УДК 517.51

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко

АНАЛОГ ОБЕРНЕНОЇ ТЕОРЕМИ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПРОСТОРІВ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

V. K. Maslyuchenko, H. A. Voloshyn. *The analogue of Bernstein's inverse theorem for the one class of the space of sequences*, Mat. Stud. **47** (2017), 160–168.

We introduce the space of numerical sequences $l_{\mathbf{p}} = \{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \colon |x| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k} < +\infty\}$ with a quasi-norm $|\cdot|$ for an every sequence $\mathbf{p} = (p_k)_{k=1}^{\infty}$ of numbers p_k from the interval $(0, 1]$ and we prove the analogue of the inverse of Bernstein's theorem for this space.

1. Вступ. У 1938 році С. Н. Бернштейн встановив таке твердження ([1, 2]): *для довільної спадної до нуля послідовності* (α_n) *чисел* $\alpha_n > 0$ *існує така неперервна функція* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$*, що її найкращі рівномірні наближення* $E_n(f)$ *многочленами степеня, який не перевищує* n*, дорівнюють* α_n *для кожного* $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Після того як С. М. Нікольський зауважив ([3, с.297]), що ця теорема може бути узагальнена на довільні банахові простори, з'явилося багато робіт, в яких вона дістала значний розвиток (див. [4]–[6] і вказану там літературу). Зокрема, в [5, 6] було введено поняття квазінормованого простору і вказані умови для того, щоб у такому просторі мав місце аналог оберненої теореми Бернштейна. Крім того, там сформульовані три умови (a), (A) і $(\mathcal{A})$ про відстань $d(\lambda x, L)$ до підпростору квазінормованого простору, які пов'язані імплікаціями $(\mathcal{A}) \Rightarrow (A) \Rightarrow (a)$ і поставлена задача про справедливість обернених імплікацій.

У пошуках прикладів, які б показували, що $(a) \not\Rightarrow (A)$ і $(A) \not\Rightarrow (\mathcal{A})$ автори ввели клас просторів послідовностей $l_{\mathbf{p}}$, де $\mathbf{p} = (p_k)_{k=1}^{\infty}$ і $0 < p_k \le 1$, аналогічних до просторів В. Орлича ([7]), який розглядав випадок $p_k \ge 1$, і Г. Накано (див. [8, с. 118] і вказану там літературу). Виявилося, що ці простори є повними квазінормованими просторами з обмеженими скінченновимірними кулями, які задовольняють умову (A). Цікаво, що, наприклад, для простору $h = l_{\mathbf{p}}$, де $\mathbf{p} = (\frac{1}{k})_{k=1}^{\infty}$, кулі у всьому просторі вже не обмежені. Це дозволило нам довести, що: *для довільної строго зростаючої послідовності скінченновимірних підпросторів* L_n *простору* $l_{\mathbf{p}}$ *і кожної спадної до нуля послідовності чисел* α_n *існує такий елемент* $x \in l_{\mathbf{p}}$*, що відстань* $d(x, L_n) = \alpha_n$ *для кожного номера* n. Нез'ясованим залишилося *питання* про те чи мають простори $l_{\mathbf{p}}$ властивість $(\mathcal{A})$.

2. Узагальнення оберненої теореми Бернштейна на квазінормовані простори. Нагадаємо, що *квазінорма* на абелевій групі X — це функція $X \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$, яка для довільних елементів x і y з X задовольняє умови:

$$Q1.\ |x| \ge 0; \quad Q2.\ |-x| = |x|; \quad Q3.\ |x+y| \le |x| + |y|; \quad Q4.\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A18, 46E10, 65D05, 65D15.
Keywords: inverse Bernstein's theorem; quasi-norm; quasi-normed space; bounded balls; sequence of finite dimensional linear subspaces.
doi:10.15330/ms.47.2.160-168

Квазінорма на векторному просторі X над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ — це квазінорма на абелевій групі, породженій операцією додавання у просторі X.

Квазінорма $|\cdot|$ породжує метрику $d(x, y) = |x - y|$, яка інваріантна відносно зсувів, тобто $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ для довільних x, y і z з X. Навпаки, якщо d — метрика на X, яка інваріантна відносно зсувів, то функція $|x| = d(x, 0)$ — це квазінорма на X, причому $d(x, y) = |x - y|$. Метрика $d(x, y) = |x - y|$ породжує деяку топологію $\mathcal{T}_d$ на абелевій групі X чи на векторному просторі X, відносно якої операція додавання є неперервною. Якщо ж для квазінорми $|\cdot|$ на векторному просторі X і операція множення на скаляр є неперервною, то квазінорма називається *лінійною.*

Векторний простір X, на якому задана лінійна квазінорма $|\cdot|$, називається *квазінормованим простором.* Такий простір є гаусдорфовим топологічним векторним простором відносно топології, породженої метрикою $d(x, y) = |x - y|$.

Легко перевірити, що нормовані і p-нормовані простори, де $0 < p < 1$, є квазінормованими. Насправді клас квазінормованих просторів значно ширший від цих класів, що показують і простори $l_{\mathbf{p}}$, які розглядаються в даній статті.

Розглянемо для кожної непорожньої підмножини L метричного простору (X, d) і елемента $x \in X$ відстань

$$d(x, L) = \inf\{d(x, y) \colon y \in L\}.$$

Цю відстань називають ще *найкращим наближенням елемента x елементами з L*, а елемент $u \in L$, для якого $d(x, u) = d(x, L)$ — *елементом найкращого наближення.*

Нехай $(X, |\cdot|)$ — простір з квазінормою. Введемо такі умови:

(a) для кожного $x \in X \setminus \{0\}$ відстань $d(\lambda x, \{0\}) = |\lambda x| \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$;

(A) для кожного скінченновимірного лінійного підпростору L простору X і довільного $x \in X \setminus L$ відстань $d(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$;

$(\mathcal{A})$ для кожного замкненого лінійного підпростору L простору X і елемента $x \in X \setminus L$ відстань $d(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Очевидно, що $(\mathcal{A}) \Rightarrow (A) \Rightarrow (a)$. Питання про справедливість обернених імплікацій поки що залишається відкритим.

Ми використаємо тут таке узагальнення оберненої теореми Бернштейна [5, 6].

Теорема 1. *Нехай X — повний квазінормований простір з обмеженими скінченновимірними кулями, який задовольняє умову (A), і $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ — строго зростаюча послідовність скінченновимірних лінійних підпросторів L_n простору X. Тоді для довільної спадної послідовності чисел $\alpha_n > 0$, такої, що $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ існує вектор $x \in X$, для якого $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного номера n.*

Зауважимо, що під обмеженістю множини в цій теоремі ми розуміємо її обмеженість як множини у топологічному векторному просторі X, а не обмеженість у відповідному метричному просторі. У статті [5] наводився слабший варіант теореми 1, в якому вимагалася обмеженість усіх куль в X, а її точніший варіант був поданий в [6], доведення при цьому залишилося без змін.

3. Деякі алгебраїчні твердження. Розглянемо векторний простір $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ всіх послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ елементів поля $\mathbb{K}$ дійсних чи комплексних чисел відносно покоординатного додавання і множення на скаляр з $\mathbb{K}$. Для послідовності $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ і номера n символом x_n будемо позначати вектор $x_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ з простору $\mathbb{K}^n$ і називати його *n-ною зрізкою* елемента x.

Теорема 2. *Нехай $a_j = (\alpha_{j,k})_{k=1}^{\infty}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ — система з m лінійно незалежних векторів у просторі $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Тоді існує такий номер n, що система векторів $a_{j,n} = (\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,n})$, $j \in \{1, \dots, m\}$, є лінійно незалежною у просторі $\mathbb{K}^n$.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно m.

При $m = 1$ лінійна незалежність системи з одного вектора a_1 означає, що $a_1 \neq 0$, тобто, що $\alpha_{1,n} \neq 0$ для деякого номера n. Тоді і n-та зрізка $a_{1,n} \neq 0$, отже, вектор $a_{1,n}$ утворює лінійно незалежну систему в $\mathbb{K}^n$.

Припустимо, що $m > 1$ і твердження правильне, коли кількість векторів дорівнює $m - 1$. Доведемо, що воно виконується і для m лінійно незалежних векторів $a_1, \dots, a_m$.

Міркуватимемо від супротивного, припускаючи, що для кожного номера s зрізки $a_{1,s} \dots, a_{m,s}$ лінійно залежні у просторі $\mathbb{K}^s$. Оскільки вектори $a_1, \dots, a_{m-1}$ лінійно незалежні в $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, як і вся система $a_1, \dots, a_m$, то за індуктивним припущенням існує такий номер n, що вектори $a_{1,n} \dots, a_{m-1,n}$ лінійно незалежні в $\mathbb{K}^n$. З лінійної залежності системи $a_{1,n} \dots, a_{m,n}$ випливає, що існують такі числа λ_k, $k = 1, \dots, m$, що $\lambda_j \neq 0$ хоча б для одного $j = 1, \dots, m$, а $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{k,n} = 0$. Якби $\lambda_m = 0$, то $\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k a_{k,n} = 0$, причому $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \neq (0, \dots, 0)$, що суперечило б лінійній незалежності системи $a_{1,n} \dots, a_{m-1,n}$. Тому, $\lambda_m \neq 0$ і з рівності $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{k,n} = 0$ ми можемо виразити вектор $a_{m,n}$ і зобразити його у вигляді $a_{m,n} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j a_{j,n}$, де $\mu_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_m}$.

Розглянемо довільний номер l. Система векторів $a_{1,n+l}, \dots, a_{m,n+l}$ теж лінійно залежна в $\mathbb{K}^{n+l}$. Тому, існує такий ненульовий набір $(\lambda_1^{'}, \dots, \lambda_m^{'})$ скалярів, що $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{'} a_{j,n+1} = 0$. Система векторів $a_{1,n+1}, \dots, a_{m-1,n+l}$ є лінійно незалежною в $\mathbb{K}^{n+l}$, адже система $a_{1,n}, \dots, a_{m-1,n}$ лінійно незалежна в $\mathbb{K}^n$. Тому, $\lambda_m^{'} \neq 0$ і $a_{m,n+l} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j^{'} a_{j,n+l}$, де $\mu_j^{'} = -\frac{\lambda_j^{'}}{\lambda_m^{'}}$, звідки випливає, що й $a_{m,n} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j^{'} a_{j,n}$ Отже, $\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j a_{j,n} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j^{'} a_{j,n}$, звідки $\mu_j = \mu_j^{'}$ при $j \in \{1, \dots, m-1\}$, адже вектори $a_{1,n}, \dots, a_{m-1,n}$ лінійно незалежні. Тому, $a_{m,n+l} = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j a_{j,n+l}$, для кожного номера l.

В такому разі і $a_m = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j a_j$, що дає нам лінійну залежність векторів $a_1, \dots, a_m$ і приводить до суперечності. □

Для довільної підмножини E векторного простору X над полем $\mathbb{K}$ символом sp E позначимо її лінійну оболонку в X, тобто множину всіх лінійних комбінацій $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, де $n \in \mathbb{N}$, а $x_k \in E$ при $k \in \{1, \dots, n\}$, а λ_k — довільні скаляри. Якщо $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, то ми покладаємо $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$=sp E. Зрозуміло, що

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \colon n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{K}, x_k \in E \text{ при } k \in \{1, .., n\} \right\}.$$

Теорема 3. *Нехай L — скінченновимірний лінійний підпростір простору $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $a_1, \dots, a_m$ — базис простору L, $L_n = \mathrm{sp}\{a_{1,n} \dots, a_{m,n}\}$ у просторі $X_n = \mathbb{K}^n$ і $x \in X \setminus L$. Тоді існує такий номер n, що $x_n \notin L_n$.*

Доведення. Оскільки вектори $a_1, \dots, a_m$ лінійно незалежні в X і $x \notin L = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то і вектори $x, a_1, \dots, a_m$ лінійно незалежні в X. Тому, за теоремою 2 існує такий номер n, що і вектори $a_{1,n} \dots, a_{m,n}, x_n$ лінійно незалежні в X_n. Отже, $x_n \notin L_n$. □

4. Простір послідовностей $l_{\mathbf{p}}$. Розглянемо для довільної послідовності $\mathbf{p} = (p_k)_{k=1}^{\infty}$ чисел p_k з проміжку $(0, 1]$ множину $l_{\mathbf{p}}$, що складається з тих послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, для яких ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k}$ збігається.

Теорема 4. *Множина* $l_{\mathbf{p}}$ *— це лінійний підпростір простору* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, а функція* $|x| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k}$ *— це лінійна квазінорма на* $l_{\mathbf{p}}$*.*

Доведення. Нехай $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ і $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ — довільні елементи з простору $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ і $\lambda \in \mathbb{K}$. Доведемо, що елементи $x + y = (\xi_k + \eta_k)_{k=1}^{\infty}$ і $\lambda x = (\lambda\xi_k))_{k=1}^{\infty}$ теж належать до $l_{\mathbf{p}}$. За нерівністю $(\xi+\eta)^p \le \xi^p + \eta^p$, яка виконується, коли $0 < p \le 1$, ξ і $\eta \ge 0$ ([9, с. 49] або [13, с. 38]), і з того, що функція $s = t^p$ при $p > 0$ зростає на $[0; +\infty)$, для кожного $k \in \mathbb{N}$ будемо мати, що

$$|\xi_k + \eta_k|^{p_k} \le |\xi_k|^{p_k} + |\eta_k|^{p_k},$$

адже $|\xi_k+\eta_k| \le |\xi_k|+|\eta_k|$. Оскільки ряди $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k}$ і $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^{p_k}$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(|\xi_k|^{p_k} + |\eta_k|^{p_k})$, а отже, і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^{p_k}$. При цьому

$$|x + y| = \sum_{k=1}^{\infty}(|\xi_k + \eta_k|)^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k} + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^{p_k} = |x| + |y|.$$

Отже, $x + y \in l_{\mathbf{p}}$ і виконується властивість $Q3$ для функції $|\cdot|$.

Далі, $|\lambda\xi_k|^{p_k} = |\lambda|^{p_k}|\xi_k|^{p_k}$ для кожного k. Якщо $|\lambda| > 1$, то $|\lambda|^{p_k} \le |\lambda|$, адже $p_k \le 1$, і $|\lambda\xi_k|^{p_k} \le |\lambda||\xi_k|^{p_k}$. Якщо ж $|\lambda| \le 1$, то $|\lambda|^{p_k} \le 1$, адже $p_k > 0$, і $|\lambda\xi_k|^{p_k} \le |\xi_k|^{p_k}$. Оскільки обидва ряди $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda||\xi_k|^{p_k}$ і $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k}$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\xi_k|^{p_k}$, звідси, $\lambda x \in l_{\mathbf{p}}$. Нульовий елемент $0 = (0, 0, \dots)$, очевидно, входить в $l_{\mathbf{p}}$, тому, $l_{\mathbf{p}}$ — лінійний підпростір простору $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ всіх послідовностей скалярів. Умови $Q1$, $Q2$, $Q4$ легко перевіряються, отже, $|\cdot|$ — квазінорма на $l_{\mathbf{p}}$.

Ця квазінорма породжує метрику $d(x, y) = |x-y|$, яка породжує топологію $\mathcal{T}_d$, базис околів нуля якої утворюють кулі $B_\varepsilon = \{x \in l_{\mathbf{p}} \colon |x| \le \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$. Ця топологія адитивна, оскільки метрика d інваріантна відносно зсувів. Доведемо, що операція $m \colon \mathbb{K} \times l_{\mathbf{p}} \to l_{\mathbf{p}}$, $m(\lambda, x) = \lambda x$, множення на скаляр теж неперервна. Для цього перевіримо, що $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$ є достатньою системою множин ([9, с. 16] або [14, с. 25]), тобто виконуються такі властивості:

1^0. Елементи системи $\mathcal{B}$ радіальні і заокруглені;

2^0. Для довільних $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $B_{\varepsilon_1} \cap B_{\varepsilon_2} \supseteq B_\varepsilon$;

3^0. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $B_\delta + B_\delta \subseteq B_\varepsilon$.

Заокругленість куль B_ε очевидна, властивості 2^0 і 3^0 просто перевіряються. Перевіримо радіальність множини B_ε. Для цього треба показати, що для кожного $x \in l_{\mathbf{p}}$ снує таке $\delta > 0$, що $\mu x \in B_\varepsilon$, як тільки $|\mu| \le \delta$. Для фіксованого $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з $l_{\mathbf{p}}$ розглянемо функцію

$$g(\mu) = |\mu x| = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|^{p_k}|\xi_k|^{p_k},$$

яка визначена на $\mathbb{K}$. Функції $u_k(\mu) = |\mu|^{p_k}|\xi_k|^{p_k}$ неперервні на $\mathbb{K}$, зокрема, в точці 0. При $|\mu| \le 1$ маємо оцінку

$$|u_k(\mu)| = u_k(\mu) \le |\xi_k|^{p_k}$$

для кожного k. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_k}$ збігається, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\mu)$ збігається рівномірно при $|\mu| \le 1$. Тому і функція $g(\mu)$ — неперервна в нулі. Але $g(0) = 0$, отже, $\lim_{\mu\to 0} g(\mu) = 0$. В такому разі існує $\delta \in (0, 1)$ таке, що $|\mu x| = g(\mu) \le \varepsilon$, як тільки $|\mu| \le \delta$, тобто $\mu x \in B_\varepsilon$ при $|\mu| \le \delta$, що і дає нам радіальність множини B_ε. За теоремою 1 з ([9, с. 19] або [14, с. 25]) існує єдина лінійна топологічна структура на $l_{\mathbf{p}}$, базою околів якої є система $\mathcal{B}$. Ця топологічна структура породжується топологією $\mathcal{T}_d$, яка, таким чином, і буде лінійною.

Повнота простору $l_{\mathbf{p}}$ доводиться стандартним способом як і повнота просторів l_p. $\square$

5. Умова (A) для простору $l_{\mathbf{p}}$. Доведемо тепер, що теорема 1 застосовна до простору $l_{\mathbf{p}}$. Почнемо з умови (A) з п.2.

Теорема 5. *Для довільної послідовності $\mathbf{p} = (p_k)_{k=1}^{\infty}$ чисел p_k, для яких $0 < p_k \le 1$ при кожному k, квазінормований простір $l_{\mathbf{p}}$ задовольняє умову (A).*

Доведення. Нехай L — скінченновимірний підпростір простору $l_{\mathbf{p}}$ і $a_1, \dots, a_m$ — його базис, де $a_j = (\alpha_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ при $j \in \{1, \dots, m\}$. Розглянемо елемент $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{\mathbf{p}} \setminus L$ і доведемо, що

$$\lim_{\lambda \to +\infty} d(\lambda x, L) = +\infty.$$

За теоремою 2 існує такий номер n, що $x_n \notin L_n = \langle a_{1,n}, \dots, a_{m,n} \rangle$. Для довільного $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in L$ і числа $\lambda \ge 1$ будемо мати:

$$|\lambda x - y| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda \xi_k - \eta_k|^{p_k} \ge \sum_{k=1}^{n} |\lambda \xi_k - \eta_k|^{p_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{p_k} |\xi_k - \frac{1}{\lambda} \eta_k|^{p_k}.$$

Розглянемо $p = \min\{p_1, \dots, p_n\}$. Зрозуміло, що $p > 0$ і $p_k \ge p$ для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$, а значить $\lambda^{p_k} \ge \lambda^p$ для $k \in \{1, \dots, n\}$, адже $\lambda \ge 1$. Оскільки $y \in L$, то $y_n = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in L_n$, так само і $\frac{1}{\lambda} y_n \in L_n$. Тому

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{p_k} |\xi_k - \frac{1}{\lambda} \eta_k|^{p_k} \ge \sum_{k=1}^{n} \lambda^{p} |\xi_k - \frac{1}{\lambda} \eta_k|^{p} \ge \lambda^p |x_n - \frac{1}{\lambda} y_n| \ge \lambda^p d_n(x_n, L_n),$$

де $|z|_n = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{p_k}$, $z = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, і $d_n(z, L_n) = \inf\limits_{u \in L_n} |z - u|_n$.

Таким чином, $|\lambda x - y| \ge \lambda^p d_n(x_n, L_n)$ для кожного $y \in L$, отже, і

$$d_n(\lambda x, L) \ge \lambda^p d_n(x_n, L_n).$$

Множина L_n як скінченновимірний лінійний підпростір квазінормованого, а значить, гаусдорфового простору $(\mathbb{K}^n, |\cdot|_n)$ буде замкненою у ньому ([10, с. 20]), а $x_n \notin L_n$, тому $d_n(x_n, L_n) > 0$. В такому разі $\lambda^p d_n(x_n, L_n) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$, а значить, і $d(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. $\square$

6. Обмеженість куль у просторі $l_{\mathbf{p}}$. Нагадаємо, що підмножина топологічного векторного простору X називається *обмеженою* ([9, с.44] або [14, с.38]) якщо вона поглинається будь-яким околом нуля в X, тобто, для довільного околу нуля U в X існує таке число $\gamma > 0$, що $A \subseteq \lambda U$, як тільки $|\lambda| \ge \gamma$. Ми будемо використовувати наступну характеризацію обмеженості ([9, с. 45, твердження 2] або [14, с. 40, твердження 5.3]): підмножина A топологічного векторного простору X буде обмеженою в ньому тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності точок x_n з A і довільної нескінченно малої послідовності скалярів λ_n послідовність точок $\lambda_n x_n$ прямує до нуля в X.

Розглянемо на просторі $\mathbb{K}^n$ максимум-норму

$$\|x\|_\infty = \max\Big\{|\xi_k| \colon x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n, k \in \{1, \dots, n\}\Big\},$$

де $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ і відповідний нормований простір $l_\infty^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Підмножина A простору l_∞^n буде обмеженою тоді і тільки тоді, коли існує така константа $\gamma > 0$, що $\|x\|_\infty \le \gamma$ для всіх $x \in A$.

Лема. *Нехай $f_1, \dots, f_n$ — лінійно незалежні лінійні функціонали на просторі $\mathbb{K}^n$ і $\gamma > 0$. Тоді множина*

$$E = \{x \in \mathbb{K}^n\colon \max\{|f_j(x)|\colon j \in \{1, \dots, n\}\} \le \gamma\}$$

обмежена в просторі l_∞^n.

Доведення. Розглянемо відображення, яке задається правилом $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Воно, очевидно, є лінійним. Як добре відомо, існують такі вектори $a_j = (\alpha_{j,k})_{k=1}^n$ з $\mathbb{K}^n$, що

$$f_j(x) = \langle a_j, x\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k}\xi_k$$

при $j \in \{1, \dots, n\}$ для кожного $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ з $\mathbb{K}^n$. Оскільки функціонали $f_1, \dots, f_n$ лінійно незалежні, то і вектори $a_1, \dots, a_n$ лінійно незалежні, а тому, визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \ne 0.$$

В такому разі система лінійних рівнянь $\sum_{k=1}^n \alpha_{j,k}\xi_k = \eta_k,\ j \in \{1, \dots, n\}$, має єдиний розв'язок $x = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ з $\mathbb{K}^n$ при довільній правій частині $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ з $\mathbb{K}^n$, а значить, відображення $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ є алгебраїчним ізоморфізмом.

Тоді формулою $\|x\| = \|\varphi(x)\|_\infty$ задається норма на $\mathbb{K}^n$. Але відомо ([11, с. 157] або [15, с. 166]), що будь-які норми на скінченновимірному просторі еквівалентні. Це також легко випливає з теореми Тихонова (([10, с. 16] або [14, с. 34, твердження 3.2])) про єдиність лінійної гаусдорфової топології на скінченнновимірному просторі. Тому, існують такі додатні сталі γ_1 і γ_2, що $\gamma_1\|x\|_\infty \le \|x\| \le \gamma_2\|x\|_\infty$. Тоді,

$$\|x\|_\infty \le \frac{1}{\gamma_1}\|x\| = \frac{1}{\gamma_1}\|\varphi(x)\|_\infty \le \frac{\gamma}{\gamma_1} = \gamma_0$$

для кожного вектора x з E. Отже, $\|x\|_\infty \le \gamma_0$ для кожного $x \in E$, що і дає нам обмеженість множини E у просторі l_∞^n. □

Теорема 6. *Кожна куля $B = \{x \in L\colon |x| \le r\}$ у скінченновимірному підпросторі L простору $l_\mathbf{p}$ є обмеженою множиною у топологічному векторному просторі $l_\mathbf{p}$.*

Доведення. Розглянемо послідовність точок x_n з множини A і нескінченну малу послідовність скалярів λ_n і доведемо, що $\lambda_n x_n \to 0$ в l_p, тобто, що $|\lambda_n x_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Нехай $a_1, \dots, a_m$ — базис простору L, де $a_j = (\alpha_{j,k})_{k=1}^\infty \in L$ при $j \in \{1, \dots, m\}$. Тоді для довільного n і кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ існують скаляри $\lambda_{n,j}$ такі, що $x_n = \sum_{j=1}^m \lambda_{n,j} a_j$. За теоремою 2 існує такий номер l, що зрізки $a_{1,l}, \dots, a_{m,l}$ лінійно незалежні в $\mathbb{K}^l$. В такому разі ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,l} \end{pmatrix}$$

дорівнює m. За теоремою про ранг матриці ([12, с. 71]) існує така послідовність номерів $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le l$, що мінор $\Delta = \det(\alpha_{j,k_s})_{j,s=1}^m \ne 0$. Тоді формулою

$$f_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{j=1}^m \alpha_{j,k_s}\lambda_j$$

визначаються лінійні функціонали $f_1, \ldots, f_m$ на просторі $\mathbb{K}^m$, при цьому система $(f_j)_{j=1}^m$ є лінійно незалежною.

Нехай $x \in B$. Оскільки $B \subseteq L$, то існують такі числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, що $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j$. Але

$$|x| = \sum_{k=1}^\infty \Big| \sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{j,k} \Big|^{p_k} \le r,$$

звідки випливає, що $\Big| \sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{j,k} \Big| \le r^{\frac{1}{p_k}}$ для кожного номера k, зокрема,

$$|f_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \le r^{\frac{1}{p_{k_s}}} = r_s$$

для кожного $s \in \{1, \ldots, m\}$. Покладаючи $\gamma = \max\{r_1, \ldots, r_m\}$, ми отримаємо, що

$$\max\{|f_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \colon s \in \{1, \ldots, m\}\} \le \gamma.$$

Отже, ми з'ясували, що множина $B_0 = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \colon x = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j \in B\}$ міститься у множині

$$E = \Big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \colon \max\{|f_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)| \colon s \in \{1, \ldots, m\}\} \le \gamma\Big\},$$

а тому за лемою є обмеженою в просторі l_∞^n. Отже, існує така стала $\gamma_0 \ge 1$, що для довільних наборів $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, для яких $\sum_{j=1}^m \lambda_j a_j \in B$, виконується нерівність

$$\max\big\{|\lambda_j| \colon j \in \{1, \ldots, m\}\big\} \le \gamma_0.$$

Покладемо $u_k(n) = |\sum_{j=1}^m \lambda_m \lambda_{n,j} \alpha_{j,k}|^{p_k}$ для довільних номерів k і n. Зрозуміло, що

$$|\lambda_n x_n| = \sum_{k=1}^\infty u_k(n)$$

для кожного n. За доведеним $|\lambda_{n,j}| \le \gamma_0$ для довільних номерів $n \in \mathbb{N}$ і $j \in \{1, \ldots, m\}$, адже $x_n \in B$ для кожного n. Оскільки $\lambda_n \to 0$, то існує таке $\alpha \ge 1$, що $|\lambda_n| \le \alpha$ для кожного n. Тому,

$$0 \le u_k(n) \le \Big(\sum_{j=1}^m |\lambda_n||\lambda_{n,j}||\alpha_{j,k}| \Big)^{p_k} \le (\alpha\gamma_0)^{p_k} \Big(\sum_{j=1}^m |\alpha_{j,k}| \Big)^{p_k} \le \alpha\gamma_0 \sum_{j=1}^m |\alpha_{j,k}|^{p_k} = \rho_k$$

для довільних номерів k і n, адже $0 < p_k \le 1$ і $\beta = \alpha\gamma_0 \ge 1$.

Оскільки $a_j \in l_{\mathbf{p}}$ для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$, то ряд $\sum_{k=1}^\infty \rho_k$ збігається. При цьому $0 \le u_k(n) \le \rho_k$ для всіх k і n, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum_{k=1}^\infty u_k(n)$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{N}$, отже можна переходити до границі під знаком нескінченної суми. Але

$$0 \le u_k(n) \le |\lambda_n|^{p_k} |\lambda_{n,j}|^{p_k} \left(\sum_{j=1}^m |\alpha_{j,k}| \right)^{p_k} \le |\lambda_n|^{p_k} \gamma_0 \left(\sum_{j=1}^m |\alpha_{j,k}| \right)^{p_k}$$

для довільних k і n, тому $\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n) = 0$, адже $|\lambda_n|^{p_k} \to 0$, для кожного фіксованого k. В такому разі

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n x_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

що і дає нам обмеженість множини B в $l_{\mathbf{p}}$. □

З іншого боку маємо такий результат.

Теорема 7. *Для того, щоб усі кулі $B_r = \{x \in l_{\mathbf{p}} \colon |x| \le r\}$, де $0 < r < \infty$, були обмеженими множинами у топологічному векторному просторі (ТВП) $l_{\mathbf{p}}$, необхідно і досить, щоб $p = \inf\{p_k \colon k \in \mathbb{N}\} > 0$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $p = 0$, і доведемо, що куля B_1 є необмеженою множиною в ТВП $l_{\mathbf{p}}$. З умови $p = 0$ випливає, що існує строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_k така, що $p_{n_k} < \frac{1}{k}$. Нехай $e_n = (\delta_{n,k})_{k=1}^{\infty}$, де $\delta_{n,k} = 0$ при $n \ne k$ і $\delta_{n,n} = 1$. Оскільки $|e_n| = 1$, то $e_n \in B_1$ для кожного n. Розглянемо вектори $x_k = e_{n_k}$ і числа $\lambda_k = \frac{1}{k}$. Зрозуміло, що $x_k \in B_1$ для кожного k і $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$. Але

$$|\lambda_k x_k| = \left(\frac{1}{k}\right)^{p_k} \ge \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$, адже $0 < \frac{1}{k} \le 1$ для натуральних k. Добре відомо, що $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1$, отже, $|\lambda_k x_k| \not\to 0$, а це дає нам необмеженість кулі B_1.

Достатність. Нехай $p > 0$, $x_n = (\xi_{n,k})_{k=1}^{\infty} \in B_r$ для кожного n і $\lambda_n \to 0$. Доведемо, що й $\lambda_n x_n \to 0$ у просторі $l_{\mathbf{p}}$, тобто, що $|\lambda_n x_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $\lambda_n \to 0$, то існує такий номер N_0, що $|\lambda_n| < 1$ при $n \ge N_0$. Тоді, при $n \ge N_0$ матимемо

$$|\lambda_n x_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n \xi_{n,k}|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n|^{p_k} |\xi_{n,k}|^{p_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_n|^{p} |\xi_{n,k}|^{p_k} = |\lambda_n|^p \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{n,k}|^{p_k} \le |\lambda_n|^p r.$$

Але $|\lambda_n|^p r \to 0$ при $n \to \infty$, тому й $|\lambda_n x_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Це доводить обмеженість кулі B_r у ТВП $l_{\mathbf{p}}$. □

6. Основний результат. З доведеного вище випливає такий наш основний результат.

Теорема 8. *Нехай $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ — строго зростаюча послідовність скінченновимірних лінійних підпросторів L_n простору $l_{\mathbf{p}}$. Тоді для довільної спадної до нуля послідовності чисел α_n існує вектор $x \in l_{\mathbf{p}}$ такий, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного номера n.*

Доведення. За теоремою 4 $l_{\mathbf{p}}$ — повний квазінормований простір. Обмеженість скінченновимірних куль у ньому гарантується теоремою 6. Виконання умови (A) для простору $l_{\mathbf{p}}$ дає нам теорема 5. Отже, простір $l_{\mathbf{p}}$ задовольняє всі умови теореми 1, звідки і випливає твердження теореми 8. □

REFERENCES

1. Bernstein S.N. *Sur le probleme inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues*// Comp. Rend. – 1938. – V.206. – P. 1520–1523.
2. Bernstein S.N. *On an inverse problem of approximation theory*// Collected works in 4 volumes. – M.: Publ. house of the Academy of Sciences of the USSR, 1954. – V.2. – P. 292–294. (in Russian)
3. Nikolsky S.M. *Approximation by polynomials of functions of a real variable*// Mathematics in the USSR for 30 years. –M.-L.: GITTL, 1948. – P. 288–318. (in Russian)
4. Nesterenko O.N. The inverse problem of paproximation and evaluation of norms of entire functions of exponential type and polynomials: dis ... candidate of physical and mathematical sciences. Sciences: 01.01.01 - Mathematical analysis. – Kiev, 2006. – 148 p. (in Ukrainian)
5. Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The generalization of one Bernstein's theorem*// Mat. Visn. NTSh. – 2009. – V.6. – P. 62–72. (in Ukrainian)
6. Voloshyn H.A. Separately continuous functions and the theory of approximations: dis ... candidate of physical and mathematical sciences. Sciences: 01.01.01 – Mathematical analysis. – Chernivtsi, 2012. – 138 p. (in Ukrainian)
7. Orlicz W. *Uber konjugierte Exponentenfolgen*// Stud. Math. – 1931. – V.3. – P. 200–211.
8. Maligranda L. *Hidegoro Nakano (1909-1974) – on the centenary of his birth*// Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan, 2009). – 2011. – P. 99–171.
9. Maslyuchenko V.K. The first types of topological vector spaces. – Chernivtsi: Ruta, 2002. – 72 p. (in Ukrainian)
10. Maslyuchenko V.K. Linear Continuous Operators. – Chernivtsi: Ruta, 2002. – 72 p. (in Ukrainian)
11. Maslyuchenko V.K. Lectures on functional analysis. Ch.1.Metric and normalized spaces. – Chernivtsi: ChNU Ruta, 2010. – 184p. (in Ukrainian)
12. Kurosh A.T. The course of Higher Algebra. – M.: Science, 1971. – 432p. (in Russian)
13. Robertson A.P., Robertson W.G. Topological vector spaces. – M.: Peace, 1967. – 258 p. (in Russian)
14. Shefer H. Topological vector spaces. – M.: Peace, 1971. – 360 p. (in Russian)
15. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis – M.: Science, 1989. – 624 p. (in Russian)

Chernivtsi National University
galja.vlshin@gmail.com
v.maslyuchenko@gmail.com

Received 23.02.2017