УДК 517.928

М. Б. Віра

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

M. B. Vira. *The boundary-value problem for the linear degenerated singularly perturbed system of differential equations of the second order*, Mat. Stud. **47** (2017), 185–195.

It is investigated the possibility of construction of the asymptotic solution of the boundary-value problem for the linear singularly perturbed system of differential equations of the second order with identically degenerated matrix at the derivatives of higher order in case than boundary bundle of matrixes has simple spectrum. It was obtained the conditions of the existence and uniqueness of the solution of this boundary-value problem and its asymptotic is constructed in form of power series with degrees of small parameter.

Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу виду

$$\varepsilon^{2h}A(t)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+C(t,\varepsilon)x=f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$M_1x(0,\varepsilon)+N_1x(T,\varepsilon)=d_1(\varepsilon), \tag{2}$$

$$M_2\frac{dx}{dt}(0,\varepsilon)+N_2\frac{dx}{dt}(T,\varepsilon)=d_2(\varepsilon), \tag{3}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t\in[0;T]$; $h\in N$; $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $A(t),B(t,\varepsilon),C(t,\varepsilon),M_1,N_1$ — квадратні матриці n-го порядку; M_2,N_2 — матриці розмірності $(n-1)\times n$; $f(t,\varepsilon)$, $d_1(\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $d_2(\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірний вектор.

Нехай виконуються такі умови.

1. Матриці $B(t,\varepsilon),C(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε, тобто:

$$B(t,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kB_k(t);\quad C(t,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kC_k(t);\quad f(t,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kf_k(t).$$

2. Матриці $A(t),B_k(t),C_k(t)$ і вектори $f_k(t)$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E15.
Keywords: boundary-value problem; system of differential equations of the second order; the conditions of the existence and uniqueness.
doi:10.15330/ms.47.2.185-195

3. Вектори $d_1(\varepsilon)$, $d_2(\varepsilon)$ зображаються у вигляді асимптотичних розвинень

$$d_1(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k^{(1)}; d_2(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k^{(2)},$$

при $\varepsilon \to 0$.

4. $\det A(t) = 0, \forall t \in [0;T]$.

5. $\det C_0(t) \neq 0, \forall t \in [0;T]$.

6. Квадратична в'язка матриць

$$L(t,\lambda) = C_0(t) + \lambda B_0(t) + \lambda^2 A(t) \tag{4}$$

регулярна ([5, с. 13]) при всіх $t \in [0;T]$ і зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру, тобто кратності всіх її власних значень і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на заданому відрізку.

У даній статті розглянемо випадок, коли в'язка матриць (4) має лише прості елементарні дільники, а саме: один нескінченний та $2n-1$ скінченних, що відповідають кореням $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, 2n-1}$, характеристичного рівняння $\det L(t,\lambda) = 0$.

Крайова задача для лінійної системи диференціальних рівнянь першого порядку досліджувалася автором в роботах [1–4]. При цьому було використано метод асимптотичного інтегрування вироджених сингулярно збурених лінійних систем, розроблений в [5]. У даній статті пропонується спосіб побудови асимптотики розв'язку крайової задачі (1)–(3) для лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку. У такій постановці дана задача розглядається вперше.

Асимптотика загального розв'язку лінійної однорідної системи. Згідно з [5, с. 181], у даному випадку однорідна система

$$\varepsilon^{2h} A(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t,\varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t,\varepsilon) x = 0, \tag{5}$$

має на відрізку $[0;T]$ $2n-1$ лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x_s(t,\varepsilon) = u_s(t,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_s(\tau,\varepsilon) d\tau\right), s = \overline{1, 2n-1}, \tag{6}$$

які утворюють її загальний розв'язок, де $u_s(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $\lambda_s(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями

$$u_s(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k^{(s)}(t), \lambda_s(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(s)}(t). \tag{7}$$

Слідуючи [5], виведемо рекурентні формули для визначення коефіцієнтів розвинень (7). Підставивши вираз (6) у систему (5) і прирівнявши вирази при однакових експонентах, маємо

$$\varepsilon^{2h} A(t) u_s''(t,\varepsilon) + \varepsilon^h [2\lambda_s(t,\varepsilon) A(t) u_s'(t,\varepsilon) + \lambda_s'(t,\varepsilon) A(t) u_s(t,\varepsilon) + B(t,\varepsilon) u_s'(t,\varepsilon)] +$$
$$+ (\lambda_s(t,\varepsilon))^2 A(t) u_s(t,\varepsilon) + \lambda_s(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) u_s(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon) u_s(t,\varepsilon) = 0.$$

Підставивши в цю рівність розвинення (7) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо рівняння

$$L(t,\lambda_0^{(s)})u_0^{(s)}=0, \tag{8}$$

$$L(t,\lambda_0^{(s)})u_k^{(s)}(t)=b_k^{(s)}(t), k=1,2,..., \tag{9}$$

де

$$b_k^{(s)}(t)=-\lambda_k^{(s)}(t)\cdot\frac{\partial L(t,\lambda_0^{(s)})}{\partial\lambda}\varphi_s(t)+g_k^{(s)}(t),$$

$$g_k^{(s)}(t)=-\sum_{i=1}^{k}C_i(t)u_{k-i}(t)-\sum_{j=1}^{k-i}\lambda_0^{(s)}B_j(t)u_{k-j}^{(s)}(t)-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i}\lambda_i^{(s)}B_ju_{k-i-j}^{(s)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=1}^{k-1-i}\lambda_i^{(s)}\lambda_j^{(s)}A(t)u_{k-i-j}^{(s)}-2\lambda_0^{(s)}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{(s)}A(t)u_{k-i}^{(s)}-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\lambda_{k-i}A(t)\varphi_s-$$

$$-\sum_{i=0}^{k-h}B_i(u_{k-h-i}^{(s)})'-\sum_{i=0}^{k-h}(\lambda_i^{(s)})'A(t)u_{k-h-i}^{(s)}-$$

$$-2\sum_{i=0}^{k-h}\lambda_i^{(s)}A(t)(u_{k-h-i}^{(s)})'-A(t)(u_{k-2h}^{(s)})'',\quad k=1,2,\ldots.$$

З рівняння (8) знайдемо $u_0^{(s)}(t)=\varphi_s(t)$, де $\varphi_s(t)$ — власний вектор в'язки $L(t,\lambda)$, що відповідає її власному значенню $\lambda_0^{(s)}(t)$, $s=\overline{1,2n-1}$. При цьому будемо вважати, що $\varphi_s(t)\in C^\infty[0;T]$, що можливо завдяки умові 2. Рівняння (9) сумісні тоді і тільки тоді, коли вектори $b_k^{(s)}(t)$ ортогональні вектору $\psi_s(t)$ — елементу нуль-простору матриці $L^*(t,\lambda_0^{(s)})$.

Оскільки $\lambda_0^{(s)}(t)$ — просте власне значення матриці $L(t,\lambda)$, то приєднані вектори в'язки відсутні, а, отже,

$$\left(\frac{\partial L(t,\lambda_0^{(s)})}{\partial\lambda}\varphi_s,\psi_s(t)\right)\neq 0, \forall t\in[0;T].$$

Тому, враховуючи скалярний множник, з точністю до якого визначається вектор $\psi_s(t)$, останній знайдемо так, щоб

$$\left(\frac{\partial L(t,\lambda_0^{(s)})}{\partial\lambda}\varphi_s,\psi_s(t)\right)=1.$$

Тоді з умови розв'язності рівнянь (9) $(b_k^{(s)}(t),\psi_s(t))=0$ визначимо $\lambda_k^{(s)}(t)$:

$$\lambda_k^{(s)}(t)=(g_k^{(s)}(t),\psi_s(t)), s=\overline{1,2n-1}, \tag{10}$$

а вектор $u_k^{(s)}(t)$ знайдемо за формулою

$$u_k^{(s)}(t)=H_s(t)b_k^{(s)}(t), \tag{11}$$

де $H_s(t)$ — напівобернена матриця до матриці $L(t,\lambda_0^{(s)})$, яку, як і вектор $\varphi_s(t)$ визначимо так, щоб вона була нескінченно диференційовною на $[0;T]$ [5, с.84].

Наведені формули мають рекурентний характер і дають змогу визначити будь-які коефіцієнти розвинень (7).

Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи. Як показано в [5], частинний розв'язок неоднорідної системи (1) можна побудувати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon),$$

де $v(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, який зображається формальним розвиненням

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t).$$

Для визначення коефіцієнтів $v_k(t)$ підставимо цей ряд у систему (1) і прирівнявши вирази при однакових степенях малого параметра, дістанемо рівняння:

$$C_0(t)v_0(t) = f_0(t); \quad C_0(t)v_k(t) = f_k(t) - \sum_{i=0}^{k-2h} A_i(t)v''_{k-2h-i} -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)v'_{k-h-i}(t) - \sum_{i=1}^{k} C_i(t)v_{k-i}(t), k = 1, 2, ...,$$

звідки, в силу умови 5, однозначно визначаються вектори $v_0(t)$, $v_k(t)$, $k = 1, 2, ...$:

$$v_0(t) = C_0^{-1}(t)f_0(t); \tag{12}$$

$$v_k(t) = C_0^{-1}(t)[f_k(t) - \sum_{i=0}^{k-2h} A_i(t)v''_{k-2h-i} - \sum_{i=0}^{k-h} B_i(t)v'_{k-h-i}(t) - \sum_{i=1}^{k} C_i(t)v_{k-i}(t)],$$
$$k = 1, 2, ... \tag{13}$$

Побудова формального розв'язку крайової задачі. Перейдемо тепер до побудови розв'язку крайової задачі (1), (2). Припустимо, що виконується умова

7. $$\operatorname{Re}\lambda_0^{(i)}(t) < 0, i = \overline{1,l}, \operatorname{Re}\lambda_0^{(j)}(t) > 0, j = \overline{l+1, 2n-1}.$$

Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) побудуємо у вигляді суми лінійної комбінації розв'язків однорідної системи і частинного розв'язку неоднорідної системи:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l} u_i(t,\varepsilon)c_i(\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right) +$$
$$+ \sum_{j=l+1}^{2n-1} u_j(t,\varepsilon)c_j(\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right) + v(t,\varepsilon), \tag{14}$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, 2n-1}$ — скалярні множники, які розкладаються в формальні степеневі ряди

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k^{(i)}, i = \overline{1, 2n-1},$$

коефіцієнти яких підлягають визначенню із крайової умови (2).

Підставимо вектор (14) в крайову умову (2). Взявши до уваги припущення 7, можна стверджувати, що доданки, які містять експоненти, є експоненціально малими. Тому, знехтувавши ними, одержимо відповідно

$$M_1 \sum_{i=1}^{l} u_i(0,\varepsilon)c_i(\varepsilon) + N_1 \sum_{j=l+1}^{2n-1} u_j(T,\varepsilon)c_j(\varepsilon) = d_1(\varepsilon) - M_1 v(0,\varepsilon) - N_1 v(T,\varepsilon), \tag{15}$$

$$\varepsilon^h M_2 \sum_{i=1}^{l} (u_i(0,\varepsilon))' c_i(\varepsilon) + M_2 \sum_{i=1}^{l} u_i(0,\varepsilon)c_i(\varepsilon)\lambda_i(0,\varepsilon) + \varepsilon^h N_2 \sum_{j=l+1}^{2n-1} (u_j(T,\varepsilon))' c_j(\varepsilon) +$$

$$+ N_2 \sum_{j=l+1}^{2n-1} u_j(T,\varepsilon)c_j(\varepsilon)\lambda_j(T,\varepsilon) = \varepsilon^h d_2(\varepsilon) - \varepsilon^h M_2 v'(0,\varepsilon) - \varepsilon^h N_2 v'(T,\varepsilon). \tag{16}$$

Прирівнявши вирази при однакових степенях малого параметра, дістанемо відповідно

$$M_1 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} + N_1 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(T) c_{k-j}^{(i)} = d_k^{(1)} - M_1 v_k(0) - N_1 v_k(T), \tag{17}$$

$$M_2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k-h} (u_j^{(i)}(0))' c_{k-h-j}^{(i)} + M_2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k} \sum_{r=0}^{k-j} u_j^{(i)}(0) \lambda_r^{(i)}(0) c_{k-j-r}^{(i)} + N_2 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=0}^{k-h} (u_j^{(i)}(T))' c_{k-h-j}^{(i)} +$$

$$+ N_2 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{r=0}^{k-j} u_j^{(i)}(T) \lambda_r^{(i)}(T) c_{k-j-r}^{(i)} = d_{k-h}^{(2)} - M_2 v'_{k-h}(0) - N_2 v'_{k-h}(T). \tag{18}$$

Розглянемо рівняння (17), (18) при $k = 0$ і, об'єднавши їх, представимо у вигляді системи

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0 \Lambda_0 \end{bmatrix} c_0 = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_0^{(1)} \\ \widetilde{d}_0^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

де

$$Q_0 = [M_1\varphi_1(0), ..., M_1\varphi_l(0), N_1\varphi_{l+1}(T), ..., N_1\varphi_{2n-1}(T)],$$
$$U_0 = [M_2\varphi_1(0), ..., M_2\varphi_l(0), N_2\varphi_{l+1}(T), ..., N_2\varphi_{2n-1}(T)],$$
$$\Lambda_0 = \mathrm{diag}\{\lambda_0^{(1)}(0), ..., \lambda_0^{(l)}(0), \lambda_0^{(l+1)}(T), ..., \lambda_0^{(2n-1)}(T)\},$$
$$c_0 = \mathrm{col}(c_0^{(1)}, ..., c_0^{(2n-1)}); \quad \widetilde{d}_0^{(1)} = d_0^{(1)} - M_1 v_0(0) - N_1 v_0(T); \widetilde{d}_0^{(2)} = 0.$$

Тоді, якщо виконується умова

8. $$\det \begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0 \Lambda_0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

то із рівняння (19) однозначно визначається вектор c_0

$$c_0 = \begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0 \Lambda_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{d}_0^{(1)} \\ \widetilde{d}_0^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Рівняння (17), (18) представимо у вигляді

$$Q_0 \cdot c_k = \widetilde{d}_k^{(1)}, \tag{21}$$

$$c_k = \mathrm{col}(c_k^{(1)}, ..., c_k^{(2n-1)}),$$

$$\widetilde{d}_k^{(1)} = d_k^{(1)} - M_1 v_k(0) - N_1 v_k(T) - M_1 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} - N_1 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{k} u_j^{(i)}(T) c_{k-j}^{(i)},$$

$$U_0 \Lambda_0 \cdot c_k = \widetilde{d}_k^{(2)}, \tag{22}$$

де

$$\widetilde{d}_k^{(2)} = d_{k-h}^{(2)} - M_2 v'_{k-h}(0) - N_2 v'_{k-h}(T) - M_2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k-h} (u_j^{(i)}(0))' c_{k-h-j}^{(i)} -$$

$$- N_2 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=0}^{k-h} (u_j^{(i)}(T))' c_{k-h-j}^{(i)} - M_2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=0}^{k-j} u_j^{(i)}(0) \lambda_r^{(i)}(0) c_{k-j-r}^{(i)} -$$

$$- N_2 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=0}^{k-j} u_j^{(i)}(T) \lambda_r^{(i)}(T) c_{k-j-r}^{(i)} - M_2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{r=1}^{k} \varphi_i(0) \lambda_r^{(i)}(0) c_{k-r}^{(i)} -$$

$$- N_2 \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{r=1}^{k} \varphi_i(T) \lambda_r^{(i)}(T) c_{k-r}^{(i)}.$$

Об'єднавши рівняння (21) і (22), дістанемо систему

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0 \Lambda_0 \end{bmatrix} c_k = \begin{pmatrix} \widetilde{d}_k^{(1)} \\ \widetilde{d}_k^{(2)} \end{pmatrix},$$

звідки однозначно визначаються вектори сталих

$$c_k = \begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0 \Lambda_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{d}_k^{(1)} \\ \widetilde{d}_k^{(2)} \end{pmatrix}, k = 1, 2, ... \tag{23}$$

Визначення сталих $c_k^{(i)}$ завершує побудову формального розв'язку крайової задачі (1), (2).

Асимптотика розв'язку крайової задачі. Покажемо, що побудований таким чином розв'язок має асимптотичний характер. Для цього розглянемо m-наближення, обірвавши відповідні формальні ряди на m-у члені:

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \sum_{i=l+1}^{2n-1} \sum_{j=0}^{k} u_j^{(i)}(t) c_{k-j}^{(i)} \exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_t^T \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k v_k(t), \tag{24}$$

де

$$\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \lambda_0^{(i)}(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t).$$

За побудовою це наближення задовольняє систему (1) і крайову умову (2) з точністю до $O(\varepsilon^{m+1})$. Тоді, представивши розв'язок задачі у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + \widetilde{x}_m(t,\varepsilon),$$

для вектора нев'язки $\widetilde{x}_m(t,\varepsilon)$ отримаємо крайову задачу

$$\varepsilon^{2h} A(t) \frac{d^2\widetilde{x}_m}{dt^2} + \varepsilon^h B(t,\varepsilon) \frac{d\widetilde{x}_m}{dt} + C(t,\varepsilon)\widetilde{x}_m = \varepsilon^{m+1} a(t,\varepsilon), \tag{25}$$

$$M_1 \widetilde{x}_m(0,\varepsilon) + N_1 \widetilde{x}_m(T,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b_1(\varepsilon), \tag{26}$$

$$M_2 \frac{d\widetilde{x}_m}{dt}(0,\varepsilon) + N_2 \frac{d\widetilde{x}_m(T,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon^{m+1} b_2(\varepsilon), \tag{27}$$

де $a(t,\varepsilon)$ — n-вимірний рівномірно обмежений на $[0;T]$ вектор, $b_i(\varepsilon)$, $i = 1,2$ — деякі обмежені вектори. В одержаній крайовій задачі виконаємо заміну ([5, с.85])

$$\widetilde{x}_m(t,\varepsilon) = y_1, \frac{d\widetilde{x}_m}{dt} = \varepsilon^{-h} y_2. \tag{28}$$

Таким чином, зведемо систему (25) другого порядку до еквівалентної їй системи першого порядку:

$$\varepsilon^h \widetilde{A}(t) \frac{dy}{dt} = \widetilde{B}(t,\varepsilon) y + \widetilde{f}(t,\varepsilon), \tag{29}$$

де

$$\widetilde{A}(t) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A(t) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -C(t,\varepsilon) & -B(t,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{f}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(0; \varepsilon^{m+1} a(t,\varepsilon)), \quad y = \mathrm{col}(y_1; y_2).$$

Виконавши заміну (28) в крайових умовах (26), (27) зведемо їх до вигляду

$$M_1 y_1(0,\varepsilon) + N_1 y_1(T,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b_1(\varepsilon), \tag{30}$$

$$M_2 y_2(0,\varepsilon) + N_2 y_2(T,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1+h} b_2(\varepsilon). \tag{31}$$

Визначимо умови існування і структуру розв'язку крайової задачі (29-31). Для цього спершу встановимо структуру загального розв'язку системи (29). А саме, знайдемо жорданів набір матриці $\widetilde{A}(t)$ відносно оператора

$$\widetilde{L}(t,\varepsilon) = \widetilde{B}(t,\varepsilon) - \varepsilon^h \widetilde{A}(t) \frac{d}{dt}$$

в унітарному $2n$-вимірному просторі.

Нехай $g_1(t)$ — власний вектор матриці $\widetilde{A}(t)$:

$$\widetilde{A}(t) g_1(t) = 0.$$

Представимо його у вигляді $g_1(t) = \mathrm{col}(g_1^{(1)}; g_2^{(1)})$, де $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$ — n-вимірні вектори. Тоді, враховуючи структуру матриці $\widetilde{A}(t)$, маємо

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси дістанемо $g_1^{(1)} = 0$, $g_2^{(1)} = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — власний вектор матриці $A(t)$, що відповідає її нульвому власному значенню. Отже, $g_1(t) = \mathrm{col}(0; \varphi(t))$. Спробуємо знайти приєднані вектори. Перший з них позначимо через $g_2(t)$ і представимо у вигляді $g_2(t) = \mathrm{col}(g_1^{(2)}; g_2^{(2)})$. Тоді $\varepsilon^h \widetilde{A}(t) g_2(t) = \widetilde{L}(t, \varepsilon) g_1(t)$, або в розгорнутому вигляді

$$\varepsilon^h \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ g_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -C(t,\varepsilon) & -B(t,\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \end{pmatrix} - \varepsilon^h \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dg_1^{(1)}}{dt} \\ \frac{dg_2^{(1)}}{dt} \end{pmatrix},$$

звідки, враховуючи, що $g_1(t) = \mathrm{col}(0; \varphi(t))$, дістанемо $g_1^{(2)} = \varepsilon^{-h} \varphi(t)$,

$$\varepsilon^h A(t) \left(g_2^{(2)} - \frac{d\varphi}{dt} \right) + L_1 \varphi = 0, \tag{32}$$

де $L_1(t,\varepsilon) = B(t,\varepsilon) + 2\varepsilon^h A(t) \frac{d}{dt}$.

Нехай $\psi(t)$ — елемент нуль-простору матриці $A^*(t)$. Тоді рівняння (32) нерозв'язне відносно вектора $(g_2^{(2)} - \frac{d\varphi}{dt})$, оскільки $(L_1\varphi, \psi) \neq 0$ за побудовою теорії. Тому приєднані вектори відсутні і матриця $\widetilde{A}(t)$ має відносно оператора $\widetilde{L}(t,\varepsilon)$ жорданів ланцюжок завдовжки один, який складається із одного вектора $g_1(t) = \mathrm{col}(0; \varphi(t))$ — власного вектора матриці $\widetilde{A}(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню. Спряжена матриця $\widetilde{A}^*(t)$ також має жорданів ланцюжок завдовжки 1 відносно оператора $\widetilde{L}^*(t,\varepsilon) = \widetilde{B}^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^h \frac{d}{dt} \widetilde{A}^*(t)$, який містить лише один власний вектор $\widetilde{g}_1(t) = \mathrm{col}(0; \psi(t))$ матриці $\widetilde{A}^*(t)$.

Тоді згідно з теоремою 2.2 ([5, с. 62]), загальний розв'язок лінійної незалежної системи (29) має вигляд

$$y(t,\varepsilon) = Y_{2n-1}(t,\varepsilon) c(\varepsilon) + \widetilde{y}(t,\varepsilon),$$

де $Y_{2n-1}(t,\varepsilon)$ — $2n \times (2n-1)$-матриця, стовпцями якої є $2n-1$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи, $c(\varepsilon)$ — довільний сталий $(2n-1)$-вимірний вектор, $\widetilde{y}(t,\varepsilon)$ — деякий частинний розв'язок неоднорідної системи.

Враховуючи заміну (28), матриця $Y_{2n-1}(t,\varepsilon)$ визначається наступним чином

$$Y_{2n-1}(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(X(t,\varepsilon); \varepsilon^h \frac{dX(t,\varepsilon)}{dt} \right),$$

де $X(t,\varepsilon)$ — $n \times (2n-1)$-вимірна фундаментальна матриця однорідної системи

$$\varepsilon^{2h} A(t) \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon^h B(t,\varepsilon) \frac{dx}{dt} + C(t,\varepsilon) x = 0,$$

вигляду

$$X(t,\varepsilon) = [U_m^{(1)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-2h}); U_m^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-2h})] \times$$

$$\times \operatorname{diag}\{\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(\tau,\varepsilon)d\tau); \exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_m^{(2)}(\tau,\varepsilon)d\tau)\}, \tag{33}$$

в якій

$$\Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),...,\lambda_m^{(l)}(t,\varepsilon)\},\quad \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(l+1)}(t,\varepsilon),...,\lambda_m^{(2n-1)}(t,\varepsilon)\},$$

$U_m^{(1)}(t,\varepsilon)$ — $n\times l$-матриця, стовпцями якої є вектори $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,l}$, $U_m^{(2)}(t,\varepsilon)$ — $n\times(2n-l-1)$-матриця, стовпцями якої є вектори $u_m^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{l+1,2n-1}$, де

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k^{(i)}(t), i=\overline{1,2n-1}.$$

Таким чином, враховуючи (33), фундаментальну матрицю $Y_{2n-1}(t,\varepsilon)$ можна подати у вигляді

$$Y_{2n-1}(t,\varepsilon) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} U_m^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1-2h}) & 0 \\ \varepsilon^h\frac{dU_m^{(1)}}{dt}+U_m^{(1)}\Lambda_m^{(1)}+O(\varepsilon^{m+1-2h}) & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & U_m^{(2)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1-2h}) \\ 0 & \varepsilon^h\frac{dU_m^{(2)}}{dt}+U_m^{(2)}\Lambda_m^{(2)}+O(\varepsilon^{m+1-2h})\end{bmatrix}\right)\times$$

$$\times \operatorname{diag}\left\{\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right);\ \exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_m^{(2)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\}.$$

Аналогічну структуру має і фундаментальна матриця спряженої системи

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{A}^*(t)z) = -\widetilde{B}^*(t,\varepsilon)z:$$

$$\widetilde{Y}_{2n-1}(t,\varepsilon) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \widehat{U}_m^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\alpha}) & 0 \\ \varepsilon^h\frac{d\widehat{U}_m^{(1)}}{dt}-\widehat{U}_m^{(1)}(\Lambda_m^{(1)})^*+O(\varepsilon^{\alpha}) & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \widehat{U}_m^{(2)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\alpha}) \\ 0 & \varepsilon^h\frac{d\widehat{U}_m^{(2)}}{dt}-\widehat{U}_m^{(2)}(\Lambda_m^{(2)})^*+O(\varepsilon^{\alpha})\end{bmatrix}\right)\times$$

$$\times \operatorname{diag}\left\{\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_0^t (\Lambda_m^{(1)})^*(\tau,\varepsilon)d\tau\right);\ \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T (\Lambda_m^{(2)})^*(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\},$$

$\alpha = m+1-h$.

Введемо позначення

$$Y_m^{(1)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\Big\{\exp\Big(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(\tau,\varepsilon)d\tau\Big);0\Big\},$$

$$Y_m^{(2)}(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\Big\{0;\exp\Big(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_m^{(2)}(\tau,\varepsilon)d\tau\Big)\Big\},$$

де нульові блоки мають розмірності $(2n-l-1)\times(2n-l-1)$ та $l\times l$ відповідно. Тоді

$$Y_{2n-1}(t,\varepsilon) = Y_1(t,\varepsilon)+Y_2(t,\varepsilon),$$

де

$$Y_i(t,\varepsilon) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} U_m^{(1)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-2h}) & 0 \\ \varepsilon^h \frac{dU_m^{(1)}}{dt} + U_m^{(1)}\Lambda_m^{(1)} + O(\varepsilon^{m+1-2h}) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & U_m^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1-2h}) \\ 0 & \varepsilon^h \frac{dU_m^{(2)}}{dt} + U_m^{(2)}\Lambda_m^{(2)} + O(\varepsilon^{m+1-2h}) \end{bmatrix} \right) \times$$

$$\times Y_m^{(i)}(t,\varepsilon), i = 1, 2.$$

Тоді загальний розв'язок системи (29) можна подати у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = Y_{2n-1}(t,\varepsilon)c(\varepsilon) +$$

$$+ \int_0^t Y_1(t,\varepsilon)\widetilde{Y}_{2n-1}^*(\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau - \int_t^T Y_2(t,\varepsilon)\widetilde{Y}_{2n-1}^*(\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau - \xi(t,\varepsilon), \tag{34}$$

де $\xi(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(0; \varphi(t)(\psi^*\widetilde{L}\varphi(t))^{-1}\psi^*(t)\widetilde{f}(t,\varepsilon))$.

Підставивши вектор (34) у крайові умови (30), (31) дістанемо рівняння

$$(\widetilde{M}Y_{2n-1}(0,\varepsilon) + \widetilde{N}Y_{2n-1}(T,\varepsilon))c(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{m+1}b(\varepsilon) + \widetilde{M}\int_0^T Y_2(0,\varepsilon)\widetilde{Y}_{2n-1}^*(\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau - \widetilde{N}\int_0^T Y_1(T,\varepsilon)\widetilde{Y}_{2n-1}^*(\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau +$$

$$+ \widetilde{M}\xi(0,\varepsilon) + \widetilde{N}\xi(T,\varepsilon), \tag{35}$$

де $\widetilde{M} = \mathrm{diag}\{M_1, M_2\}, \widetilde{N} = \mathrm{diag}\{N_1, N_2\}, b(\varepsilon) = \mathrm{col}(b_1(\varepsilon); b_2(\varepsilon))$. Проаналізувавши структуру матриці $\widetilde{M}Y_{2n-1}(0,\varepsilon) + \widetilde{N}Y_{2n-1}(T,\varepsilon)$ і знехтувувши в ній експоненціально малими доданками, представимо її у вигляді

$$(\widetilde{M}Y_{2n-1}(0,\varepsilon) + \widetilde{N}Y_{2n-1}(T,\varepsilon)) = \begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0\Lambda_0 \end{bmatrix} + O(\varepsilon^{m+1-3h}).$$

За припущенням 8, ця матриця є невиродженою при досить малих ε. Тоді вектор $c(\varepsilon)$ однозначно визначається із рівняння (35):

$$c(\varepsilon) = \left(\begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0\Lambda_0 \end{bmatrix}^{-1} + O(\varepsilon^{m+1-3h}) \right) (\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon) + \widetilde{M}\int_0^T Y_2(0,\varepsilon)\widetilde{Y}_{2n-1}^*(\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau -$$

$$- \widetilde{N}\int_0^T Y_1(T,\varepsilon)\widetilde{Y}_{2n-1}^*(\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau + \widetilde{M}\xi(0,\varepsilon) + \widetilde{N}\xi(T,\varepsilon)).$$

Підставивши одержаний вектор $c(\varepsilon)$ в (34), розв'язок крайової задачі (29)-(31) представимо у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = Y_{2n-1}(t,\varepsilon) \left(\begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0\Lambda_0 \end{bmatrix}^{-1} + O(\varepsilon^{m+1-3h}) \right) \varepsilon^{m+1}b(\varepsilon) + (G\widetilde{f})(t,\varepsilon), \tag{36}$$

де $(G\widetilde{f})(t,\varepsilon)$ — оператор Гріна крайової задачі (29)-(31), який у даному випадку має вигляд

$$(G\widetilde{f})(t,\varepsilon) = \int_0^T G_0(t,\tau,\varepsilon)\widetilde{f}(\tau,\varepsilon)d\tau +$$

$$+ Y_{2n-1}(t,\varepsilon) \left(\begin{bmatrix} Q_0 \\ U_0\Lambda_0 \end{bmatrix}^{-1} + O(\varepsilon^{m+1-3h}) \right) (\widetilde{M}\xi(0,\varepsilon) + \widetilde{N}\xi(T,\varepsilon)) - \xi(t,\varepsilon),$$

де $G_0(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна відповідної однорідної крайової задачі, яка має наступний вигляд:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases}Y_1(t,\varepsilon)\widetilde{Y}^*_{2n-1}(\tau,\varepsilon)+K_m(t,\tau,\varepsilon), & \text{якщо} \quad 0\le\tau<t\le T,\\ -Y_2(t,\varepsilon)\widetilde{Y}^*_{2n-1}(\tau,\varepsilon)+K_m(t,\tau,\varepsilon), & \text{якщо} \quad 0\le t\le\tau\le T,\end{cases}$$

де

$$K_m(t,\tau,\varepsilon)=Y_{2n-1}(t,\varepsilon)\left(\begin{bmatrix} Q_0\\ U_0\Lambda_0\end{bmatrix}^{-1}+O(\varepsilon^{m+1-3h})\right)\widetilde{M}Y_2(0,\varepsilon)\widetilde{Y}^*_{2n-1}(\tau,\varepsilon)-$$

$$-Y_{2n-1}(\tau,\varepsilon)\left(\begin{bmatrix} Q_0\\ U_0\Lambda_0\end{bmatrix}^{-1}+O(\varepsilon^{m+1-3h})\right)\widetilde{N}Y_1(T,\varepsilon)\widetilde{Y}^*_{2n-1}(\tau,\varepsilon).$$

Перейшовши в рівності (36) до оцінок за нормою і взявши до уваги умову 7° та обмеженість всіх матричних і векторних функцій, які містяться в правій частині цієї рівності, дістанемо оцінку $\|y_m(t,\varepsilon)\|\le\varepsilon^{m+1-3h}c$, де c — деяка стала, що не залежить від ε. Повертаючись до заміни (28), дістанемо оцінку

$$\|\widetilde{x}_m(t,\varepsilon)\|\le\varepsilon^{m+1-3h}c.$$

У результаті проведених міркувань приходимо до наступного твердження.

Теорема 1. *Якщо квадратична в'язка матриць $L(t,\lambda)$ має на відрізку $[0;T]$ простий спектр, а саме: один нескінченний та $2n-1$ скінченних елементарних дільників і виконуються умови 1–8, то при досить малих ε існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), що виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=x_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1-3h}),$$

в якій вектор $x_m(t,\varepsilon)$ визначаються за описаним алгоритмом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Yakovets V.P., Vira M.B. *On the construction of asymptotic solutions two-point boundary problems for degenerate singularly perturbed systems of differential equations*// Nonlinear Oscillations. – 2010. – V.13, №2. – P. 272–286. (in Ukrainian)
2. Vira M.B. *Two-point boundary value problem for degenerate singularly perturbed system of differential equations in the case of multiple spectrum of the main operator*// Proceedings of IAPM NAS of Ukraine. – 2009. – V.18. – P. 19–28. (in Ukrainian)
3. Vira M.B. *On the construction of an asymptotic solution two-point boundary value problem for linear singularly perturbed differential algebraic system*// Dynamical Systems: Interdepartmental Scientific Compilation. — 2011. — V.1(29), №1. – P. 15–30. (in Ukrainian)
4. Vira M.B. *On constructing of asymptotic solution of the boundary-value problem for the linear degenerated singularly perturbed system of differential equations in the critical case*// Proceedings of IAPM NAS of Ukraine. – 2013. – V.26. – P. 31–39. (in Russian)
5. Samoilenko A.M., Shkil M.I., Yakovets V.P. Linear differential systems degenerate equations — Kyiv: Vyshcha Schkola, 2000. — 294 p. (in Ukrainian)

Nizhyn Gogol State University

Надійшло 20.01.2015