Математичні Студії. Т.46, №2 Matematychni Studii. V.46, No.2

УДК 519.9

М. В. Плахотник

ПОХІДНА ГОМЕОМОРФІЗМУ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ПАРИ ТЕНТОПОДІБНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ІНТЕРВАЛУ В РАЦІОНАЛЬНИХ ТОЧКАХ

M. V. Plakhotnyk. *Derivative of the conjugacy for the pair of tentlike mappings of interval at rational points*, Mat. Stud. **46** (2016), 196–202.

It is studied the conjugacy $h = h_v$, for the tent-like mappings $f_{1/2}$ and $f_v\colon [0,\,1] \to [0,\,1]$, $v \in (0,\,1)$, where the function f_v is linear at each of intervals $[0,\,v]$ and $[v,\,1]$, $f_v(0) = f_v(1) = 0$, $f_v(v) = 1$, i.e. we consider the homeomorphism $h\colon [0,\,1] \to [0,\,1]$ such that $h \circ f = f_v \circ h$. We prove the differentiability of h at all rational points.

1. Вступ У цій статті ми продовжуємо розпочате в [2] дослідження диференційовності гомеоморфізму h, який задає топологічну спряженість відображень

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \le x \le 0,5,\\ 2-2x & \text{при } 0,5 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{та відображення } f_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{v} & \text{при } 0 \le x \le v,\\ \frac{1-x}{1-v} & \text{при } v \le x \le 1, \end{cases}$$

тобто, h відображає інтервал $[0,1]$ в себе і задовольняє рівність $h \circ f = f_v \circ h$.

В [1] показано, що f топологічно спряжене з відображенням f_v для кожного $v \in (0,1)$, причому гомеоморфізм спряження зростає і єдиний. В [2] ми встановили, що $h'(x) = 0$ майже скрізь та дослідили питання про існування та значення похідної $h'(x)$ в двійково раціональних точках інтервалу $[0,\,1]$. У даній статті твердження з [2] узагальнено на всі раціональні точки інтервалу $[0,\,1]$.

В одновимірній динаміці широко відомий факт (див., наприклад, [5, c.14]) про топологічну спряженість згаданого відображення f та відображення $\tilde{f}(x) = 4x(1-x)$. Відображення $\tilde{h}$, яке визначає топологічну спряженість відображень f та $\tilde{f}$, задається формулою $\tilde{h}(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$.

Зазначимо, що топологічна спряженість неперервних відображень інтервалу в себе вивчалась в [6]. В цій роботі описано класи топологічно спряжених відображень, напівгрупа ітерацій яких є скінченною групою.

2. Попередні відомості. Нагадаємо, що за класичною теоремою Лебега (див. напр. [3, c.15], [7]), будь-яка монотонна функція має скінченну похідну майже скрізь, тобто, скрізь, за винятком можливо множини лебегової міри 0.

В [8] доведено таку властивість гомеоморфізму спряження.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 37C15, 37C80.
Keywords: conjugacy; tent-like mapping.
doi:10.15330/ms.46.2.196-202

Твердження 1 ([8], твердж. 2). *Для гомеоморфізму h, який визначає спряження відображень f та f_v при $v \neq 1/2$ похідна $h'(x)$ існує майже скрізь за мірою Лебега при $x \in [0, 1]$, причому $h'(x) = 0$ завжди, коли похідна $h'(x)$ скінченна.*

Через A_n позначимо множину розв'язків рівняння $f^n(x) = 0$, де степінь відображення означає його ітерацію, тобто композицію з собою. Через B_n також позначимо множину розв'язків рівняння $f_v^n(x) = 0$.

В [1] доведено, що $A_n = \left\{0, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, 1\right\}$, а також що гомеоморфізм спряження зростає та встановлює взаємно однозначну відповідність між A_n та B_n.

Для кожного $n \geq 0$ розглянемо зростаючий кусково-лінійний гомеоморфізм h_n, для якого справджується рівність $h_n(A_n) = B_n$ та який не має інших точок зламу, крім, можливо, точок з A_n.

При доведенні леми 10 в [1], доведено таке твердження.

Лема 1. *Нехай $n > 1$ і $0 = \beta_0, \dots \beta_{2^{n-1}} = 1$ – точки множини B_n. Тоді, для кожного i такого, що $\beta_i \in B_n \setminus B_{n-1}$ справджуються такі твердження:*
1. $i \neq 0$, $i \neq 2^{n-1}$;
2. $\beta_{i-1} \in B_{n-1}$, $\beta_{i+1} \in B_{n-1}$;
3. $\left\{\frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{\beta_{i+1} - \beta_{i-1}}, \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\beta_{i+1} - \beta_{i-1}}\right\} = \{v, 1 - v\}$.

Позначимо $v_1 = \min\{v, 1 - v\}$ та $v_2 = \max\{v, 1 - v\}$. З частини 3 леми 1, випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Для $n, t \in \mathbb{N}$ зафіксуємо дві сусідні точки β_i, β_{i+1} множини B_{n+t}, які не належать до B_n. Нехай $a, b \in B_n$ такі сусідні точки множини B_n, що $\beta_i, \beta_{i+1} \in (a, b)$. Тоді,*
$$v_1^t(b - a) \leq \beta_{i+1} - \beta_i \leq v_2^t(b - a).$$

Нехай A — множина раціональних чисел з інтервалу $[0, 1]$, знаменник яких є степенем двійки (двійково раціональних чисел). В [2] доведено ряд тверджень про похідну гомеоморфізму h та границю похідних його апроксимацій h_n.

Лема 2 ([2], леми 11–13). *Для кожного $v > 1/2$ та довільного $x_0 \in A \setminus \{1\}$ існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0-) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0+) = \infty$ та $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(1) = 0$. Для кожного $v < 1/2$ та довільного $x_0 \in A \setminus \{1\}$ існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0-) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0+) = 0$ та $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(1) = \infty$.*

Нехай двійковий запис числа $x_0 \notin A$ має вигляд $x_0 = 0, x_1 x_2 \dots x_k \dots$ Позначимо
$$\begin{cases} \alpha_2 = 2v & x_1 = 0, \\ \alpha_2 = 2(1 - v) & x_1 = 1. \end{cases}$$

Також для кожного $i > 2$ позначимо
$$\alpha_i = \begin{cases} 2v & \text{якщо } x_{i-1} = x_{i-2} \\ 2(1 - v) & \text{якщо } x_{i-1} \neq x_{i-2}. \end{cases}$$

Лема 3 ([2], лема 14). *Якщо добуток $\mathcal{P} = \prod_{i=2}^{\infty} \alpha_i$ збігається, то границя $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0)$ існує, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0) = \mathcal{P}$. Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{i=2}^{n} \alpha_i$ не існує, то границя $\lim\limits_{n\to\infty} h_n'(x_0)$ також не існує.*

Зауважимо, що в позначеннях леми 3 для кожного $x_0 \notin A$ справджується рівність $h'_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod_{i=2}^{n} \alpha_i$, яка випливає з Леми 1. Звернемо увагу, що нескінченний добуток $\mathcal{P}$ залежить від точки x_0 та від того, чи $v > 0,5$, а чи $v < 0,5$, але не залежить від конкретного значення v, при цьому добуток $\mathcal{P}$ якщо існує, то дорівнює або 0, або ∞.

Твердження 2 ([2], леми 15, 16)**.** *Для кожного $v \neq 1/2$ та кожного $x_0 \in A$ похідна $h'(x_0)$ існує, при цьому $h'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} h'_n(x_0)$.*

3. Основний результат. Основним результатом цієї статті є така теорема, твердження якої узагальнює твердження 2 на всі раціональні точки відрізка [0, 1].

Теорема 1. *Нехай $x_0 \in [0,\, 1] \cap \mathbb{Q}$. Тоді похідна $h'(x_0)$ існує. Крім того, якщо $v < 1/2$, то $h'(x_0) = \infty$, а якщо $v > 1/2$, то $h'(x_0) = 0$.*

Доведення. Враховуючи лему 2, можемо обмежитись випадком $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash A$. Розглянемо двійковий запис числа x_0. Оскільки $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash A$, то

$$x_0 = 0, x_1 x_2 \ldots\, x_p(x_{p+1} \ldots x_{p+t}), \tag{1}$$

де $x_{p+1} \ldots x_{p_t}$ — періодична частина двійкового запису x_0, причому не всі цифри цієї періодичної частини однакові, бо інакше $x_0 \in A$. Зауважимо, що послідовність чисел $x_{p+1}, \ldots, x_{p+t}$, як періодична частина числа x_0, визначена не однозначно, позаяк ми маємо свободу у виборі номера двійкової цифри, з якої починається періодична частина.

Для довільної послідовності $\{s_n\}$, яка збігається до x_0, розглянемо числа

$$k(s_n) = \frac{h(x_0) - h(s_n)}{x_0 - s_n}.$$

Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$. Для кожного номера s позначимо $\alpha_{n,s}$ — найближчий зліва від x_0 елемент множини A_s та $\alpha^+_{n,s}$ — найближчий справа від x_0 елемент множини A_s. Виберемо таке максимальне s_0, що $s_n \in [\alpha_{n_{s_0}},\, \alpha^+_{n_{s_0}}]$. З максимальності s_0 та того, що $x_0 \notin A$, маємо, що x_0 та s_n належать до різних "половин" проміжка $[\alpha_{n_{s_0}},\, \alpha^+_{n_{s_0}}]$, бо інакше, можна збільшувати s_0 доти, аж поки число $\frac{\alpha_{n_{s_0}} + \alpha^+_{n_{s_0}}}{2}$ не опиниться між x_0 та s_n (незалежно від того, чи $x_0 < s_n$, чи $x_0 > s_n$). Надалі будемо писати α_n та α^+_n замість $\alpha_{n,s}$ та $\alpha^+_{n,s}$, відповідно.

На рисунку 1 нанесено точки $P(\alpha_n,\, h(\alpha_n))$, $P^+(\alpha^+_n,\, h(\alpha^+_n))$ та $X_0(x_0,\, h(x_0))$ для випадку $t = 2$, $x_{k+1} = 1$, $x_{k+2} = 0$. Оскільки $t = 2$, то відрізок $x \in (\alpha_n,\, \alpha^+_n)$ поділено на $2^t = 4$ частини вертикальними прямими. Оскільки $x_{k+1} = 1$, то x_0 знаходиться правіше за середину відрізка $(\alpha_n,\, \alpha^+_n)$, а оскільки $x_{k+2} = 0$, то x_0 розташоване лівіше від середини відрізка $(\frac{\alpha_n + \alpha^+_n}{2},\, \alpha^+_n)$. Проміжні вертикальні та горизонтальні лінії на рисунку 1 відповідають значенням з множин A_{s+t} та B_{s+t}.

Позначимо $\widetilde{\alpha}_n$ та $\widetilde{\alpha}^+_n$ ліву та праву найближчу до x_0 точки множини $A_{p+(n+1)t+1}$. На рисунку 1 точки з координатами $(\widetilde{\alpha}_n,\, h(\widetilde{\alpha}_n))$ та $(\widetilde{\alpha}^+_n,\, h(\widetilde{\alpha}^+_n))$ позначено кружечками.

Припустимо, що для деякого n виконується $s_n \in [\alpha_n,\, \widetilde{\alpha}_n]$. Оцінимо значення $k(s_n)$ і використовуючи цю оцінку, доведемо твердження теореми для лівої похідної $h'_-(x_0)$. Доведення твердження теореми для правої похідної $h'_+(x_0)$ здійснюється подібно.

На рисунку 2 нанесено прямі, кутові коефіцієнти яких обмежують $k(s_n)$, бо точка з координатами $(s_n,\, h(s_n))$ міститься у заштрихованому прямокутнику за умови, що $s_n \in [\alpha_n,\, \widetilde{\alpha}_n]$.

Рис. 1: Рис. 2:

Розглянемо множину A_{s+2t} для точок відрізка $(\widetilde{\alpha}_n,\, \widetilde{\alpha}_n^+)$ та відповідні до цієї множини точки множини B_{s+2t}, і зобразимо ці множини на рисунку 3 в спосіб, подібний до того, як було побудовано рисунок 1.

Позначимо через $\widehat{\alpha}_n$ та $\widehat{\alpha}_n^+$ точки множини A_{s+2t}, найближчі до x_0 зліва та справа, відповідно. На рисунку 3 також нанесено точки C, D, R, S з координатами $C(\widetilde{\alpha}_n,\, h(\alpha_n))$, $D(\widehat{\alpha}_n,\, h(\widehat{\alpha}_n^+))$, $R(\alpha_n,\, h(\widetilde{\alpha}_n))$, $S(\widehat{\alpha}_n^+,\, h(\widehat{\alpha}_n))$. Позначимо

$$k_{CD} = \frac{h(\alpha_n^+) - h(\alpha_n)}{\widehat{\alpha}_n - \widetilde{\alpha}_n} \tag{2}$$

та

$$k_{RS} = \frac{h(\widehat{\alpha}_n) - h(\widetilde{\alpha}_n)}{\alpha_n^+ - \alpha_n} \tag{3}$$

кутові коефіцієнти прямих CD та RS, відповідно. Для випадку $s_n \in [\alpha_n,\, \widetilde{\alpha}_n]$ виконуються нерівності

$$\frac{h(\widehat{\alpha}_n) - h(\widetilde{\alpha}_n)}{\alpha_n^+ - \alpha_n} < \frac{h(x_0) - h(s_n)}{x_0 - s_n} < \frac{h(\alpha_n^+) - h(\alpha_n)}{\widehat{\alpha}_n - \widetilde{\alpha}_n},$$

тобто, $k(s_n) \in [k_{RS}, k_{CD}]$. Знайдемо оцінку знизу для k_{RS} та оцінку згори для k_{CD}.

Позначимо через d натуральне число, двійковий запис якого має вигляд

$$d = x_{p+1} \ldots\, x_{p+t},$$

де числа $x_{p+1}, \ldots\, x_{p+t}$ з формули (1). Тоді, за побудовою чисел α_n, α_n^+, $\widetilde{\alpha}_n$, $\widetilde{\alpha}_n^+$, $\widehat{\alpha}_n$ та $\widehat{\alpha}_n^+$ можемо записати рівності

$$\frac{\widetilde{\alpha}_n - \alpha_n}{\alpha_n^+ - \alpha_n} = \frac{d}{2^t},$$
$$\frac{\widehat{\alpha}_n - \widetilde{\alpha}_n}{\widetilde{\alpha}_n^+ - \widetilde{\alpha}_n} = \frac{d}{2^t}.$$

З цих двох рівностей маємо

$$\widehat{\alpha}_n - \widetilde{\alpha}_n = \frac{d^2(\alpha_n^+ - \alpha_n)}{2^{2t}}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_n^+ - \alpha_n &= (\widetilde{\alpha}_n - \alpha_n) + (\widehat{\alpha}_n - \widetilde{\alpha}_n) + (\widehat{\alpha}_n^+ - \widehat{\alpha}_n) = \\ &= \frac{d(\alpha_n^+ - \alpha_n)}{2^t} + \frac{d^2(\alpha_n^+ - \alpha_n)}{2^{2t}} + \frac{\alpha_n^+ - \alpha_n}{2^{2t}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Рис. 3:

За лемою 1, для кожного $i \in \mathbb{N}$ відстані між сусідніми точками множин B_i не однакові. За наслідком 1

$$d\,v_1^{2t} \leq \frac{h(\hat{\alpha}_n) - h(\widetilde{\alpha}_n)}{h(\alpha_n^+) - h(\alpha_n)} \leq d\,v_2^{2t}; \tag{6}$$

$$d\,v_1^t + (d+1)\,v_1^{2t} \leq \frac{h(\hat{\alpha}_n^+) - h(\alpha_n)}{h(\alpha_n^+) - h(\alpha_n)} \leq d\,v_2^t + (d+1)\,v_2^{2t}. \tag{7}$$

З (2), (4) та (7) маємо

$$m_1(d)h'_{p+nt+1}(x_0) \leq k_{CD} \leq M_1(d)h'_{p+nt+1}(x_0), \tag{8}$$

де

$$m_1(d) = \frac{2^t(d\,v_1^t + (d+1)\,v_1^{2t})}{d^2}$$

та

$$M_1(d) = \frac{2^t(d\,v_2^t + (d+1)\,v_2^{2t})}{d^2}.$$

З (3), (5) та (6) отримуємо

$$m_2(d)h'_{p+nt+1}(x_0) \leq k_{RS} \leq M_2(d)h'_{p+nt+1}(x_0), \tag{9}$$

де

$$m_2(d) = \frac{d\,v_1^{2t}}{\dfrac{d}{2^t} + \dfrac{d^2}{2^{2t}} + \dfrac{1}{2^{2t}}} = \frac{2^{2t} d(\min\{v,\,1-v\})^{2t}}{2^t d + d^2 + 1}.$$

та

$$M_2(d) = \frac{2^{2t} d\,v_2^{2t}}{2^t d + d^2 + 1}$$

Звернемо увагу на те, що сталі m_1, m_2, M_1 та M_2 залежать лише від x_0 та від d і не залежать від n.

Повернемося до того, що вибір періодичної частини двійкового запису раціонального числа неоднозначний в тому сенсі, що можемо різними способами вибирати цифру, з якої починається періодична частина. Нагадаємо, що число d було побудоване за деякою довільно взятою періодичною частиною. У загальному випадку періодична частина x_0 може мати вигляд

$$\sigma^i(x_{p+1}\ldots x_{p+t}), \tag{10}$$

де σ — перестановка множини з t елементів, i — довільна ітерація цієї перестановки, причому $\sigma(k) = k+1$ для $1 \le k \le t-1$ та $\sigma(t) = 1$. Позначимо d_i — натуральне число, двійковий запис якого є послідовністю цифр (10). Очевидно, що d_i — періодична послідовність з періодом t. Позначимо $m_1(x_0) = \min\limits_{1\le i\le t} m_1(\sigma^i(d_i))$, $m_2(x_0) = \min\limits_{1\le i\le t} m_2(\sigma^i(d_i))$, $M_1(x_0) = \max\limits_{1\le i\le t} M_1(\sigma^i(d_i))$ та $M_2(x_0) = \max\limits_{1\le i\le t} M_2(\sigma^i(d_i)$. Тоді, подібно до (8) та (9) отримуємо

$$m_1(x_0)h'_{p+nt+1}(x_0) \le k_{CD} \le M_1(x_0)h'_{p+nt+1}(x_0),$$

$$m_2(x_0)h'_{p+nt+1}(x_0) \le k_{RS} \le M_2(x_0)h'_{p+nt+1}(x_0).$$

Враховуючи, що

$$k_{RS} \le k(s_n) \le k_{CD},$$

маємо

$$m_2(x_0)h'_{p+nt+1}(x_0) \le k(s_n) \le M_1(x_0)h'_{p+nt+1}(x_0). \tag{11}$$

Тепер твердження теореми випливає з леми 3 та очевидного зауваження про те, що границі $\lim\limits_{n\to\infty} h'_n(x_0-)$ та $\lim\limits_{n\to\infty} h'_n(x_0+)$ існують для кожного $x_0 \in \mathbb{Q}$. □

Теорему 1 можна вважати узагальненням твердження 2 на множину раціональних чисел.

З огляду на лему 1, таке узагальнення неможливо здійснити на множину всіх тих чисел $x_0 \in [0,\,1]$, для яких існує $\lim\limits_{n\to\infty} h'_n(x_0)$. Маємо таке твердження.

Твердження 3. *Для кожного $v \ne 1/2$ існує $x_0 \in [0,\,1]$, таке що $h'(x_0) = 0$ і виконується одне з двох: або границя $\lim\limits_{n\to\infty} h'_n(x_0)$ не існує, або границя $\lim\limits_{n\to\infty} h'_n(x_0) = \infty$.*

Доведення. Лема є наслідком леми 1 та леми 3, якщо замість відображення f_v розглянути відображення f_{1-v}. □

Робота виконана за підтримки гранту FAPESP, процес №2013/11350-2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fedorenko V.V., Plakhotnyk M.V. *Topological conjugation of piecewise linear unimodal maps*// Collected articles of Kyiv institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. – 2014. – V. 11, №. 5. – P. 115–127. (in Ukrainian)
2. Plakhotnyk M. *Differentiability of the conjugation for the pair of tent-like maps*// Bull. of Kyiv University, Ser. Mathematics and Mechanics. – 2015. – V. 34. – P. 28–34. (in Ukrainian)
3. Riesz F., Sz.-Nagy B. Lections on functional analysis. – Mir, Moskow, 1979. (in Russian); also see Riesz F., Sz.-Nagy B. Leçons d'Analyse Fonctionnelle. – Budapest, 1955. (in French)
4. Fihtengoltz G.M. The course of differential and integral calculus. – Nauka, Moscow, 1962. (in Russian)
5. A.N. Sharkovskiy, S.F. Koliada, A.G. Sivak, V.V. Fedorenko, Introduction to the funtional equations theory. – Naukova Dumka, Kyiv, 1989. (in Russian)
6. Fedorenko V., Kyrychenko V., Plakhotnyk M. *Exponent matrices and topological equivalence of maps*// Algebra and Discrete Math. – 2007. – №4. – P. 45–58.
7. Lebesgue H. Lecons sur l'integration et le recherche des fonctions primitives. – 2-me ed., Paris, 1928.
8. Skufca J., Bolt E., *A concept of homeomorphic defect for defining mostly conjugate dynamical systems*// – 2008. – Chaos. – №03118. – P. 1–18.

University of Sao Paulo, Brasil
makar_plakhotnyk@ukr.net

Надійшло 23.09.2105
Після переробки 16.05.2016