функційних просторів та допоміжні твердження. Формулювання задачі оптимального керування та основного результату міститься у другому розділі. У третьому розділі доводиться коректність задачі без початкових умов для варіаційних нерівностей. Обґрунтування основного результату наведено у четвертому розділі.

1. Основні позначення та допоміжні факти. Нехай V — сепарабельний рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел з нормою $\|\cdot\|$, а H — гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $|\cdot|$. Припускаємо, що простір V компактно, неперервно і щільно вкладається в H, тобто, V є підмножиною H, замикання V в H збігається з H, існує стала $\lambda > 0$ така, що

$$\lambda|v|^2 \le \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

та для будь-якої послідовності $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, обмеженої в V, існує елемент $w \in V$ та підпослідовність $\{w_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $w_{k_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} w$ сильно в H.

Нехай V' і H' спряжені відповідно до V та H простори і вважатимемо (провівши відповідне ототожнення функціоналів), що простір H' є підпростором простору V'. Ототожнивши (на підставі теореми Рісса) простори H та H', отримаємо неперервні та щільні вкладення

$$V \subset H \subset V'. \tag{5}$$

Зауважимо, що в даному випадку $\langle g, v\rangle_V = (g, v)$ для будь-яких $v \in V, g \in H$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ означає дію елемента з V' на елемент з V (канонічний добуток на $V \times V'$). Тому далі вживатимемо позначення $(\cdot,\cdot)$ замість $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Також використовуватимемо позначення $\|\cdot\|_*$ для норми в V'. Зауважимо, що

$$\lambda\|h\|_*^2 \le |h|^2 \quad \forall h \in H, \tag{6}$$

де λ — стала з нерівності (4). Справді, на підставі (4) маємо

$$\|h\|_* = \sup_{v\in V, \|v\|=1} |(h,v)| \le \sup_{v\in V, \|v\|=1} |h||v| \le \lambda^{-1/2}|h|.$$

Нехай $S := (-\infty, 0]$.

Введемо потрібні нам далі простори функцій і розподілів, визначених на числовому проміжку зі значеннями в банаховому просторі. Нехай X — довільний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$. Через $C(S;X)$ позначатимемо простір визначених і неперервних на S зі значеннями в X функцій. Скажемо, що послідовність $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ збігається до z в $C(S;X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ на відрізок $[t_1, t_2]$ збігається до звуження z на цей відрізок в $C([t_1,t_2];X)$.

Нехай $q \in [1,\infty]$, q' — спряжене до q, тобто, $1/q + 1/q' = 1$. Під $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$ розумітимемо лінійний простір визначених і вимірних на S зі значеннями в X функцій таких, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ їх звуження на відрізок $[t_1,t_2]$ належать простору $L^q(t_1,t_2;X)$. Скажемо, що послідовність $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ обмежена (відповідно, збігається до z сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^q_{\mathrm{loc}}(S;X)$, якщо для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ послідовність звужень членів послідовності $\{z_m\}_{m=1}^\infty$ на відрізок $[t_1,t_2]$ обмежена (відповідно, збігається до звуження z на цей відрізок сильно (відповідно, слабко чи $*$-слабко)) в $L^q(t_1,t_2;X)$.

Під $D'(-\infty,0;V'_w)$ розумітимемо простір визначених на $D(-\infty,0)$ зі значеннями в V' розподілів, тобто простір лінійних неперервних функціоналів на $D(-\infty,0)$ зі значеннями в V'_w (тут і далі $D(-\infty,0)$ — простір нескінченно диференційовних і фінітних на $(-\infty,0)$ функцій, V'_w — лінійний простір V' з слабкою топологією). Легко переконатися (враховуючи (5)), що простори $L^q_{\mathrm{loc}}(S;V)$, $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$, $L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$ можна ототожнити з відповідними підпросторами простору розподілів $D'(-\infty,0;V'_w)$. Це, зокрема, дозволяє говорити про похідні z' функцій z з $L^q_{\mathrm{loc}}(S;V)$ і $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ в сенсі розподілів $D'(-\infty,0;V'_w)$ і про належність таких похідних до $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ чи $L^{q'}_{\mathrm{loc}}(S;V')$.

Через $H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)$ позначатимемо простір функцій $z \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ таких, що $z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. Введемо ще простір

$$W_p(S) := \{z \in L^p_{\mathrm{loc}}(S;V) \,\big|\, z' \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S;V')\}. \tag{7}$$

З відомих результатів (див., наприклад, [14], с. 177–179) легко випливає, що $W_p(S) \subset C(S;H)$ і для довільної функції $z \in W_p(S)$ функція $t \to |z(t)|^2$ є абсолютно неперервною на будь-якому відрізку променя S та виконується рівність

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 = 2(z'(t), z(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S. \tag{8}$$

В цій роботі використовуватимемо такі відомі факти.

Твердження 1 (нерівність Гельдера [14, с. 158]). *Нехай $q \in [1,\infty]$, $1/q + 1/q' = 1$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $(t_1 < t_2)$, X — банахів простір, X' — спряжений до X, $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ — дія елемента з X' на елемент з X. Тоді, якщо $v \in L^q(t_1,t_2;X)$ і $w \in L^{q'}(t_1,t_2;X')$, то $\langle w(\cdot), v(\cdot)\rangle_X \in L^1\big(t_1,t_2\big)$ і*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle w(t), v(t)\rangle_X dt \leqslant \|w\|_{L^{q'}(t_1,t_2;X')} \|v\|_{L^q(t_1,t_2;X)}.$$

Твердження 2 ([9, лема 1.1]). *Нехай невід'ємна і абсолютно неперервна на кожному відрізку з S функція w задовольняє диференціальну нерівність*

$$w'(t) + \beta(t)\chi\big(w(t)\big) \leqslant 0 \quad \text{для майже всіх } t \in S,$$

де $\beta \in L^1_{\mathrm{loc}}(S)$, $\beta(t) \geqslant 0$ для майже всіх $t \in S$, $\int_{-\infty} \beta(t)dt = +\infty$, $\chi \in C\big([0,+\infty)\big)$, $\chi(0) = 0$, $\chi(s) > 0$ при $s > 0$ і $\int^{+\infty} \frac{ds}{\chi(s)} < +\infty$. Тоді $w \equiv 0$ на S.

Твердження 3 ([28, с. 173,179]). *Нехай X — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність елементів простору X, яка слабко або $*$-слабко збіжна до v в X. Тоді $\varliminf\limits_{k\to\infty} \|v_k\|_X \geqslant \|v\|_X$.*

Твердження 4 ([2, теорема Обена], [4, с. 393]). *Нехай $q > 1, r > 1$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$ і $\mathcal{W}, \mathcal{L}, \mathcal{B}$ — банахові простори такі, що $\mathcal{W} \overset{c}{\subset} \mathcal{L} \circlearrowleft \mathcal{B}$ (тут $\overset{c}{\subset}$ означає компактне вкладення, а $\circlearrowleft$ — неперервне вкладення). Тоді*

$$\{z \in L^q(t_1, t_2; \mathcal{W}) \mid z' \in L^r(t_1, t_2; \mathcal{B})\} \overset{c}{\subset} \Big(L^q(t_1, t_2; \mathcal{L}) \cap C([t_1, t_2]; \mathcal{B})\Big) \tag{9}$$

Зауваження 1. Вкладення (9) розуміється так, якщо послідовність $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою у просторі $L^q(t_1, t_2; \mathcal{W})$ і послідовність $\{z'_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою у просторі $L^r(t_1, t_2; \mathcal{B})$, то існують функція $z \in L^q(t_1, t_2; \mathcal{L}) \cap C([t_1, t_2]; \mathcal{B})$ і підпослідовність $\{z_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що $z_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ в $C([t_1, t_2]; \mathcal{B})$ і сильно в $L^q(t_1, t_2; \mathcal{L})$.

Твердження 5. *Якщо послідовність $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою у просторі $L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$ і послідовність $\{z'_m\}$ є обмеженою у просторі $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$, то існують функція $z \in L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$, $z' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ і підпослідовність $\{z_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що $z_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$ в $C(S; H)$ і слабко в $L^p_{\mathrm{loc}}(S; V)$, а також, $z'_{m_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} z'$ слабко в $L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$.*

Доведення. З твердження 4 при $q = p$, $r = 2$, $\mathcal{W} = V$, $\mathcal{L} = \mathcal{B} = H$ випливає, що для будь-яких $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ з послідовності звужень членів послідовності $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ на відрізок $[t_1, t_2]$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається в $C([t_1, t_2]; H)$ і слабко в $L^p(t_1, t_2; V)$, а послідовність похідних членів цієї підпослідовності слабко збігається в $L^2(t_1, t_2; H)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ виберемо підпослідовність $\{z_{m(k,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ даної послідовності, яка збігається в $C([-k, 0]; H)$ і слабко в $L^p(-k, 0; V)$ до деякої функції $\widehat{z}_k \in C([-k, 0]; H) \cap L^p(-k, 0; V)$, а послідовність $\{z'_{m(k,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ слабко збігається до її похідної $\widehat{z}'_k$ в $L^2(-k, 0; H)$. При цьому виборі слідкуємо за тим, щоби послідовність $\{z_{m(k+1,j)}\}_{j=1}^{\infty}$ була підпослідовністю послідовності $\{z_{m(k,j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Тепер згідно з діагональним процесом вибираємо потрібну нам підпослідовність у вигляді $\{z_{m(j,j)}\}_{j=1}^{\infty}$, а функцію z визначимо за правилом: для кожного $k \in \mathbb{N}$ приймаємо $z(t) := \widehat{z}_k(t)$ для $t \in (-k, -k+1]$. □

Нехай $\Phi\colon V \to (-\infty, +\infty]$ — власний функціонал, тобто $\Phi \not\equiv 0$, який задовольняє такі умови:

$(\mathcal{A}_1)$ $\quad \Phi\big(\alpha v + (1-\alpha)w\big) \leqslant \alpha\Phi(v) + (1-\alpha)\Phi(w) \quad \forall\, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in [0, 1],$

тобто, Φ є *опуклим*,

$(\mathcal{A}_2)$ $\quad v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ в $V \quad \Longrightarrow \quad \varliminf\limits_{k\to\infty} \Phi(v_k) \geq \Phi(v),$

тобто, Φ є *напівнеперервним знизу*.

Позначимо через $\mathrm{dom}(\Phi) := \{v \in V : \ \Phi(v) < +\infty\}$ *ефективну область визначення* функціоналу Φ.

Нагадаємо, що *субдиференціалом* функціоналу Φ називають відображення $\partial\Phi\colon V \to 2^{V'}$, визначене за правилом

$$\partial\Phi(v) := \{v^* \in V' \mid \Phi(w) \geqslant \Phi(v) + (v^*, w - v) \quad \forall\, w \in V\}, \quad v \in V,$$

а *областю визначення* субдиференціала $\partial\Phi$ — множину $D(\partial\Phi) := \{v \in V \,|\, \partial\Phi(v) \neq \varnothing\}$. Ми ототожнюватимемо субдиференціал $\partial\Phi$ з його графіком, вважаючи, що $[v, v^*] \in \partial\Phi$ тоді і лише тоді, коли $v^* \in \partial\Phi(v)$, тобто, $\partial\Phi = \{[v, v^*] \mid v \in D(\partial\Phi),\ v^* \in \partial\Phi(v))\}$. Р. Рокафеллар у роботі [23, теорема А] довів, що субдиференціал $\partial\Phi$ є *максимальним монотонним оператором*, тобто,

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi$$

і для будь-якого елемента $[v_1, v_1^*] \in V \times V'$ правильна імплікація

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant 0 \quad \forall\, [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi \quad \Longrightarrow \quad [v_1, v_1^*] \in \partial\Phi.$$

Додатково припустимо, що виконуються ще такі умови:

$(\mathcal{A}_3)$ існують сталі $p > 2,\ K_1 > 0$ такі, що

$$\Phi(v) \geqslant K_1\|v\|^p \quad \forall\, v \in \mathrm{dom}(\Phi);$$

крім того, $\Phi(0) = 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ існують сталі $q \in (2, p]$, $K_2 > 0$ такі, що

$$(v_1^* - v_2^*, v_1 - v_2) \geqslant K_2|v_1 - v_2|^q \quad \forall\, [v_1, v_1^*],\ [v_2, v_2^*] \in \partial\Phi.$$

Розглянемо еволюційну варіаційну нерівність

$$y'(t) + \partial\Phi\bigl(y(t)\bigr) \ni f(t), \quad t \in S, \tag{10}$$

де $f\colon S \to V'$ — задана функція.

Означення 1. Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$ — $(\mathcal{A}_3)$ і $f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$. Функцію y називатимемо *розв'язком* варіаційної нерівності (10), якщо вона задовольняє такі умови:

1) $y \in W_p(S)$;

2) $y(t) \in D(\partial\Phi)$ для майже всіх $t \in S$;

3) існує функція $g \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$ така, що для майже всіх $t \in S$ маємо $g(t) \in \partial\Phi\bigl(y(t)\bigr)$ і

$$y'(t) + g(t) = f(t) \quad \text{в } V'.$$

Задачу на знаходження розв'язку варіаційної нерівності (10) при заданих Φ і f називатимемо задачею без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності (10) або, коротко, задачею $\mathbf{P}(\Phi, f)$, а функцію y — її розв'язком.

Зауваження. Задачу $\mathbf{P}(\Phi, f)$ можна замінити на таку. Нехай K — опукла і замкнена множина в V, $A\colon V \to V'$ — монотонний, обмежений і семінеперервний оператор такий, що $(A(v), v) \geq K_1\|v\|^p \quad \forall v \in V$, де $K_1 = \mathrm{const} > 0$. Задача полягає у знаходженні функції $y \in W_p(S)$ такої, що для майже всіх $t \in S$ маємо $y(t) \in K$ і

$$(y'(t) + A(y(t)), v - y(t)) \geq (f(t), v - y(t)) \quad \forall\, v \in K.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$ – $(\mathcal{A}_4)$ *і* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. *Тоді задача* $\boldsymbol{P}(\Phi, f)$ *має єдиний розв'язок і він належить простору* $L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(S;H) \subset C(S;H)$ *та задовольняє оцінки:*

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} |y(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|y(t)\|^p dt \leqslant C_1\, \delta^{-\frac{2}{p-2}} + C_2 \int_{t_1-\delta}^{t_2} |f(t)|^{p'} dt, \tag{11}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]} \|y(t))\|^p + \int_{t_1}^{t_2} |y'(t)|^2 dt \leqslant C_3\, \delta^{-\frac{p}{p-2}} + 2\int_{t_1-\delta}^{t_2} |f(t)|^2 dt + C_4\, \delta^{-1} \int_{t_1-2\delta}^{t_1} |f(t)|^{p'} dt$$
$$\forall t_1, t_2 \in S \ (t_1 < t_2),\ \forall \delta > 0, \tag{12}$$

де $C_i\,(i = \overline{1,4})$ *— додатні сталі, що залежать лише від* K_1, p *і* λ.

Доведення цієї теореми буде дано в розділі 3.

2. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай H_* — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{H_*}$ та нормою $\|\cdot\|_{H_*} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{H_*}}$. Розглядаємо простір $U := \big\{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H_*) \;\big|\; \int_S \omega(t)\|u(t)\|^2_{H_*} dt < \infty\big\}$, де функція ω з простору $C(S)$ така, що $\omega(t) > 0$ $\forall t \in S$. Вважаємо цей простір простором керувань. Він є гільбертовим із скалярним добутком та нормою, відповідно,

$$(u_1,u_2)_U := \int_S \omega(t)(u_1(t),u_2(t))_{H_*} dt, \quad u_1,u_2 \in U,\ \|u\|_U := \left(\int_S \omega(t)\|u(t)\|^2_{H_*} dt\right)^{1/2},\ u \in U.$$

Нехай U_∂ — опукла та замкнена підмножина в U — множина допустимих керувань.

Припустимо, що

$(\mathcal{C})$ $C \in \mathcal{L}\Big(H_*;H\Big)$;

$(\mathcal{F})$ $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$.

Зауважимо, що оператор C (див. умову $(\mathcal{C})$) можна трактувати як оператор $C\colon L^2_{\mathrm{loc}}(S;H_*) \to L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$, визначивши його за правилом: для будь-якого елемента $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H_*)$ під Cu розуміємо елемент з $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$ такий, що $(Cu)(t) = Cu(t)$ для майже кожного $t \in S$. Так введений оператор є лінійним та неперервним. Справді, лінійність цього оператора є очевидною, а з умови $(\mathcal{C})$ випливає, що для майже всіх $t \in S$ та для кожного $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(S;H_*)$ маємо нерівність $|Cu(t)|^2 \le \|C\|^2_{\mathcal{L}(H_*,H)}\|u(t)\|^2_{H_*}$. Проінтегрувавши цю нерівність від t_1 до t_2, де $t_1,t_2 \in S$ — довільні, отримаємо нерівність $\int_{t_1}^{t_2} |Cu(t)|^2 dt \le \|C\|^2_{\mathcal{L}(H_*,H)} \int_{t_1}^{t_2} \|u(t)\|^2_{H_*} dt$, звідки випливає неперервність оператора C.

Стан керованої еволюційної системи $y(u) = y(\cdot;u)$ для заданого керування $u \in U_\partial$ описуємо розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, f + Cu)$, тобто, задачі без початкових умов для еволюційної варіаційної нерівності

$$y'(t) + \partial\Phi\big(y(t)\big) \ni f(t) + Cu(t), \quad t \in S. \tag{13}$$

На підставі теореми 1 маємо тільки одну функцію $y(u)$, яка є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi, f + Cu)$.

Нехай $G\colon C(S;H) \to \mathbb{R}$ — функціонал, який задовольняє умову:

$(\mathcal{G})$ G є напівнеперервним знизу в $C(S;H)$ і, крім того, $\inf\limits_{z\in C(S;H)} G(z) > -\infty$.

Функцію вартості $J\colon U \to \mathbb{R}$ візьмемо у вигляді

$$J(u) := G(y(u)) + \mu\|u\|_U^2, \quad u \in U, \tag{14}$$

де $\mu > 0$ — стала.

Задача оптимального керування, яку ми розглядаємо, полягає у знаходженні елементів $u^* \in U_\partial$ таких, що

$$J(u^*) = \inf_{u \in U_\partial} J(u). \tag{15}$$

Цю задачу коротко називатимемо задачею (15), а її розв'язки — *оптимальними керуваннями.*

Основним результатом цієї праці є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$ *та* $(\mathcal{G})$. *Тоді існує розв'язок задачі* (15).

Доведення цієї теореми дамо в розділі 4.

3. Коректність задачі без початкових умов для нелінійних параболічних включень. Розглянемо питання існування та єдиності розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, f)$, а точніше, доведемо теорему 1.

Єдиність розв'язку. Припустимо, що задача $\mathbf{P}(\Phi, f)$ має більше одного розв'язку і нехай y_1, y_2 — два (різні) розв'язки задачі $\mathbf{P}(\Phi, f)$. Тоді для кожного $i \in \{1, 2\}$ існують функції $g_i \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(S; V')$ такі, що для майже всіх $t \in S$ маємо $g_i(t) \in \partial\Phi\big(y_i(t)\big)$ і

$$y_i'(t) + g_i(t) = f(t) \quad \text{в } V', \ i = 1, 2. \tag{16}$$

Покладемо $z := y_1 - y_2$. З рівностей (16) для майже всіх $t \in S$ отримаємо

$$z'(t) + g_1(t) - g_2(t) = 0 \quad \text{в } V'. \tag{17}$$

Помноживши рівність (17) для майже кожного $t \in S$ скалярно на $z(t)$, дістанемо

$$(z'(t), z(t)) + (g_1(t) - g_2(t), y_1(t) - y_2(t)) = 0. \tag{18}$$

На підставі рівності (8), умови $(\mathcal{A}_4)$ та того, що $g_i(t) \in \partial\Phi(y_i(t))$ $(i = 1, 2)$ для майже всіх $t \in S$, отримаємо таку диференціальну нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d|z(t)|^2}{dt} + K_2\big(|z(t)|^2\big)^{q/2} \leqslant 0 \quad \text{для майже всіх } \ t \in S. \tag{19}$$

З (19), врахувавши, що $q/2 > 1$, та використавши твердження 2, отримаємо рівність $z \equiv 0$ на S, тобто, $y_1 = y_2$ майже всюди на S. Отримане протиріччя завершує доведення єдиності розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, f)$.

Існування розв'язку. Доведення існування розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi, f)$ проведемо у три кроки.

Крок 1 (*апроксимація розв'язку*). Спочатку визначимо функціонал $\Phi_H\colon H \to \mathbb{R}_\infty$ за правилом: $\Phi_H(v) := \Phi(v)$, якщо $v \in V$, і $\Phi_H(v) := +\infty$ в іншому випадку. Відзначимо, що з умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, леми IV.5.2 та твердження IV.5.2 монографії [24] випливає, що Φ_H є власним, опуклим і напівнеперервним знизу функціоналом на просторі H,

$\mathrm{dom}(\Phi_H) = \mathrm{dom}(\Phi) \subset V$ і $\partial\Phi_H = \partial\Phi \cap (V \times H)$, де $\partial\Phi_H \colon H \to 2^H$ — субдиференціал функціонала Φ_H. Крім того, з умови $(\mathcal{A}_3)$ випливає, що $0 \in \partial\Phi_H(0)$.

Тепер побудуємо послідовність функцій, що в певному сенсі апроксимують розв'язок задачі $\mathbf{P}(\Phi, f)$.

Нехай $\widehat{f}_k(t) := f(t)$ для $t \in S_k := [-k, 0]$, де $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу знаходження функції $\widehat{y}_k \in H^1(S_k; H)$ такої, що для майже всіх $t \in S_k$ маємо $\widehat{y}_k(t) \in D(\partial\Phi_H)$ та

$$\widehat{y}_k'(t) + \partial\Phi_H\big(\widehat{y}_k(t)\big) \ni \widehat{f}_k(t) \quad \text{в} \;\; H, \tag{20a}$$
$$\widehat{y}_k(-k) = 0. \tag{20b}$$

Варіаційна нерівність (20a) означає, що існує функція $\widehat{g}_k \in L^2(S_k; H)$ така, що для майже всіх $t \in S_k$ маємо $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi_H(\widehat{u}_k(t))$ і

$$\widehat{y}_k'(t) + \widehat{g}_k(t) = \widehat{f}_k(t) \quad \text{в} \;\; H. \tag{21}$$

Далі використаємо таке твердження.

Твердження 6 ([12, твердження 3.12], [24, твердження IV.5.2])**.** *Нехай $T > 0$, $\widetilde{f} \in L^2(0, T; H)$ і $z_0 \in \mathrm{dom}(\Phi)$. Тоді існує єдина функція $z \in H^1(0, T; H)$ така, що $z(0) = z_0$ і для майже всіх $t \in (0, T)$ правильними є включення $z(t) \in D(\partial\Phi)$ та*

$$z'(t) + \partial\Phi\big(z(t)\big) \ni \widetilde{f}(t) \quad \text{в} \;\; H.$$

З твердження 6 випливає існування єдиного розв'язку задачі (20). Відзначимо, що $D(\partial\Phi_H) \subset \mathrm{dom}(\Phi_H)$, а тому $\widehat{y}_k(t) \in V$ для майже всіх $t \in S_k$. Згідно з означенням субдиференціалу функціоналу і того, що $\widehat{g}_k(t) \in \partial\Phi(\widehat{y}(t))$ для майже всіх $t \in S_k$, маємо

$$\Phi(0) \geq \Phi(\widehat{y}_k(t)) + (\widehat{g}_k(t), 0 - \widehat{y}_k(t)) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S_k.$$

Звідси та з умов $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$(\widehat{g}_k(t), \widehat{y}_k(t)) \geq \Phi(\widehat{y}_k(t)) \geq K_1 \|\widehat{y}_k(t)\|^p \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S_k. \tag{22}$$

Оскільки ліва частина цієї низки нерівностей належить до $L^1(S_k)$, то $\widehat{y}_k$ належить до $L^p(S_k; V)$.

Продовжимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функції $\widehat{f}_k, \widehat{y}_k$ і $\widehat{g}_k$ на весь проміжок S, поклавши їх рівними 0 на $(-\infty, -k]$, і позначимо ці продовження, відповідно, через f_k, y_k та g_k. Зі сказаного вище випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція y_k належить до $L^p(S; V)$, її похідна y_k' належить до $L^2(S; H)$ і для майже всіх $t \in S$ правильними є включення $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ і рівність (див. (21))

$$y_k' + g_k(t) = f_k(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{23}$$

Для того, щоб показати збіжність послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{+\infty}$ до розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi; f)$ нам будуть потрібні деякі оцінки функцій y_k, $k \in \mathbb{N}$.
Крок 2 (*оцінки апроксимуючих розв'язків*).

Нехай $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$ така, що $\theta_1(t) = 0$ при $t \in (-\infty, -1]$, $\theta_1(t) = e^{\frac{t^2}{t^2-1}}$ при $t \in (-1, 0)$, $\theta_1(t) = 1$ при $t \in [0, +\infty)$. Очевидно, що $\theta_1'(t) \geq 0$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ і

$$\sup_{t \in (-1,0)} \frac{\theta_1'(t)}{\theta_1^{\nu}(t)} = C_5(\nu) < \infty \tag{24}$$

для кожного $0 < \nu < 1$, де $C_5(\nu) > 0$ — стала, що залежить лише від ν.

Нехай t_1, $t_2 \in S$ ($t_1 < t_2$), $\delta > 0$ — довільні фіксовані числа. Покладемо

$$\theta(t) := \theta_1((t-t_1)/\delta) \quad \forall t \in S.$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Очевидно, що $\theta y_k \in L^2(S;H)$. Домножимо (23) скалярно на θy_k та проінтегруємо за t від $t_1-\delta$ до $\tau \in [t_1,t_2]$. У результаті отримаємо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(y_k'(t), y_k(t))dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k(t))dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k(t))dt.$$

Звідси, використавши рівність (8), матимемо

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\frac{d}{dt}|y_k(t)|^2dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k(t))dt = 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k(t))dt. \tag{25}$$

Інтегруючи частинами перший доданок лівої частини рівності (25), дістанемо

$$|y_k(\tau)|^2 + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k(t))dt = \int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta'(t)|y_k(t)|^2dt + 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k(t))dt. \tag{26}$$

Враховуючи означення y_k та (22), отримаємо, що

$$(g_k(t), y_k(t)) \geq \Phi\big(y_k(t)\big) \geq K_1\|y_k(t)\|^p \quad \text{для майже всіх } t \in S. \tag{27}$$

Оцінимо другий доданок лівої частини рівності (26), використовуючи (27), у такий спосіб

$$2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k(t))dt \geqslant 2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Phi\big(y_k(t)\big)dt \geqslant \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Big(\Phi\big(y_k(t)\big) + K_1\|y_k(t)\|^p\Big)dt. \tag{28}$$

Оцінимо тепер перший доданок правої сторони рівності (26), використовуючи (4), (24) та нерівність Юнга

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)|y_k(t)|^2dt \leqslant \lambda^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta'(t)\|y_k(t)\|^2dt = \lambda^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1} \frac{\theta'(t)}{\theta^{2/p}(t)}\theta^{2/p}(t)\|y_k(t)\|^2dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta(t)\|y_k(t)\|^pdt + C_6\varepsilon^{-\frac{2}{p-2}}\int_{t_1-\delta}^{t_1} \big(\theta'(t)\theta^{-2/p}(t)\big)^{\frac{p}{p-2}}dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_{t_1-\delta}^{t_1} \theta(t)\|y_k(t)\|^pdt + C_7\,(\delta\varepsilon)^{-\frac{2}{p-2}}, \tag{29}$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, λ — стала з нерівності (4), а C_6 і C_7 — додатні сталі, що залежать лише від λ і p.

Тепер оцінимо другий доданок правої сторони рівності (26), застосовуючи нерівність Юнга та нерівність (6). У результаті отримаємо

$$2\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k(t))dt \leqslant \eta\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\|y_k(t)\|^pdt + C_8\eta^{\frac{1}{1-p}}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|f_k(t)|^{p'}dt, \tag{30}$$

де $C_8 > 0$ — стала, що залежить тільки від p і λ.

З (26), використовуючи (28)–(30) при $\varepsilon = \eta = K_1/4$, отримаємо

$$|y_k(\tau)|^2 + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\Big(\Phi\big(y_k(t)\big) + \|y_k(t)\|^p\Big)dt \leqslant C_9\delta^{-\frac{2}{p-2}} + C_{10}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|f_k(t)|^{p'}dt,$$

де C_9 та C_{10} — деякі додатні сталі, що залежать лише від K_1, p і λ.

Звідси, в силу довільності $\tau \in [t_1, t_2]$ і означення θ, отримаємо

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} |y_k(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|y_k(t)\|^p dt + \int_{t_1}^{t_2} \Phi\big(y_k(t)\big)dt \leqslant 2\,C_9\delta^{-\frac{2}{p-2}} + 2\,C_{10}\int_{t_1-\delta}^{t_2} |f_k(t)|^{p'}dt. \quad (31)$$

З (31) та означення функції f_k, в силу довільності t_1, $t_2 \in S$ та $\delta > 0$, випливає, що

$$\text{послідовність } \{y_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; H) \text{ і в } L^p_{\mathrm{loc}}(S; V), \quad (32)$$

$$\text{послідовність } \big\{\Phi\big(y_k(\cdot)\big)\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^1_{\mathrm{loc}}(S). \quad (33)$$

Тепер знайдемо оцінки функцій y_k', $k \in \mathbb{N}$. Нехай t_1, t_2 і δ — довільні дійсні числа такі, що t_1, $t_2 \in S$, $t_1 < t_2$, і $\delta > 0$, θ — така ж функція, як вище. Домножимо (23) скалярно на функцію $\theta y_k' \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ та проінтегруємо отриману рівність за t від $t_1 - \delta$ до $\tau \in [t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|y_k'(t)|^2 dt + \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k'(t))dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k'(t))dt. \quad (34)$$

Використаємо таке твердження

Твердження 7 ([24, лема IV.4.3])**.** *Нехай $z \in H^1(a, b; H)$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, і існує функція $g \in L^2(a, b; H)$ така, що $g(t) \in \partial\Phi\big(z(t)\big)$ для майже всіх $t \in (a, b)$. Тоді функція $\Phi\big(z(\cdot)\big)$ — абсолютно неперервна на відрізку $[a, b]$ і для будь-якої функції $h\colon [a, b] \to H$ такої, що $h(t) \in \partial\Phi\big(z(t)\big)$, виконується рівність*

$$\frac{d}{dt}\Phi\big(z(t)\big) = (h(t), z'(t)) \quad \text{для майже всіх } t \in (a, b).$$

Врахувавши, що $g_k \in L^2(t_1 - \delta, t_2; H)$, з рівності (34) і твердження 7 випливає, що функція $\Phi_H\big(y_k(\cdot)\big)$ є абсолютно неперервною на $[t_1 - \delta, t_2]$ і

$$\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big) = (g_k(t), y_k'(t)) \quad \text{для майже всіх } t \in (t_1 - \delta, t_2). \quad (35)$$

Використовуючи (35), можемо оцінити другий доданок лівої частини рівності (34):

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(g_k(t), y_k'(t))dt = \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)\frac{d}{dt}\Phi_H\big(y_k(t)\big)dt = \Phi_H\big(y_k(\tau)\big) - \int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta'(t)\Phi_H\big(y_k(t)\big)dt \geqslant$$

$$\geqslant \Phi_H\big(y_k(\tau)\big) - \max_{t\in[t_1-\delta,t_1]} \theta'(t)\int_{t_1-\delta}^{t_1} \Phi_H\big(y_k(t)\big)dt. \quad (36)$$

Тепер, використовуючи нерівність Коші, оцінимо праву частину рівності (34)

$$\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)(f_k(t), y_k'(t))dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|f_k(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{t_1-\delta}^{\tau} \theta(t)|y_k'(t)|^2 dt. \quad (37)$$

З (34), врахувавши (36), (37) і те, що

$$\max_{t\in[t_1-\delta,t_1]}\theta'(t)\le C_{12}/\delta,\quad \text{де}\quad C_{12}:=\max_{s\in[-1,0]}\theta_1'(s),$$

матимемо оцінку

$$\int_{t_1}^{\tau}|y_k'(t)|^2dt+\Phi_H\big(y_k(\tau)\big)\leqslant\int_{t_1-\delta}^{\tau}|f_k(t)|^2dt+2C_{12}\delta^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1}\Phi_H\big(y_k(t)\big)dt.$$

Звідси, врахувавши довільність $\tau\in[t_1,t_2]$, означення функціоналу Φ_H і умову $(\mathcal{A}_3)$ (нагадаємо, що $y_k(t)\in V$ для майже всіх $t\in S$) маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]}||y_k(t)||^p+\int_{t_1}^{t_2}|y_k'(t)|^2dt\leqslant 2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f_k(t)|^2\,dt+4C_{12}\delta^{-1}\int_{t_1-\delta}^{t_1}\Phi\big(y_k(t)\big)dt. \tag{38}$$

З (38), врахувавши (31), отримаємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]}\|y_k(t))\|^p+\int_{t_1}^{t_2}|y_k'(t)|^2dt\leqslant C_3\,\delta^{-\frac{p}{p-2}}+2\int_{t_1-\delta}^{t_2}|f_k(t)|^2dt+$$
$$+C_4\,\delta^{-1}\int_{t_1-2\delta}^{t_1}|f_k(t)|^{p'}dt. \tag{39}$$

З оцінки (39) та означення f_k, в силу довільності чисел t_1, $t_2\in S$ та $\delta>0$, випливає, що

$$\text{послідовність } \big\{y_k\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V), \tag{40}$$
$$\text{послідовність } \big\{y_k'\big\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{41}$$

З (23), (41) та означення функції f_k отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{+\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{42}$$

Крок 3 (*граничний перехід*). Оскільки V — рефлексивний банахів простір, а H — гільбертів простір, причому V вкладено в H компактно, то з (32), (40)–(42) і твердження 5 випливає, що існують функції $y\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V)\cap H^1_{\mathrm{loc}}(S;H)\in C(S;H)$, $g\in L^2(S;H)$ та підпослідовність підпослідовності $\{y_k,g_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (за якою ми збережемо позначення $\{y_k,g_k\}_{k=1}^{+\infty}$) такі, що

$$y_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}y\quad *\text{-слабко в } L^\infty_{\mathrm{loc}}(S;V),\ \text{слабко в } L^p_{\mathrm{loc}}(S;V)\ \text{ і слабко в } H^1_{\mathrm{loc}}(S;H), \tag{43}$$
$$y_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}y\quad \text{в } C(S;H), \tag{44}$$
$$g_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}g\quad \text{слабко в } L^2_{\mathrm{loc}}(S;H). \tag{45}$$

Нехай $v\in H,\varphi\in D(-\infty,0)$ — довільні. Для майже всіх $t\in S$ помножимо рівність (23) на v, а потім отриману рівність помножимо на φ і проінтегруємо за t по S. У результаті отримаємо рівність

$$\int_S(y_k'(t),v)\varphi(t)dt+\int_S(g_k(t),v)\varphi(t)dt=\int_S(f_k(t),v)\varphi(t)dt,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{46}$$

Перейдемо в (46) до границі при $k \to \infty$, врахувавши при цьому (43), (45) і збіжність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ до f в $L^2_{\mathrm{loc}}(S;H)$. У результаті, врахувавши, що $v \in H, \varphi \in D(-\infty,0)$ — довільні, отримаємо для майже всіх $t \in S$ рівність

$$y'(t) + g(t) = f(t) \quad \text{в } H.$$

Для завершення доведення теореми залишилося показати, що $y(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ для майже всіх $t \in S$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ — яке-небудь число. Оскільки $g_k(t) \in \partial\Phi_H\big(y_k(t)\big)$ для кожного $t \in S\setminus\tilde{S}_k$, де $\tilde{S}_k \subset S$ — множина нульової міри, то з монотонності субдиференціалу $\partial\Phi_H$ випливає, що для всіх $t \in S \setminus \tilde{S}_k$ виконується нерівність

$$(g_k(t) - v^*, y_k(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\,[v,v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{47}$$

Нехай $\tau \in S$, $h > 0$ — довільні числа. Проінтегруємо (47) за t від $\tau - h$ до τ:

$$\int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(t) - v^*, y_k(t) - v)dt \geqslant 0 \quad \forall\,[v,v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{48}$$

Перейдемо тепер в (48) до границі при $k \to \infty$, використовуючи при цьому (44) і (45). У результаті отримаємо

$$0 \le \int_{\tau-h}^{\tau} (g_k(\tau) - v^*, y_k(t) - v)dt \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\tau-h}^{\tau} (g(t) - v^*, y(t) - v)dt \ge 0 \;\forall\,[v,v^*] \in \partial\Phi_H. \tag{49}$$

З монографії [28, теорема 2, с. 192] і (49) випливає, що для кожного $[v,v^*] \in \partial\Phi_H$ існує множина $R_{[v,v_*]} \subset S$ нульової міри така, що для всіх $\tau \in S \setminus R_{[v,v_*]}$ маємо

$$0 \le \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} \big(g(t) - v^*, y(t) - v\big)dt = \big(g(\tau) - v^*, y(\tau) - v\big) \ge 0. \tag{50}$$

Покажемо, що існує множина нульової міри $R \subset S$ така, що для будь-якого $\tau \in S \setminus R$ нерівність (50) виконується для всіх $[v,v^*] \in \partial\Phi_H$. Оскільки V та V' — сепарабельні простори, то існує зліченна множина $F \subset \partial\Phi_H$, яка є щільною в $\partial\Phi_H$. Позначимо $R := \bigcup_{[v,v^*]\in F} R_{[v,v_*]}$. Оскільки множина F зліченна, а зліченне об'єднання множин міри нуль є множиною міри нуль, то R має нульову міру. Отож, для будь-якого $\tau \in S\setminus R$ нерівність (50) виконується для всіх $[v,v^*] \in F$. Нехай $[v,v^*]$ — довільний елемент з $\partial\Phi_H$. Тоді зі щільності F у $\partial\Phi_H$ маємо існування послідовності $\{[v_l,v_l^*]\}_{l=1}^{\infty}$ такої, що $v_l \to v$ у V, $v_l^* \to v^*$ у V' та для будь-якого $\tau \in S \setminus R$ виконується

$$(g(\tau) - v_l^*, y(\tau) - v_l) \geqslant 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $l \to \infty$, отримаємо (50) для кожного $t \in S\setminus R$, що треба було показати. Отож, для майже всіх $t \in S$ маємо

$$(g(t) - v^*, y(t) - v) \geqslant 0 \quad \forall\,[v,v^*] \in \partial\Phi_H.$$

Звідси, в силу максимальної монотонності $\partial\Phi_H$, випливає, що $[y(t), g(t)] \in \partial\Phi_H$ для майже всіх $t \in S$.

Оцінки (11), (12) розв'язку задачі $\mathbf{P}(\Phi; f)$ безпосередньо випливають з оцінок (31) і (39), збіжностей (43) і (44) та твердження 3.

4. Обґрунтування основного результату. Доведемо теорему 2. Оскільки функція вартості J є обмеженою знизу, то існує мінімізуюча послідовність елементів $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ з U_∂, тобто, $J(u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} J_* := \inf\limits_{u\in U_\partial} J(u) > -\infty$. Звідси, випливає, що послідовність $\big\{J(u_k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою. З цього, беручи до уваги (14), отримуємо, що послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою в просторі U, тобто,

$$\|u_k\|_U \le C_{13} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{52}$$

де стала $C_{13} > 0$ не залежить від k.

Оскільки $C \in \mathcal{L}(H_*; H)$, то послідовність $\{Cu_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою в просторі $L^2_{\rm loc}(S; H)$. Справді, враховуючи (52), для довільних $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ маємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} |Cu_k(t)|^2 dt \le \|C\|_{\mathcal{L}(H_*;H)} \int\limits_{t_1}^{t_2} \|u_k\|_{H_*} dt \le$$
$$\le \|C\|_{\mathcal{L}(H_*;H)} \sup_{t\in[t_1,t_2]} (1/\omega(t)) \int_S \omega(t)\|u_k(t)\|^2 dt \le C_{14}\|u_k\|_U \le C_{15}, \tag{53}$$

де C_{14}, C_{15} — додатні сталі, що не залежать від k.

Нехай для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $y_k := y(u_k)$ є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi; f + Cu_k)$, тобто, правильна така варіаційна нерівність

$$y_k'(t) + \partial\Phi\big(y_k(t)\big) \ni f(t) + Cu_k(t), \quad t \in S. \tag{54}$$

Згідно з означенням 1 та теоремою 1, враховуючи умови $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{F})$, для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо, що $y_k \in L^\infty_{\rm loc}(S; V) \cap H^1_{\rm loc}(S; H) \subset C(S; H)$, $y_k(t) \in D(\partial\Phi)$ для майже всіх $t \in S$, а також існує функція $g_k \in L^{p'}_{\rm loc}(S; H)$ така, що для майже всіх $t \in S$ маємо $g_k(t) \in \partial\Phi(y_k(t))$ і

$$y_k'(t) + g_k(t) = f(t) + Cu_k(t) \quad \text{в} \quad H. \tag{55}$$

Крім того, для довільних $t_1, t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$ (при $\delta = 1$) правильні оцінки

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} |y_k(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \|y_k(t)\|^p dt \leqslant C_1 + C_2 \int_{t_1-1}^{t_2} \big(|f(t)| + |Cu_k(t)|\big)^{p'} dt, \tag{56}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[t_1,t_2]} \|y_k(t))\|^p + \int_{t_1}^{t_2} |y_k'(t)|^2 dt \leqslant C_3 + 2\int_{t_1-1}^{t_2} \big(|f(t)| + |Cu_k(t)|\big)^2 dt +$$
$$+ C_4 \int_{t_1-2}^{t_1} \big(|f(t)| + |Cu_k(t)|\big)^{p'} dt \qquad \forall t_1, t_2 \in S \ (t_1 < t_2), \tag{57}$$

де C_i $(i = \overline{1,4})$ — додатні сталі, що залежать лише від K_1, p і λ.

З оцінок (53), (56) і (57) отримуємо, що

$$\text{послідовність } \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ обмежена в } L^\infty(S; V), \tag{58}$$
$$\text{послідовність } \{y_k'\}_{k=1}^{\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\rm loc}(S; H). \tag{59}$$

З (55), враховуючи (53), (59) і $(\mathcal{F})$, маємо, що

$$\text{послідовність } \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ обмежена в } L^2_{\rm loc}(S; H). \tag{60}$$

Оскільки V і H є рефлексивними просторами, то з (52), (58), (59), (60), враховуючи твердження 4, отримуємо існування підпослідовності послідовності $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ (за цією підпослідовністю залишаємо позначення $\{u_k, y_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$) і функцій $u^* \in U_\partial$, $y \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; V) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(S; H) \subset C(S; H)$ та $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(S; H)$ таких, що

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u^* \quad \text{слабко в} \quad U, \tag{61}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad *\text{-слабко в} \;\; L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; V), \quad \text{слабко в} \;\; H^1_{\mathrm{loc}}(S; H), \tag{62}$$

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \text{в} \quad C(S; H), \tag{63}$$

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(S; H). \tag{64}$$

Перейдемо в (55) до границі при $k \to \infty$, врахувавши при цьому (61)–(64), аналогічно, як ми це робили у випадку рівності (23). У результаті для майже всіх $t \in S$ отримаємо рівність

$$y'(t) + g(t) = f(t) + Cu^*(t) \quad \text{в } H.$$

Аналогічно як при доведенні теореми 1 показуємо, що $y(t) \in D(\partial\Phi)$ і $g(t) \in \partial\Phi\big(y(t)\big)$ для майже всіх $t \in S$. Отож, функція y є розв'язком задачі $\mathbf{P}(\Phi; f + Cu^*)$.

Залишилось показати, що u^* є мінімізуючим елементом функціоналу J. Справді, оскільки функціонал G є напівнеперервним знизу в $C(S; H)$, то з (63) випливає, що

$$\varliminf_{k\to\infty} G(y_k) \geq G(y). \tag{65}$$

Також з (62) і твердження 3 маємо

$$\varliminf_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq \|u^*\|_U. \tag{66}$$

З (14), (65), (66) випливає

$$J_* = \lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq \varliminf_{k\to\infty} G(y_k) +, \;\mu \varliminf_{k\to\infty} \|u_k\|_U \geq J(u^*).$$

Отже, ми показали, що u^* є розв'язком задачі (15), тобто, є оптимальним керуванням.

ЛІТЕРАТУРА

1. David R. Adams, Suzanne Lenhart, *Optimal control of the obstacle for a parabolic variational inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **268** (2002), 602–614.
2. J.-P. Aubin, *Un theoreme de compacite*, Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences, **256** (2007), №24, 5042–5044.
3. V. Barbu, Optimal Control of Variational Inequalities, London: Pitman, 1983.
4. F. Bernis, *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains*, Math. Ann., **279** (1988), 373–394.
5. M. Bokalo, *Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities*, Nonlinear boundary problem, **8** (1998), 58–63.
6. B. Mykola, L. Alfredo, *Linear evolution first-order problems without initial conditions*, A. Milan J. Math., **77** (2009), 437–494.

7. M. Bokalo, A. Tsebenko, *Existence of optimal control in the coefficients for problem without initial condition for strongly nonlinear parabolic equations*, Mat. Stud. **45** (2010), 40–56.
8. M. Bokalo, *Optimal control of evolution systems without initial conditions*, Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics, **73** (2010), 85–113.
9. M. Bokalo, *Problem without initial conditions for some classes of nonlinear parabolic equations*, N.M. J. Math. Sci., **51** (1990), 2291–2322.
10. M. Boukrouche, D.A. Tarzia, *Existence, uniqueness, and convergence of optimal control problems associated with parabolic variational inequalities of the second kind*, arXiv:1309.4869v1 [math.AP], 2013.
11. H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011.
12. H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Amsterdam, London: North-Holland Publishing Comp., 1973.
13. O. Buhrii, *Some parabolic variational inequalities without initial conditions*, Visnyk of the Lviv University, Series Mechanics and Mathematics. **49** (1998), 113–121.
14. H.Gayevskyy, K. Greger, K. Zaharias, Nonlinear operator equations and operator differential equations. – M.: Mir, 1978.
15. S.D. Ivasishen, *Parabolic boundary problems without initial conditions*, Ukr. Mat. Zh., **34** (1982), №5, 547–552.
16. I. Kazufumi, K. Kunisch, *Optimal control of parabolic variational inequalities*, J. Math. Pures Appl., **93** (2010), 329–360.
17. O. Kogut, *On optimal control problem in coefficients for nonlinear elliptic variational inequalities*, Visnik Dnipropetrovskogo Universitetu. Seria Modeluvanna, **19** (2011), №8, 86–98.
18. S. Lavrenyuk, M. Ptashnyk, *Problem without initial conditions for a nonlinear pseudoparabolic system*, Differential Equations, **36** (2000), №5, 739–748.
19. J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires, Paris (France): Dunod Gauthier-Villars, 1969.
20. O. Oleinik, G. Iosifjan, *Analog of Saint-Venant's principle and uniqueness of solutions of the boundary problems in unbounded domain for parabolic equations*, Usp. Mat. Nauk., **31** (1976), №6, 142–166.
21. A. Pankov, Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations, Kluwer, Dordrecht, 1990.
22. P. Pukach, *On problem without initial conditions for some nonlinear degenarated parabolic system*, Ukrainian Math. J., **46** (1994), №4, 484–487.
23. R. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math., **33** (1970), №1, 209–216.
24. R. Showalter, Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations, volume 49 of Mathematical Surveys and Monographs, Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – xiv+278 p.
25. R. Showalter, *Singular nonlinear evolution equations*, Rocky Mountain J. Math., **10** (1980), №3, 499–507.
26. A. Tikhonov, A. Samarskii, Equations of mathematical physics, M.: Nauka, 1972.
27. A. Tychonoff *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Mat. Sb., **42** (1935), №2, 199–216.
28. K. Yoshida, Functional Analysis, Mir, Moscow, 1967.

Ivan Franko National University of Lviv
mm.bokalo@gmail.com

Надійшло 23.12.2016