УДК 616.1:001.891.573

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БІФУРКАЦІЇ СУДИННОЇ ДІЛЯНКИ З ДЕТАЛЬНІСТЮ, ЩО ВІДПОВІДАЄ КОНТРОЛЕВІ ХВОРОГО В СЕРЕДОВИЩІ LABVIEW

С.Н. Маковеев, Д. Ш. Газизова, А.А. Горбач, В.А. Ліщук, С.В. Фролов

Науковий центр серцево-судинної хірургії ім. А.Н. Бакулева РАМН, Москва; Тамбовський державний технічний університет, Тамбов; Клінічна лікарня «Феофанія», Київ

Представлено математичний опис і реалізацію в середовищі LabVIEW моделі біфуркації судини. Враховані об'єм, тиск і потік, а також їхня залежність від жорсткості, тонусу, опору і інерційності. Модель побудована в термінах, що дозволяють включити біфуркацію до складу розгалуженої багаторівневої системи судин. Досліджено статичні і динамічні відношення між оцінками стану і функцією біфуркації судинної ділянки і її властивостей. Встановлено роль кожної властивості судини у формуванні потоку, тиску й об'єму.

Ключові слова: *судина, біфуркація, математична модель, середовище LabVIEW.*

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИФУРКАЦИИ СОСУДИСТОГО УЧАСТКА С ДЕТАЛЬНОСТЬЮ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ КОНТРОЛЮ БОЛЬНОГО В СРЕДЕ LABVIEW

С.Н. Маковеев, Д. Ш. Газизова, А.А. Горбач, В.А. Лищук, С.В. Фролов

Научный центр сердечно-сосудистой хирургии им. А.Н. Бакулева РАМН, Москва; Тамбовский государственный технический университет, Тамбов; Клиническая больница «Феофания», Киев

Представлены математическое описание и реализация в среде LabVIEW модели бифуркации сосуда. Учтены объём, давление и поток, а также их зависимость от жёсткости, тонуса, сопротивления и инерционности. Модель построена в терминах, позволяющих включить бифуркацию в состав разветвлённой многоуровневой системы сосудов. Исследованы статические и динамические отношения между оценками состояния и функцией бифуркации сосудистого участка и его свойствами. Установлены роли каждого свойства сосуда в формировании потока, давления и объёма.

Ключевые слова: сосуд, бифуркация, математическая модель, среда LabVIEW.

RESEARCH OF MATHEMATICAL MODEL OF BIFURCATION OFVESSEL SITE WITH DETAILING CORRESPONDING TO PATIENT'S CONTROL IN LABVIEV ENVIRONMENT

S.N. Makoveyev, D.Sh. Gazyzova, A.A. Gorbach, V.A. Lyschuk, S.V. Frolov

Scientific Centrel of Cardiovascular Surgery by A.N. Bakulev of RAMS, Moscow; Tambov State Technical University, Tambov; Clinical Hospital "Feofania", Kyiv

The mathematical description of the model of bifurcation vessel and realization in LabVIEW environment is given in the article. The volume, pressure and blood flow, and also their dependence on rigidity, tone, resistance and lag effect are considered. The model is constructed in the terms, allowing to extend the description to the branched multilevel system of vessels. Static and dynamic attitudes between state estimations and function of a vessel site and its properties are investigated. Roles of each property of a vessel in formation of blood flow, pressure and volume are established (are illustrated by diagrams).

Key words: vessel, bifurcation, mathematical model, LabVIEW environment.

В даний час для вивчення судинного русла застосовують математичні моделі, описані як у частинних похідних [1], так і в звичайних [2]. Незалежно від форми представлення, модель судини (разом із серцем) є основою для опису серцево-судинної системи (ССС) у цілому [3]. Уперше задачі даного класу були

© С.Н. Маковеев, Д. Ш. Газизова, А.А. Горбач, В.А. Ліщук, С.В. Фролов

поставлені і вирішені В.А. Ліщуком, Зонненбліком, Дефаресом [3 – 10]. У роботі [4] була представлена математична модель елементарної судинної ділянки, на основі якої була побудована найпростіша довга судина з послідовно з'єднаних модулів [5]. За результатами цих досліджень з'ясувалося, що модель судини може стати таким же інструментом в арсеналі лікаря, як тиск крові або частота серцевих скорочень, а також допомогти на один крок наблизитися до розуміння причин серцево-судинних порушень [4]. Для побудови моделі ССС необхідна, поряд з моделлю елементарної ділянки судини, наявність моделі біфуркації судини, дослідженню й обґрунтуванню якої дотепер приділялося менше уваги [11 – 17]. Математична модель біфуркації судинної ділянки сумісна з моделлю елементарної судини і може бути включена в розгалужену судинну мережу.

В даний час реальний клінічний контроль вимагає, щоб математична модель відображала обсяг (V), тиск (P, гемодинамічний і тканинний) і об'ємний потік крові (q) у судинну ділянку з інших судин і з неї в інші ділянки судинної системи, а також об'ємний потік рідини з розглянутої судини в тканини і з тканин у судинну ділянку. Ці змінні (V, P, q) характеризують функції ділянки судинної системи.

Функції залежать від властивостей судинної ділянки і прилеглих до неї тканин: середньої жорсткості судинної стінки (e) разом із прилеглими тканинами, максимального об'єму судини, яка при наповненні її кров'ю розправляється, але ще не визначається розтяганням стінок (U), резистивного опору кровотоку (r^{-1}), індуктивного опору (l^{-1}), що залежить від маси крові і тканин, що беруть участь у зміні руху (накопичує енергію), і, нарешті, від провідності (r_T) стінок судини (як активної, так і пасивної), що відображає обмін між судинною системою і тканинами. Ці параметри (e, U, r), що характеризують властивості судини, змінюються, як правило, значно повільніше, ніж оцінки функції (V, P, q).

Входами в судинну ділянку j (рис. 1) є тиски в сусідніх судинах (P_k, P_v, P_b), тканинний тиск (P_{Tj}), приве-

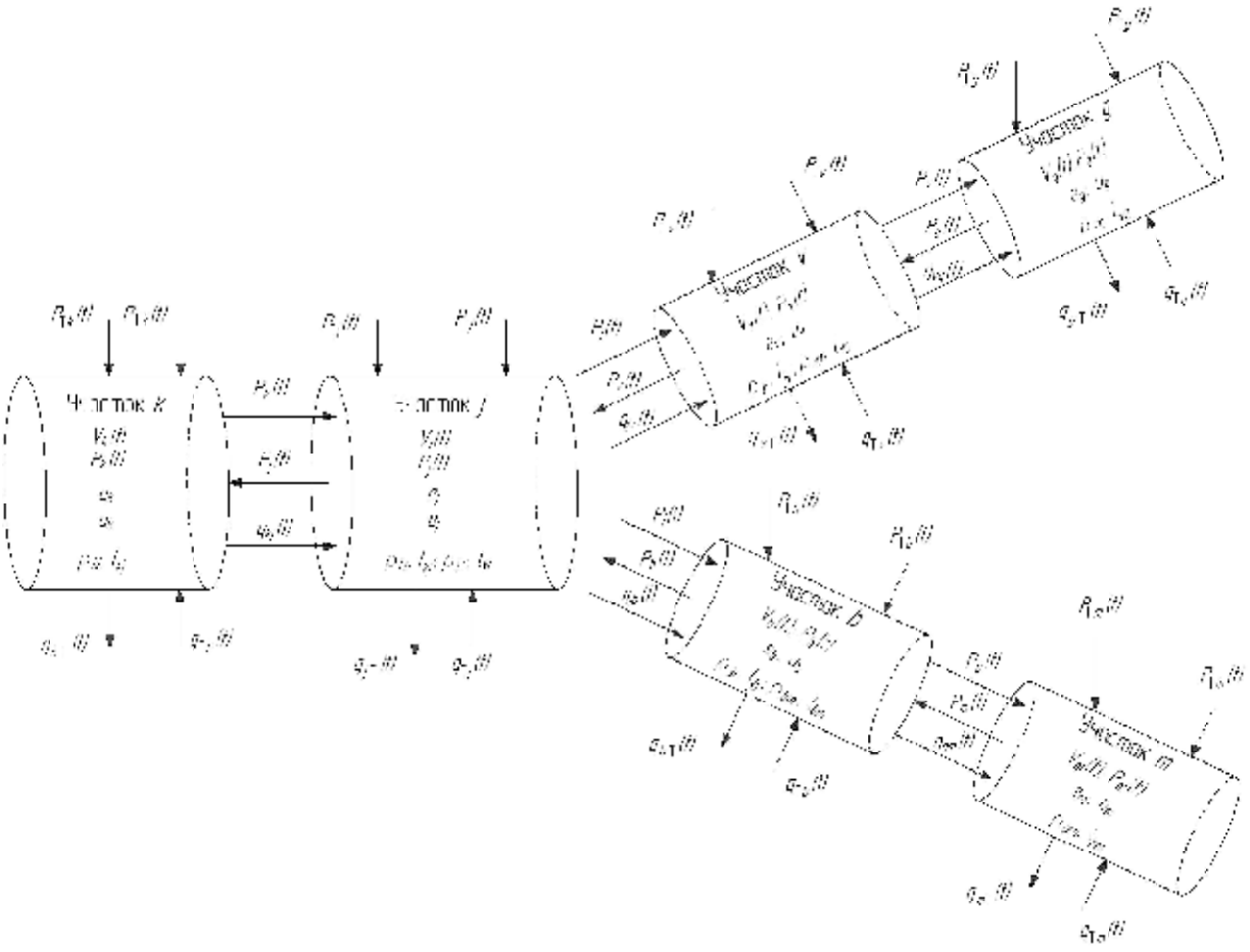


Рис. 1. **Потоки крові в змодельованій біфуркації судинної ділянки. Стрілками показані позитивний напрямок кровотоку і дія тиску на судину.**

Примітка. P – тиск, V – об'єм, e – жорсткість, U – розправляючий об'єм, для ділянки судини ρ, – провідність; l- зворотна величина інерційності потоку крові. k, j, v, b, g, m – індекси судинних ділянок (опис виконується для ділянок j, v, b). $P_Г$ – тиск, обумовлений гравітацією, P_T – тканинний тиск, $q_{jT}(t)$, $q_{vT}(t)$, $q_{bT}(t)$ – потоки із судин у тканину, $q_{Tj}(t)$, $q_{Tv}(t)$, $q_{Tb}(t)$ – потоки з тканини в судини.

дена до тиску дія гравітації ($P_{Гj}$); у ділянки *v* і *b* – тиски в сусідніх судинах P_j, P_g *і* P_j, P_m, тканинний тиск P_{Tv} *і* $P_{Гv}$, приведена до тиску дія гравітації $P_{Гv}$ *і* $P_{Гb}$ відповідно. У результаті взаємодії ділянок визначаються кровотоки між ними (q_{jv}, q_{jb}, q_{vg}, q_{bm}, q_{kj}).

Концептуальність математичної моделі біфуркації судини передбачає можливість використання відомих методів аналітичного і/або чисельного дослідження. Основні труднощі при моделюванні і дослідженні ССС зв'язані з необхідністю відображати досить велику кількість судинних ділянок (від 3 до 500). Також викликають проблеми нелінійності стаціонарності, що властиві біологічним об'єктам і є причиною істотних відхилень станів судини від значень норми. У цій статті будемо розглядати робочий діапазон зміни функцій і властивостей судини, що обумовлено фізіологічними і клінічними вимогами.

У задачах клінічної практики необхідно відображати розгалужену мережу ділянок судинного русла різних конфігурацій для кожного індивідуального випадку. Мережу ділянок зручно представляти окремими модулями (судина, біфуркація, судина, що містить клапан). Ця задача синтезу моделі судинного русла індивідуальної конфігурації повинна опиратися на загальні характеристики і представлення, властиві здоровим людям або всьому класові хворих при даному захворюванні. Ми розглянемо впливи цих властивостей на біфуркацію судинної ділянки.

Вирішити описані вище труднощі в істотній мірі дозволяють засоби LabVIEW, які ми використовуємо в цьому дослідженні.

Виведення рівнянь

Розглянута біфуркація складається з ділянок: *k, j, v, b, g, m* (рис. 1). Опис будемо вести для ділянок *j, v, b*. Суміжними приймемо ділянки *k, g* і *m*. Кожна ділянка має властивості: *e* – жорсткість (зворотна величина еластичності *c*) і *U* – ненапружений об'єм; Кровотік, що випливає з *j-ї* ділянки судини, складається з двох кровотоків: $q_{jv}(t)$ і $q_{jb}(t)$.

Гідравлічний тиск крові в ділянках судини приймемо тим більшим, чим більше крові в судині. Приймемо припущення, що хворий знаходиться в горизонтальному положенні (лежить у ліжку), тоді сили гравітації, що діють на судину, розглядати не будемо: $P_{Tj}(t)$ ° $P_{Tv}(t)$ ° $P_{Tb}(t)$ ° *0* або стала мала величина [3].

$$P_j(t) = e_j\left(V_j(t) - U_j\right) + P_{\mathrm{T}j}(t) \quad (1)$$

$$P_v(t) = e_v\left(V_v(t) - U_v\right) + P_{\mathrm{T}v}(t) \quad (2)$$

$$P_b(t) = e_b\left(V_b(t) - U_b\right) + P_{\mathrm{T}b}(t) \quad (3)$$

Жорсткості e_j, e_v, і e_b стінок судинних ділянок залишаються постійними лише в робочому діапазоні. В умовах патології величина об'єму крові може виходити з цього діапазону. Тоді жорсткість буде нелінійною, тобто істотно залежатиме від заповнення ділянки судини кров'ю.

Об'єми крові в судинних ділянках. Зміна об'єму крові в судині обумовлюється її припливом q_{kj} *(t)* і відтоком із судинних ділянок, а також дифузією рідини через стінки судини:

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = q_{kj}(t) - q_{jv}(t) - q_{jb}(t) - q_{j\mathrm{T}}(t) + q_{\mathrm{T}j}(t), \quad (4)$$

$$\frac{dV_v(t)}{dt} = q_{jv}(t) - q_{vg}(t) - q_{v\mathrm{T}}(t) + q_{\mathrm{T}v}(t), \quad (5)$$

$$\frac{dV_b(t)}{dt} = q_{jb}(t) - q_{bm}(t) - q_{b\mathrm{T}}(t) + q_{\mathrm{T}b}(t). \quad (6)$$

Для великих судин і при дослідженні власне гемодинаміки потоком рідини через стінку судини звичайно зневажають *(q_{Tj} (t) = q_{Tv} (t) =q_{Tb} (t) = 0)*, тому що в цьому випадку величини q_{Tj} *(t)*, q_{Tv} *(t)*, q_{Tb} *(t)* малі, порівняно з кровотоком по судині.

Вхідні і вихідні потоки *(q_{kj} (t), q_{jv} (t), q_{jb} (t), q_{bm} (t), q_{vg} (t))* будуть залежати від градієнта тисків P_k *(t)* – P_j*(t)*, P_j*(t)* – P_v*(t)*, P_j*(t)* – P_b*(t)*, P_b*(t)* – P_m*(t)*, P_v*(t)* – P_g*v(t)*, провідностей (r_{jv}, r_{jb}, r_{bm}, r_{vg}) між ділянками (k, j, v, b, g, m), а також зворотних величин інерційностей (l_{jv}, l_{jb}, l_{bm}, l_{vg}) потоків і стінок судини, та прилягаючих до них тканин що переміщаються внаслідок зміни потоків:

$$\frac{dq_{kj}(t)}{dt} = l_{kj} \cdot \left[P_k(t) - P_j(t) - \frac{1}{r_{kj}} \cdot q_{kj}(t) \right], \quad (7)$$

$$\frac{dq_{jv}(t)}{dt} = l_{jv} \cdot \left[P_j(t) - P_v(t) - \frac{1}{r_{jv}} \cdot q_{jv}(t) \right], \quad (8)$$

$$\frac{dq_{jb}(t)}{dt} = l_{jb} \cdot \left[P_j(t) - P_b(t) - \frac{1}{r_{jb}} \cdot q_{jb}(t) \right], \quad (9)$$

$$\frac{dq_{vg}(t)}{dt} = l_{vg} \cdot \left[P_v(t) - P_g(t) - \frac{1}{r_{vg}} \cdot q_{vg}(t) \right], \quad (10)$$

$$\frac{dq_{bm}(t)}{dt} = l_{bm} \cdot \left[P_b(t) - P_m(t) - \frac{1}{r_{bm}} \cdot q_{bm}(t) \right]. \quad (11)$$

Потрібно врахувати потоки із судинних ділянок у тканину (q_{jT}, q_{vT}, q_{bT}) під дією різниці гідростатичних тисків *(P_j(t) – P_T(t), P_v(t) – P_T(t), P_b(t) – P_T(t))* і з тканини в судинні ділянки *(q_{Tj}, q_{Tv} (t), q_{Tb}(t))* через стінку

останньої під дією різниці онкотичних тисків ($P^o_T(t) - P^o_j(t)$, $P^o_T(t) - P^o_j(t)$, $P^o_T(t) - P^o_b(t)$). Потоки між судиною і тканиною прийнято представляти в такий спосіб:

$$q_{jT}(t) = r_{jT}(t) \cdot \left[P_j(t) - P_T(t)\right], \quad (12)$$

$$q_{vT}(t) = r_{vT}(t) \cdot \left[P_v(t) - P_T(t)\right], \quad (13)$$

$$q_{bT}(t) = r_{bT}(t) \cdot \left[P_b(t) - P_T(t)\right], \quad (14)$$

$$q_{Tj}(t) = r^{O}_{Tj}(t) \cdot \left[P^{O}_T(t) - P^{O}_j(t)\right], \quad (15)$$

$$q_{Tv}(t) = r^{O}_{Tv}(t) \cdot \left[P^{O}_T(t) - P^{O}_j(t)\right], \quad (16)$$

$$q_{Tb}(t) = r^{O}_{Tb}(t) \cdot \left[P^{O}_T(t) - P^{O}_b(t)\right]. \quad (17)$$

Ці вирази описують переміщення рідини через стінки судин, переважно капілярів. Складову потоку рідини із судини в тканину (q_{jT}, q_{vT}, q_{bT}) називають фільтрацією, а з тканини в судину (q_{Tj}, q_{Tv}, q_{Tb}) – реабсорбцією. Коефіцієнти $P^0_{Tj}(t)$, $P^0_{Tv}(t)$, $P^0_{Tb}(t)$ – проникності, або провідності рідини під дією онкотичних сил.

Серцево-судинна система забезпечує тканини й органи необхідним кровотоком. Тому дуже часто її описують разом із системою дихання, залозами й іншими системами організму. Оскільки в даній роботі ми займаємося функцією біфуркації судини без взаємодії із суміжною підсистемою, то співвідношення (12) – (17) у модель не включені.

Реалізація моделі біфуркації судинної ділянки в LabVIEW

Необхідні нам вихідні величини $P_j(t)$, $P_v(t)$, $P_b(t)$, $V_j(t)$, $V_v(t)$, $V_b(t)$, $q_{kj}(t)$, $q_{jv}(t)$, $q_{jb}(t)$ можна знайти, розв'язавши систему рівнянь (1)-(11). Значення $q_{vg}(t)$, і $q_{bm}(t)$, є вхідними величинами сусідніх судинних ділянок g і m відповідно. При цьому будемо вважати усі відношення лінійними і стаціонарними, але при необхідності можна легко перейти до нелінійних і нестаціонарних відношень.

Отримані результати для зручності і наочності виведемо у вигляді графіків $\{P_j(t), P_v(t), P_b(t), V_j(t), V_v(t), V_b(t), q_{kj}(t), q_{jv}(t), q_{jb}(t)\}$ і таблиць. Вхідні величини ts, te, d, V_j, U_j, $q_{kj}(0)$, e_j, l_{kj}, l_{jv}, l_{jb}, r_{kj}, r_{jv}, r_{jb}, V_v, U_v, e_v, l_{vg}, r_{vg}, V_b, U_b, e_b, l_{bm}, r_{bm}, q_{vg}, q_{bm} розмістимо на панель віртуального приладу (ВП), де їх можна задавати постійними величинами і функціями часу (рис. 2).

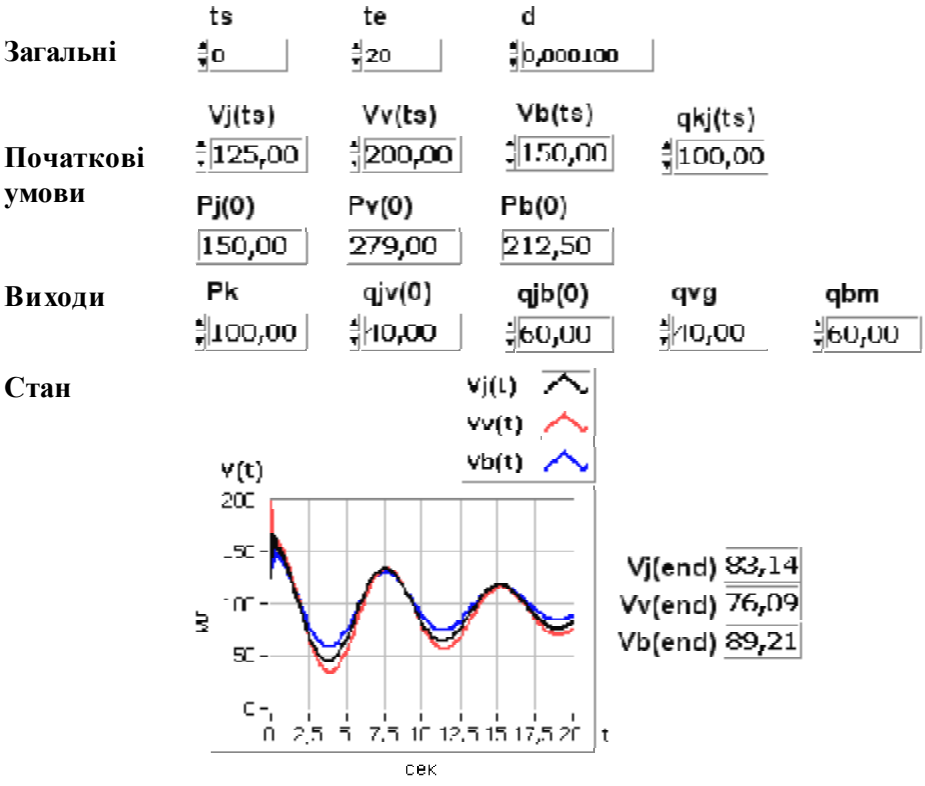


Рис. 2. **Панель віртуального приладу. З панелі задаються початкові умови, властивості і виводяться результати розрахунку.**

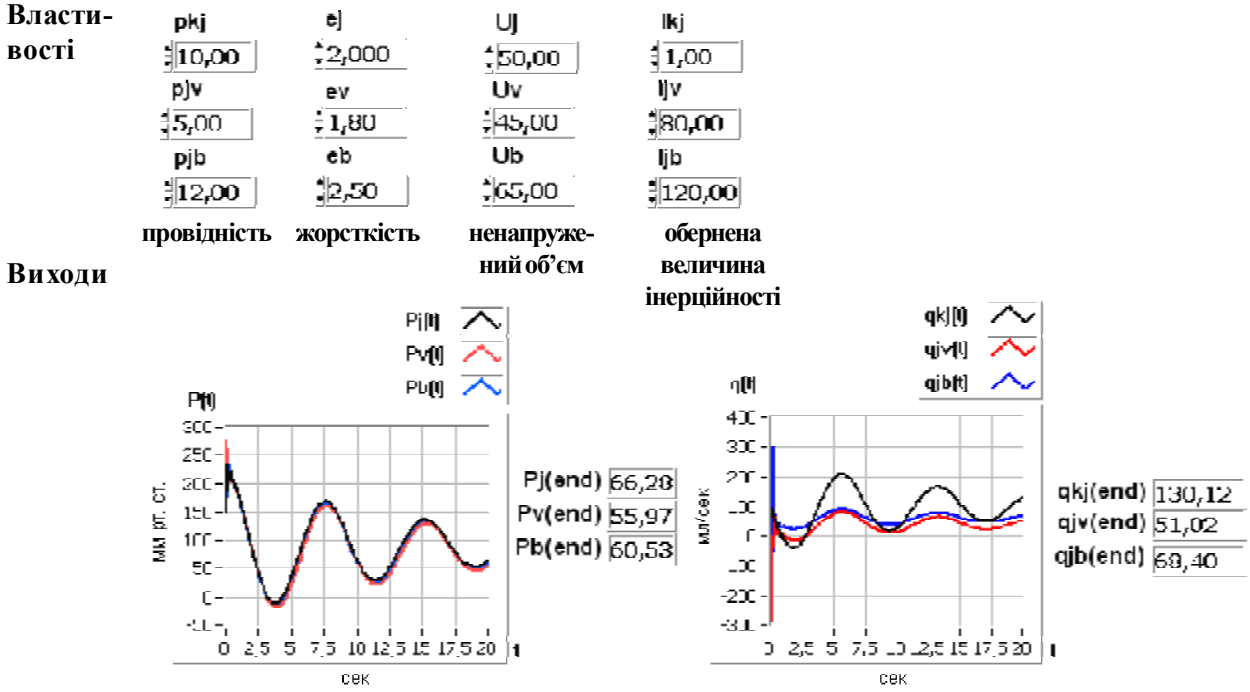


Рис. 2. (продовження) **Панель віртуального приладу. З панелі задаються початкові умови, властивості і виводяться результати розрахунку.**

Модель з пульсацією тиску на вході $P_k\ (t)$ в судину представлена на рисунку 3. У цьому випадку тиск змінюється за співвідношенням $P_k\ (t) = A \cdot \sin(\pi \cdot t/T)$, де A і T – константи, які можна змінювати на лицевій панелі ВП.

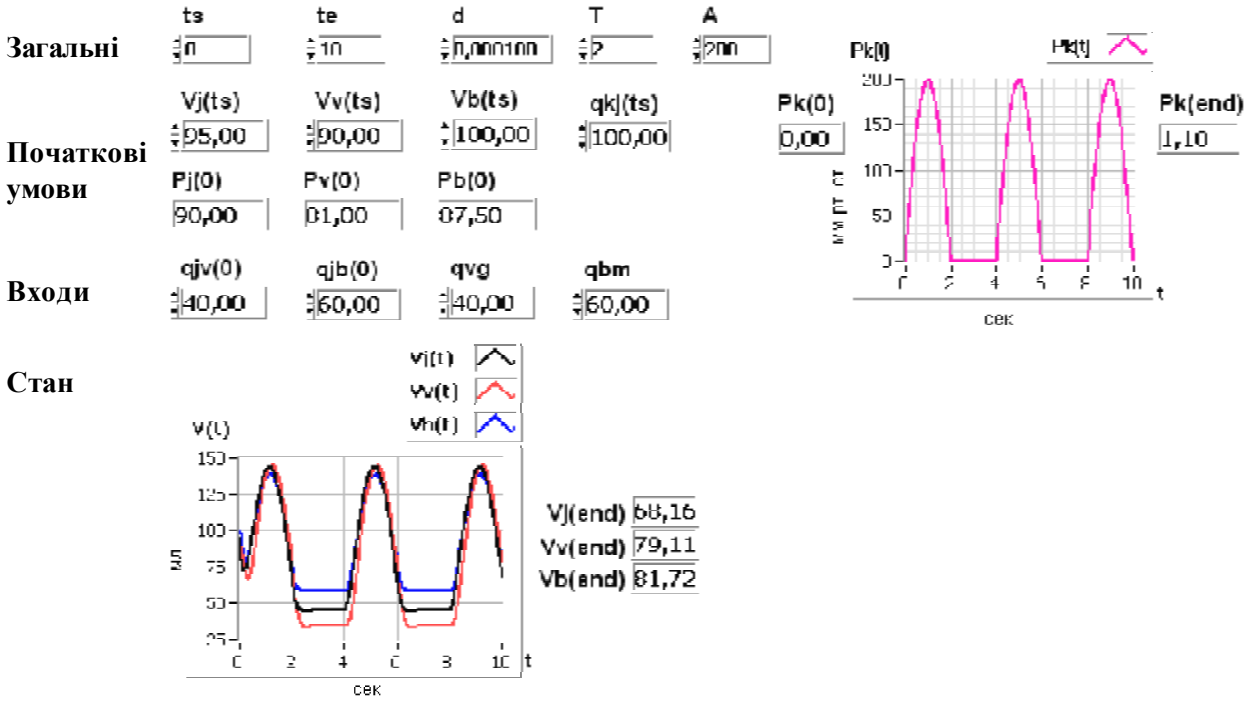


Рис. 3. **Модель біфуркації судинної ділянки з пульсацією тиску на вході.**

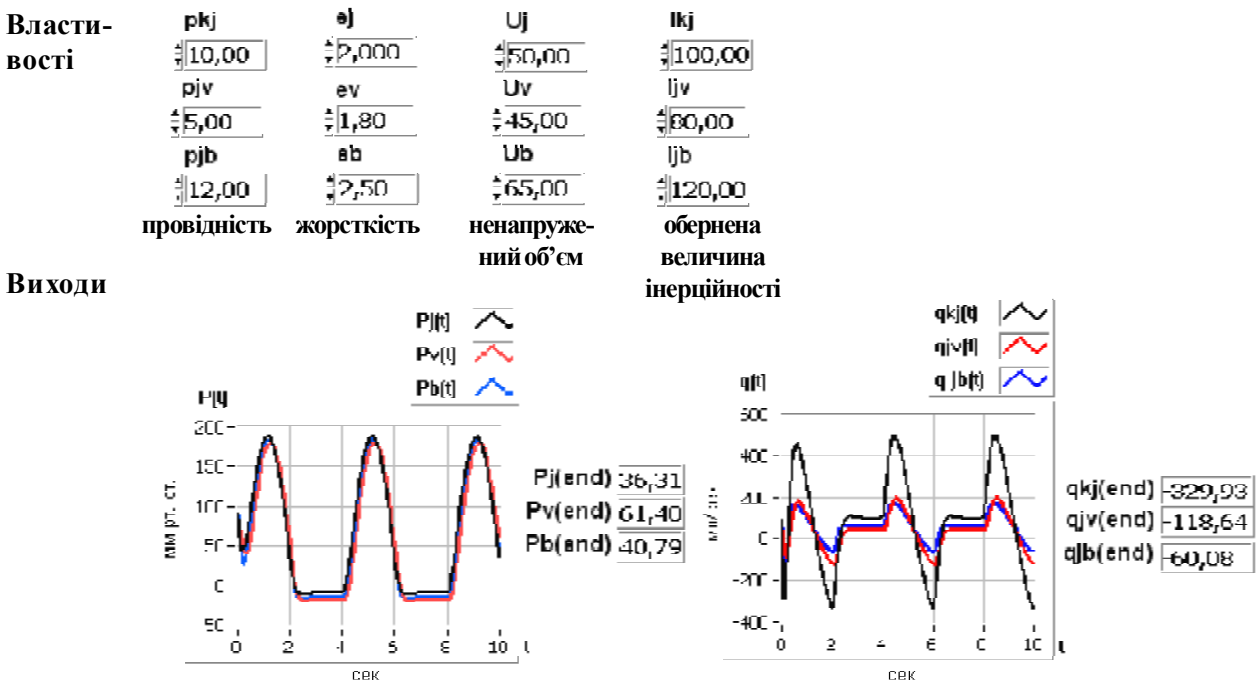


Рис. 3. (продовження) **Модель біфуркації судинної ділянки з пульсацією тиску на вході.**

Модуль біфуркації судинної ділянки (з якого легко синтезувати розгалужену мережу судин) показаний на рисунку 4. Оскільки кількість вхідних і вихідних величин у термінал досить велика, а середовище LabVIEW має обмеження на їхню кількість (≤28), тому зручно представляти параметри у вигляді масивів: $\{P_j(t), P_v(t), P_b(t)\}$, $\{V_j(t), V_v(t), V_b(t)\}$, $\{q_{kj}(t), q_{jv}(t), q_{jb}(t)\}$, $\{q_{vg}(t), q_{bm}(t)\}$, $\{l_{kj}, l_{jv}, l_{jb}\}$, $\{e_j, e_v, e_b\}$ r_{kj}, r_{jv}, $r_{jb}\}$, $\{U_j, U_v, U_b\}$. Панель діаграми (програми) для двох послідовних ділянок біфуркації представлена на рисунку 5. Кожна ділянка біфуркації судинної ділянки може бути представлена у вигляді окремого модуля, що зручно включати в судинну мережу, як при паралельному розташуванні судин, так і при послідовному розгалуженні [5].

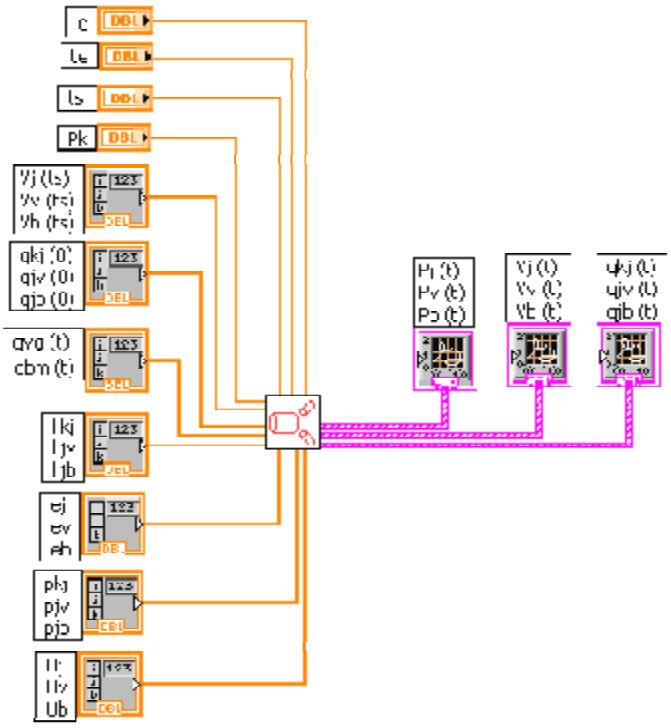


Рис. 4. **Модуль біфуркації судинної ділянки.**

Модуль біфуркації розташований у центрі у вигляді квадрата, на якому нарисоване роздвоєння судини. Він являє собою окрему функцію, що має вхідні аргументи, розташовані ліворуч: час початку збурювання *ts*, час закінчення рахунку *te*, крок інтегрування *d*, тиск на вході в біфуркацію P_k, початкові умови (об'єми $V_j(ts)$, $V_v(ts)$, $V_b(ts)$ і вхідні потоки в ділянки біфуркації $q_{kj}(0)$, $q_{jv}(0)$, $q_{jb}(0)$), значення вихідних потоків з ділянок біфуркації ($q_{vg}(t)$, $q_{bm}(t)$), властивості ділянок біфуркації: зворотні величини інерційності потоку крові, жорсткості, провідності r_{kj}, r_{jv}, r_{jb}, розправляючі об'єми U_j, U_v, U_b. Початкові умови, значення вхідних потоків і властивості ділянок біфуркації подаються в модуль у вигляді окремих масивів. Праворуч від модуля розташовані вихідні аргументи: значення тисків $P_j(t)$, $P_v(t)$, $P_b(t)$, об'ємів $V_j(t)$, $V_v(t)$, $V_b(t)$, вхідних потоків $q_{kj}(t)$, $q_{jv}(t)$, $q_{jb}(t)$ у ділянках біфуркації від початку до закінчення рахунку. Вихідні аргументи можна виводити у вигляді графіків і масивів. Лінії відображають зв'язки між вхідними, вихідними величинами і модулем.

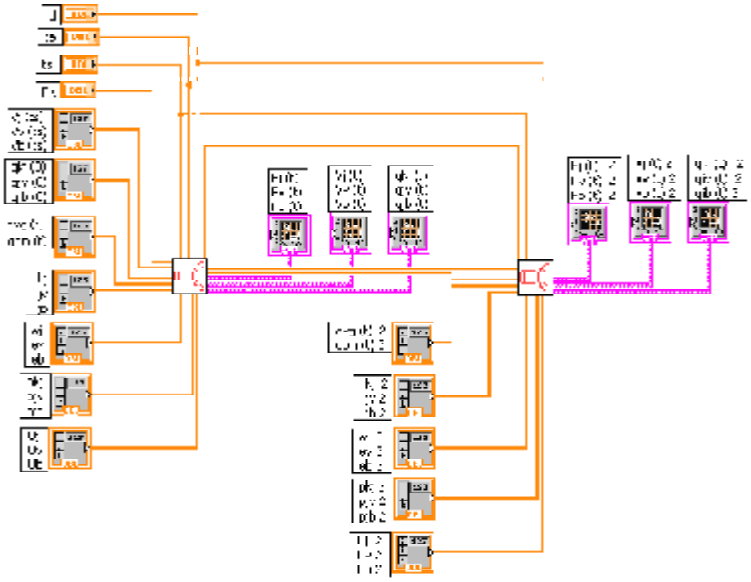


Рис. 5. **Діаграма моделі двох ділянок біфуркації судинного русла.**

Показано послідовне з'єднання двох ділянок біфуркафії у вигляді двох з'єднаних окремих модулів, що мають різні властивості. Вихідні аргументи першого модуля біфуркації є вхідними для другого. Час початку збурювання *ts*, час закінчення рахунку *te* і крок інтегрування *d* є загальними для двох ділянок.

Реалізація моделі біфуркації судинної ділянки в LabVIEW

Вибір початкових умов і чисельних оцінок параметрів. Для прикладу розглянемо біфуркацію судинної ділянки артеріального басейну. Цей приклад актуальний у зв'язку з роллю артеріального резервуара у функціонуванні і дослідженнях серцево-судинної системи. Оцінки параметрів моделі були отримані експериментально і опиралися на роботи [4, 5]. У таблиці 1 наведені значення параметрів моделі для *j-ї*, *v-ї* і *b-ї* ділянок біфуркації судинного русла.

Таблиця 1. **Оцінки параметрів моделі ділянок *j, v, b* біфуркації судинного русла**

Параметр	Позначення	Кількісна оцінка			Розмірності ^{3} L
		ділянки *j*	ділянки *v*	ділянки *b*	
1	2	3	4	5	6
Час	t	0 – 60			с
Час початку збурювання Час закінчення рахунку	t_0 або ts te	Наприклад, 1 – 10			с
Крок дослідження	d	0,0001 – 0,01			с
Провідність або проникність Опір	ρ r^{-1}	10 0,1	5 0,2	12 0,083	см^3/(тор*с) (тор*с)/ см^3

Продовження табл. 1.

1	2	3	4	5	6
Жорсткість Еластичність	e $c = e^{-1}$	2 0,5	1,8 0,56	2,5 0,4	тор/ см^3 см^3 / тор
Інерційність, зворотна величина інерційності	l^{-1} l	0,01 100	0,05 80	0,0083 120	(тор*с^2)/ см^3 см^3/(тор*з^2)
Ненапружений об'єм	U	50	45	65	мл, см^3
Тиск номінальний	P	100	86	54	тор або мм рт.ст.
Обсяг номінальний	V	250	200	220	мл, см^3
Номінальний потік	q	100	40	60	мл/с, см^3/с

Постановка задачі. Необхідно знайти перехідні режими для $V_j(t)$, $V_v(t)$, $V_b(t)$, $P_j(t)$, $P_v(t)$, $P_b(t)$, $q_{kj}(t)$, $q_{jv}(t)$, $q_{jb}(t)$ при стрибкоподібній зміні P_k, q_{vg}, q_{bm}, P_{kj}, e_j, l_{kj}, U_j і припущенні, що усі вихідні стани відповідають статиці.

Хід і результати дослідження. Спочатку знайдемо сталий стан (steady-state), а потім визначимо реакції тисків, обсягів і потоків на зміни параметрів.

Після закінчення перехідного процесу одержимо квазістатичний стан. У нашому окремому випадку будемо мати: time_start (*ts*)=0, time_end (*te*)=0, крок *d*=0,0001 с. Вхідний тиск P_k задано постійним. Він в ході всього дослідження дорівнює 100 тор, тобто P_k(te)=100 тор. Початкові значення об'ємів у ділянках *j*, *v*, *b* можна задавати різними величинами. Якщо ж досягнутий статичний режим, $V_j(ts)=V_j(te)=95$ мл, $V_v(ts)=V_v(te)$=90,56 мл, $V_b(ts)=V_b(te)$=99 мл, величина потоку в судину в перехідному режимі міняється, але якщо досягнутий стан steady-state, то в нашому прикладі $q_{kj}(ts)=100$ см$^{-3}$*с$^{-1}$ і q_{kj}(te)=100 см$^{-3}$*с$^{-1}$. Потоки із судин задані постійними q_{vg} = 40 см$^{-3}$*с$^{-1}$, q_{bm} = 60 см$^{-3}$*с$^{-1}$. Провідності r_{kj}, r_{jv}, r_{jb}, жорсткості (e_j, e_v, e_b), ненапружені об'єми (U_j, U_v, U_b) і зворотні величини інерційності (l_{kj}, l_{jv}, l_{jb}) не змінювалися, поки був досягнутий статичний режим. Однак у наших дослідженнях ми будемо їх змінювати, щоб зрозуміти вплив кожної з цих властивостей на формування і зміну функцій. Тепер перейдемо від одного стану статики до статичної характеристики.

Статичні залежності основних параметрів від вхідного тиску P_k представлені в таблиці 2. Зміна P_k викликає перехідний процес. Після закінчення перехідного процесу значення V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} відображаються на панелі ВП і заносяться в таблицю.

Таблиця 2. **Статичні залежності тиску, об'єму і потоку від вхідного тиску P_k при q_{vg}=const (40 мл/с), q_{bm}=const (60 мл/с)**

P_k	V_j	V_v	V_b	P_j	P_v	P_b	q_{kj}	q_{jv}	q_{jb}
25	57,5	48,9	69	15	7	10	100	40	60
50	70	62,8	79	40	32	35	100	40	60
100	95	90,56	99	90	82	85	100	40	60
200	145	146,1	139	190	182	185	100	40	60
400	245	257,2	219	390	382	385	100	40	60

Зрозуміло, що сталий процес обумовлений як внутрішніми властивостями, так і зовнішніми впливами. У таблиці 2 видно, що незважаючи на багаторазову зміну вхідного тиску (перший стовпець), потоки по досягненню статики залишаються незмінними (три останніх стовпці). Це відбувається тому, що об'єми і, слідом за ними, тиски ростуть доти, поки припливи і відтоки не стануть однаковими.

Динаміка (перехідний процес) V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} при східчастій зміні Pk від 100 тор до 400 тор показана на рисунку 6. Вихідний стан – описана вище статика.

Згодом потоки приймають статичні значення (рис. 6), однак їхні величини в перехідному режимі можуть досягати значних показників (збільшення в 5-15 разів у порівнянні з початковим), що на трендах моніторів не будуть адекватно відображені, хоча небезпечні в таких ситуаціях як перетиснення аорти, підключення шунта, інтубація і т.п. При цьому всі три функції потоків мають явно виражений екстремум.

Статичні залежності оцінок функцій біфуркації від зміни вихідних потоків q_{vg} або q_{bm} представлені, відповідно, в таблиці 3 і таблиці 4. При цьому один з потоків залишається постійним, а інший потік

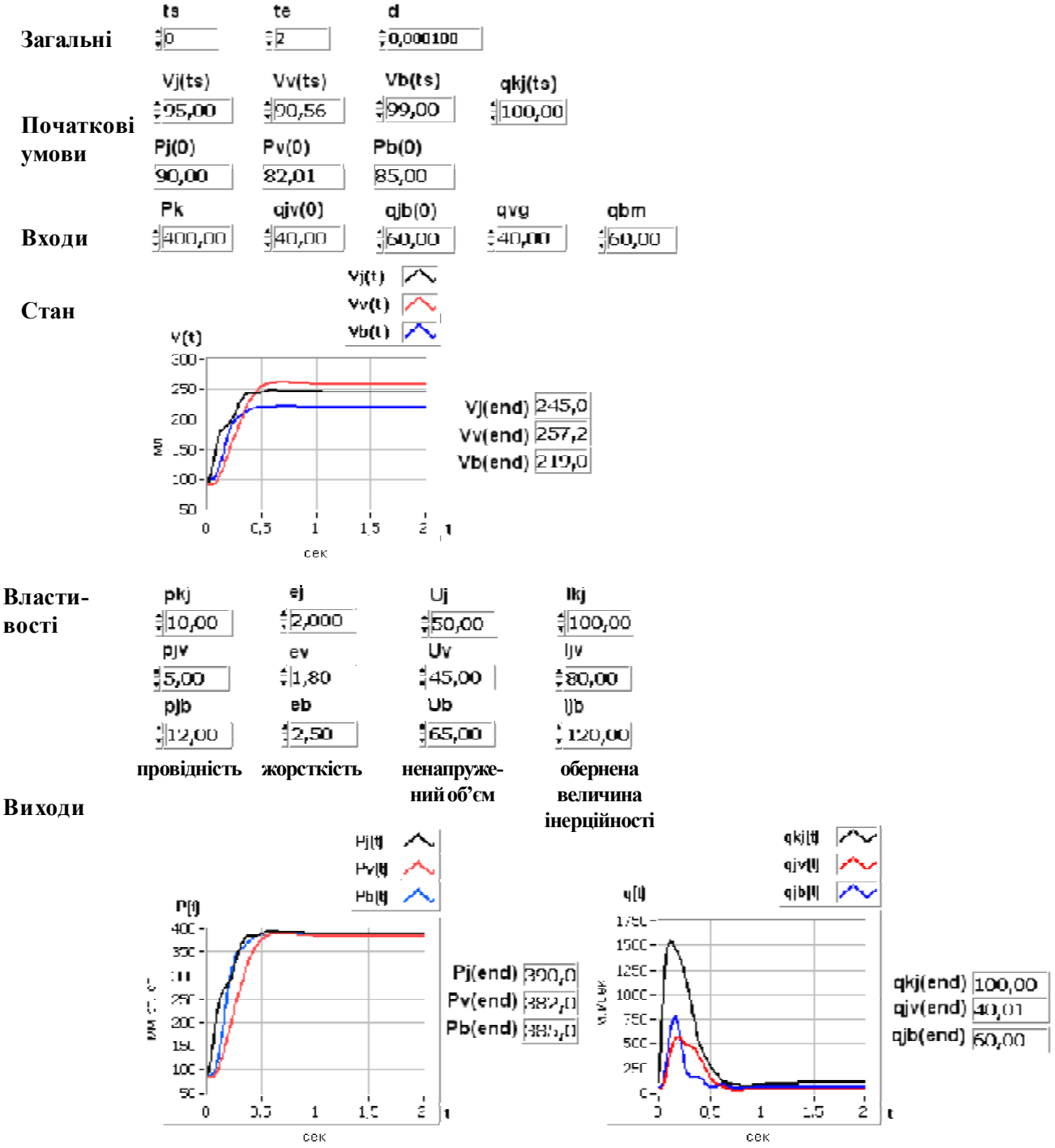


Рис. 6. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на збільшення Pk від 100 до 400 тор.** Пояснення в тексті.

змінюється. При збільшенні вихідного потоку з ділянки біфуркації (q_{vg} або q_{bm}) у всіх ділянках знижується тиск, вхідний потік у біфуркацію судини q_{kj} відповідно збільшується. Динаміка V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} при зміні q_{vg} від 100 до 320 мл/с і q_{bm} від 100 до 480 мл/с показана на рисунку 7 і рисунку 8 відповідно. Перехідні процеси мають плавний характер, перебігають за час дещо більше секунди. На рисунку 7 і рисунку 8, видно, що тільки функції потоків $q_{jb}(t)$ і $q_{jv}(t)$ відповідно мають екстремум (мінімум). При зміні потоків $q_{v,g}$ або $q_{b,m}$ в бік зменшення функції потоків q_{jb} і q_{jv} також мають екстремуми, але тільки максимуми.

Оскільки ділянки біфуркації мають різні властивості, то і перехідні процеси відрізняються характером коливальних режимів, хоч і не в значній мірі. У ділянці біфуркації, де не було зміни вихідного потоку, в початковий період перехідного процесу спос-

терігається різке зниження витрати крові, а потім повернення його в статичний стан, причому потік у цій ділянці біфуркації може змінювати напрямок на зворотний.

Таблиця 3. **Статичні залежності тиску, об'єму і потоку від вихідного потоку q_{vg}**

$q_{v.g}$	V_j	V_v	V_b	P_j	P_v	P_b	q_{kj}	q_{jv}	q_{jb}
20	96	93,9	99,8	92	88	87	80	20	60
40	95	90,56	99	90	82	85	100	40	60
80	93	83,9	97,4	86	70	81	140	80	60
160	89	70,56	94,2	78	46	73	220	160	60
320	81	43,9	87,8	62	-2	57	380	320	60

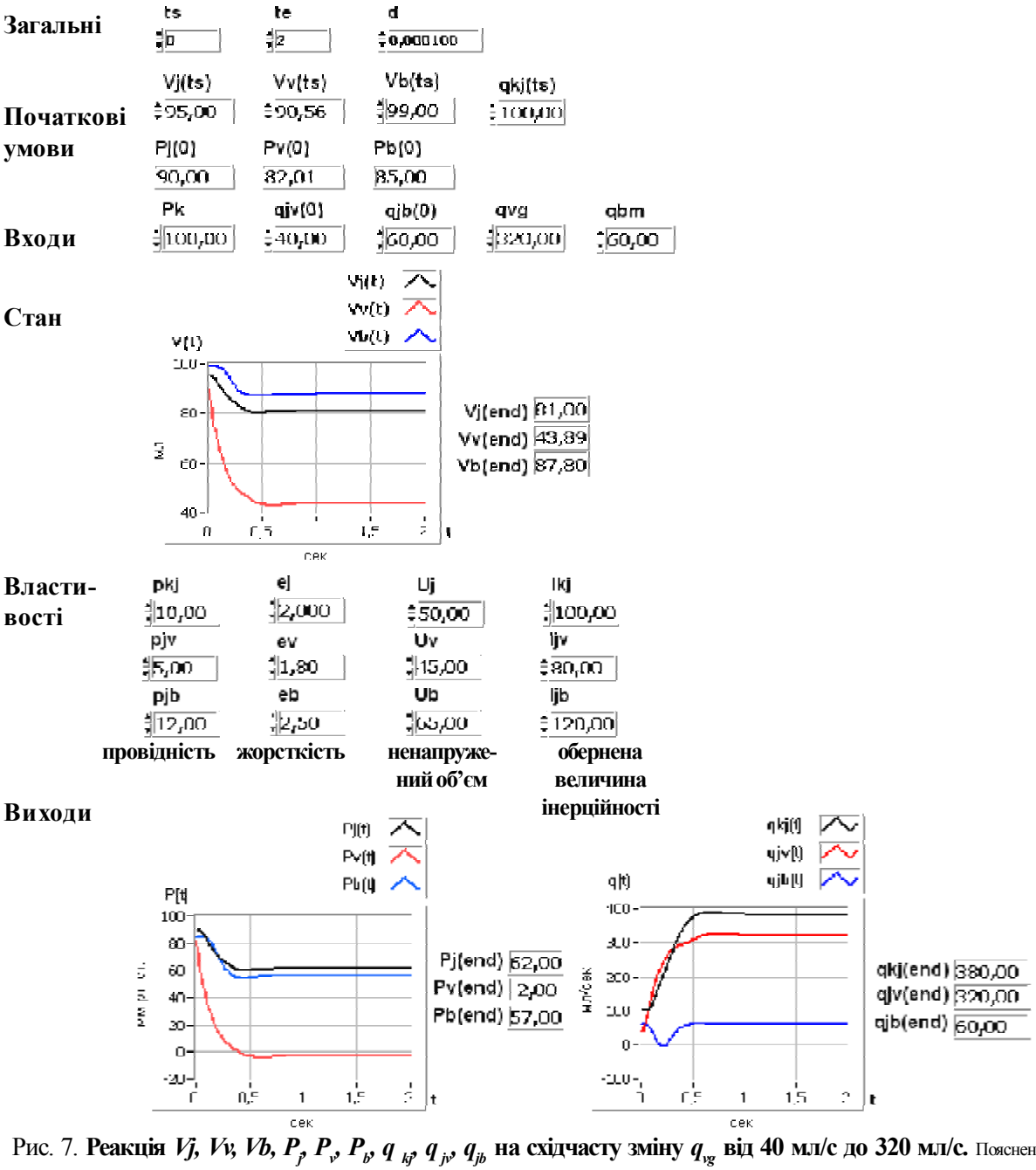


Рис. 7. **Реакція *Vj, Vv, Vb, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb}* на східчасту зміну q_{vg} від 40 мл/с до 320 мл/с.** Пояснення в тексті.

Таблиця 4. **Статичні залежності тиску, об'єму і потоку від вихідного потоку q_{bm}**

q_{vg}	V_j	V_v	V_b	P_j	P_v	P_b	q_{kj}	q_{jv}	q_{jb}
30	96,5	92,2	101,2	93	85	90,5	70	40	30
60	95	90,56	99	90	82	85	100	40	60
120	92	87,2	94,6	84	76	74	160	40	120
240	86	80,56	85,8	72	64	52	280	40	240
480	74	67,2	68,2	48	40	8	520	40	480

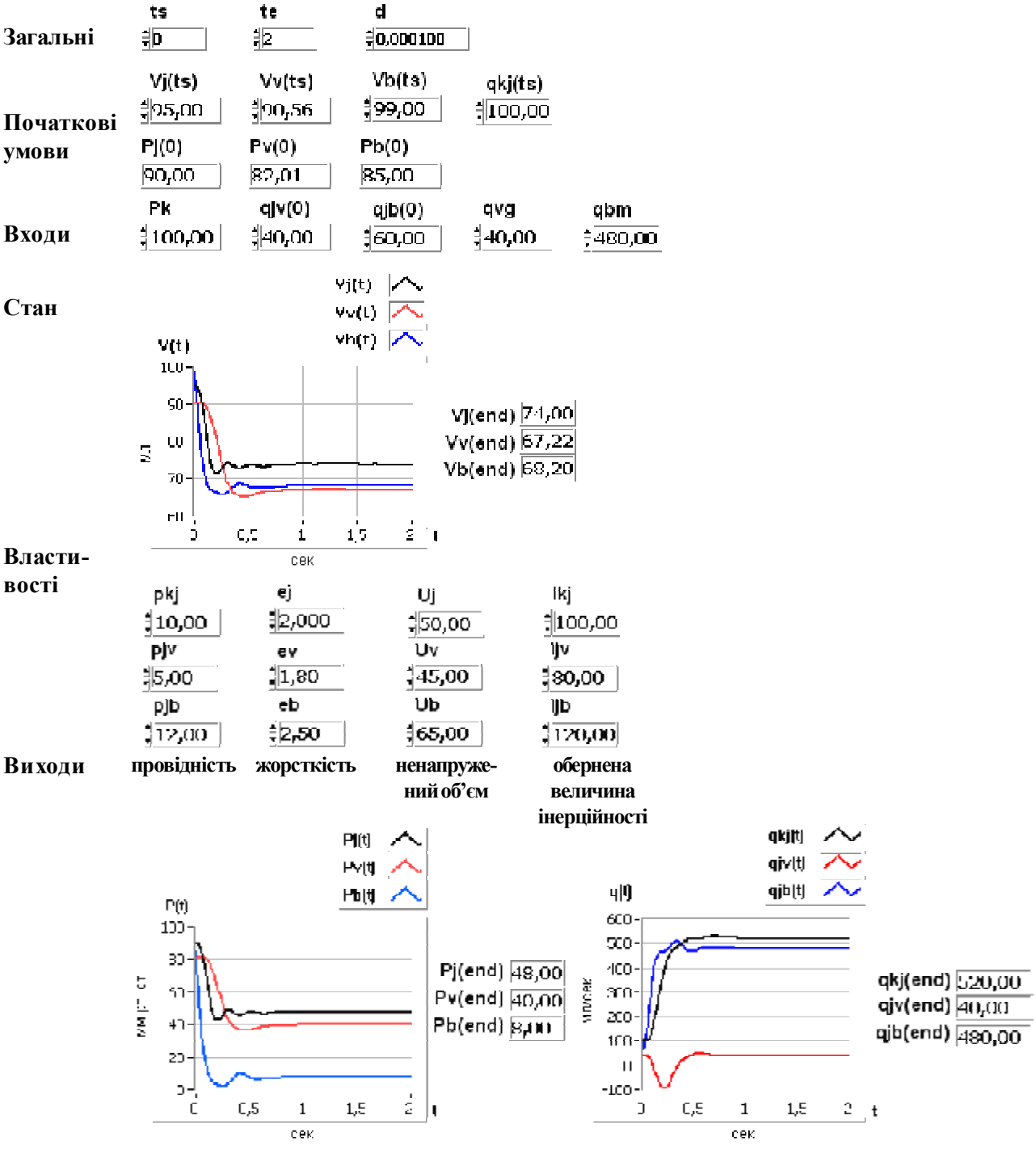


Рис. 8. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на зміну q_{bm} від 60 мл/с до 480 мл/с.** Пояснення в тексті.

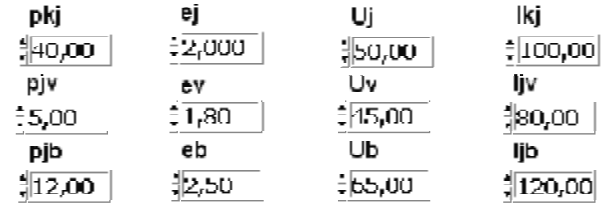
Статичні залежності оцінок функції судини V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} від провідності r_{kj} відображені в таблиці 5. Час контролю збільшений до 5 секунд (для випадку r_{kj} =2,5 см^3/(тор*с)). Кровотік не міняється при багаторазовій зміні провідності.

Динаміка при стрибкоподібній зміні r_{kj} від 10 до 40 см^3/(тор*с) показана на рисунку 9. Перехідні процеси характеризуються згасаючими коливаннями, що мають значні амплітуди, які можуть впливати на стан операційних швів і викликати неадекватні регуляторні реакції. Тут також підтверджується висновок про те, що в статиці вплив провідності на кровотік і тиск невеликий, але в динаміці можуть виникати значні напруги.

Таблиця 5. **Статичні залежності тиску, об'єму і потоку від провідності r_{kj}**

ρ$_{kj}$	V_j	V_v	V_b	P_j	P_v	P_b	q_{kj}	q_{jv}	q_{jb}
2,5	80	73,89	87,0	60,01	52,01	55,01	99,98	39,99	59,99
5	90	85	95	80	72	75	100	40	60
10	95	90,56	99	90	82	85	100	40	60
20	97,5	93,33	101	95	87	90	100	40	60
40	98,75	94,72	102	97,5	89,5	92,5	100	40	60

Властивості



провідність | жорсткість | ненапружений об'єм | обернена величина інерційності

Входи

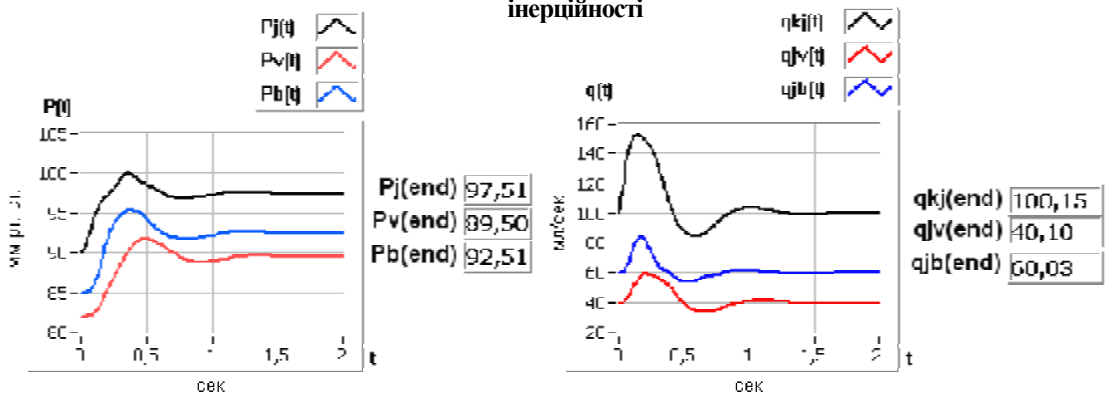


Рис. 9. Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на зміну r_{kj} від 10 до 40 см^3/(тор*с). (Пояснення в тексті)

Статичні залежності об'єму, тиску і потоку від жорсткості e_j представлені в таблиці 6. Динаміка зміни жорсткості від 2 до 0,125 тор/см^3 показана на рисунку 10. Час контролю збільшений до 6 секунд.

У статиці об'єми, тиски і потоки при зміні жорсткості судини не змінюються, за винятком об'єму V_j ділянки біфуркації, де жорсткість e_j змінюється. Причому об'єм V_j міняється у бік зменшення при збільшенні жорсткості e_j, і значно збільшується при зменшенні жорсткості e_j. Характер перехідних процесів при зміні жорсткості для всіх оцінок функцій ділянки біфуркації має різко виражений коливальний характер, як при зменшенні e_j в чотири рази (рис. 10), так і при збільшенні e_j в два рази (рис. 11). Потоки на ділянках біфуркації мають сильно виражену негативну складову.

Таблиця 6. **Статичні залежності тиску, об'єму і потоку від жорсткості судини e_j**

e_j	V_j	V_v	V_b	P_j	P_v	P_b	q_{kj}	q_{jv}	q_{jb}
0,125	769,65	90,53	98,98	89,96	81,95	84,96	100,49	40,03	60,02
0,25	409,89	90,54	98,99	89,97	81,96	84,97	100,37	40,05	60,03
0,5	95	90,56	99	90	82	85	99,96	39,99	59,99
1	140	90,56	99	90	82	85	100	40	60
2	95	90,56	99	90	82	85	100	40	60
4	72,5	90,56	99	90	82	85	100	40	60

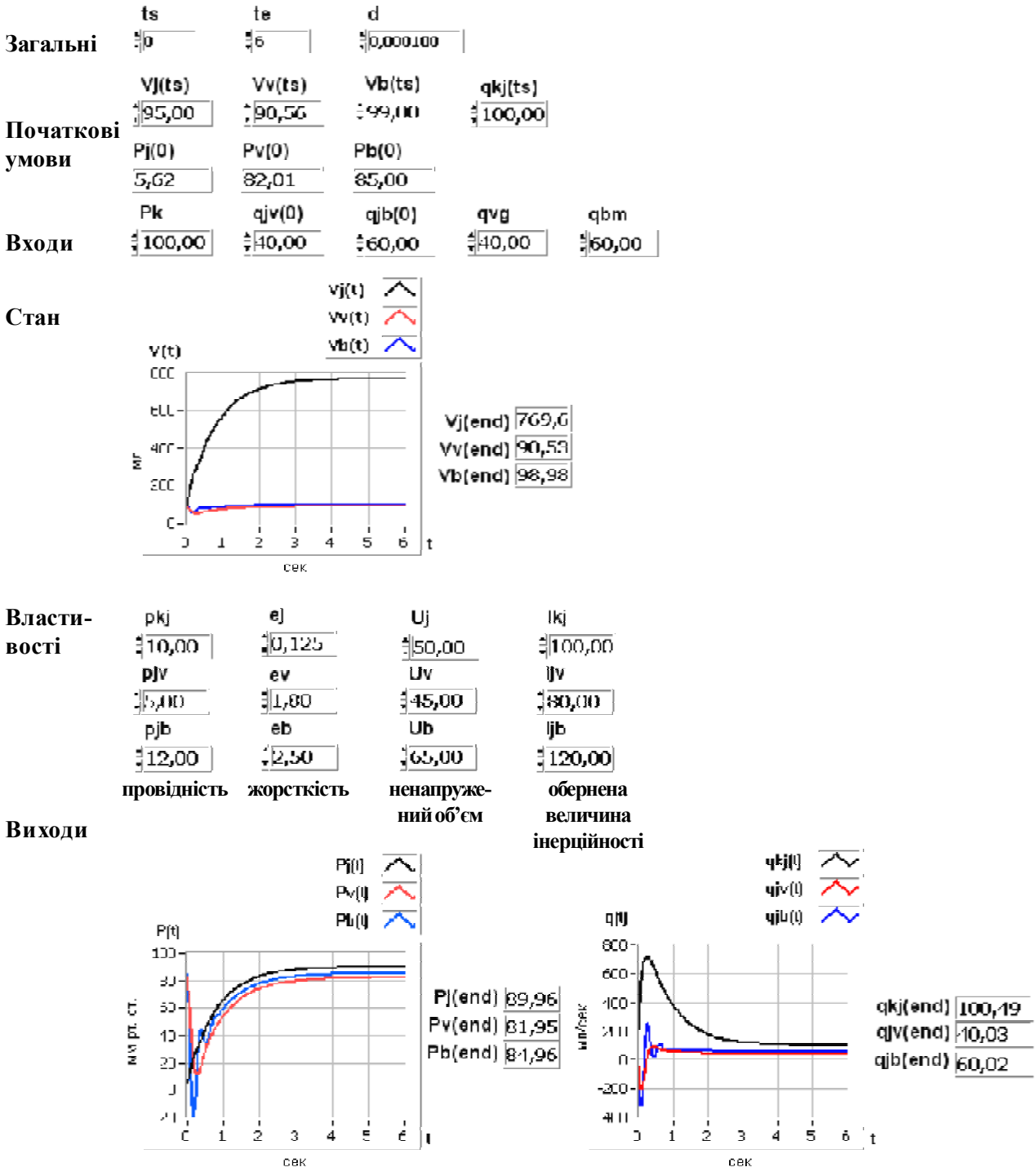


Рис.10. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на зменшення e_j від 2 тор/см³ до 0,125 тор/см³.**
Пояснення в тексті.

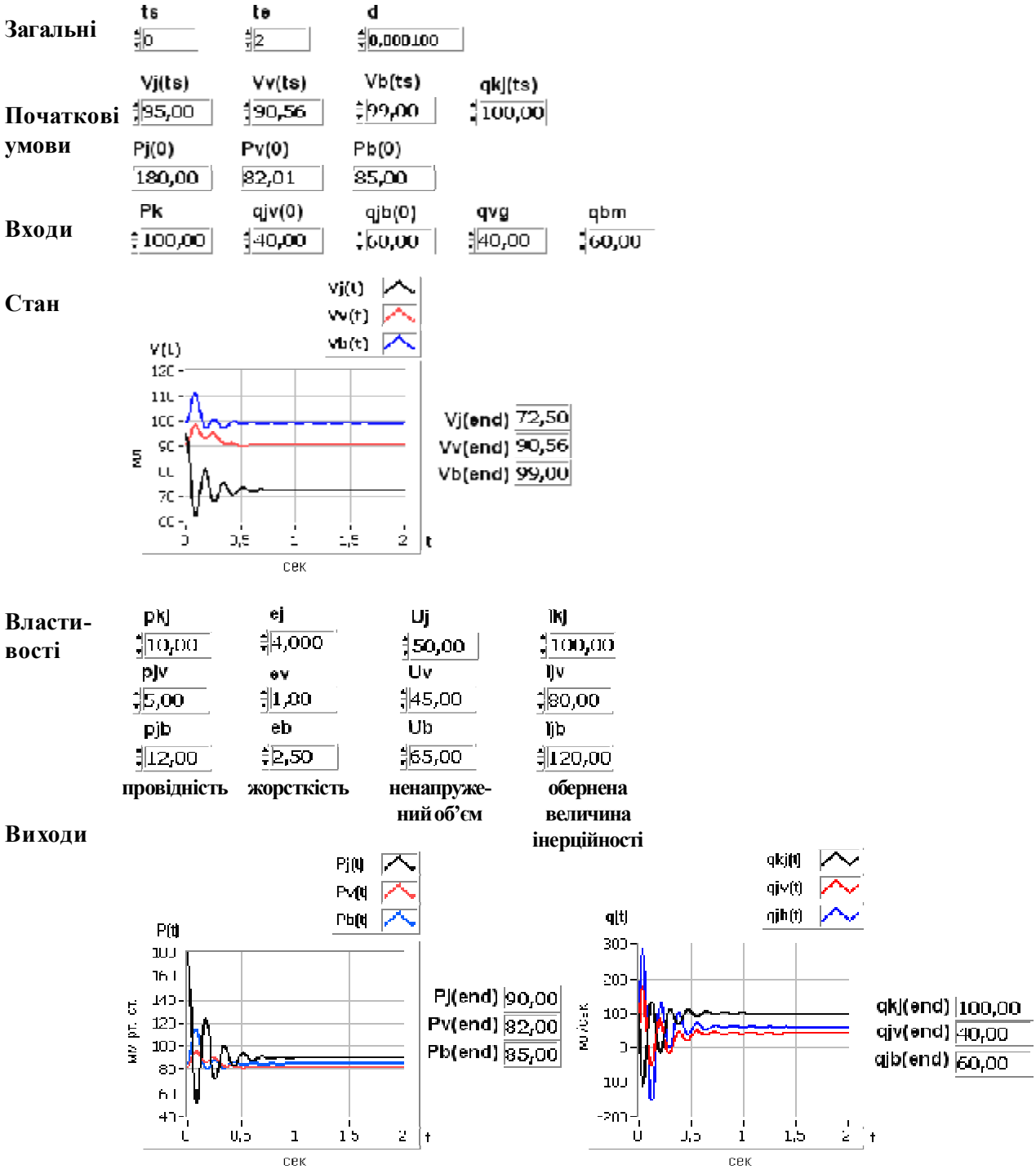


Рис. 11. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на збільшення e_j від 2 до 4 тор/см³.**
Пояснення в тексті.

Статичні залежності оцінок V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} від ненапруженого об'єму U_j показані в таблиці 7. Час досягнення статичного стану (перехідного періоду) – близько півтори секунди. Видно, що і кровотік, і тиск не змінюються. Досягнення нового статичного стану відбувається тільки за рахунок зміни об'ємуV_j.

Таблиця 7. **Статичні залежності тиску, об'єму і потоку від ненапруженого об'єму U_j**

U_j	V_j	V_v	V_b	P_j	P_v	P_b	q_{kj}	q_{jv}	q_{jb}
12,5	57,5	90,56	99	90	82	85	100	40	60
25	70	90,56	99	90	82	85	100	40	60
50	95	90,56	99	90	82	85	100	40	60
100	145	90,56	99	90	82	85	100	40	60
200	245	90,56	99	90	82	85	99,9	40,01	60,02

Динаміка при зміні ненапруженого об'єму від U_j =12,50 мл до U_j =12,50 мл представлена на рисунку 12. Час контролю – 2 с. Об'єм крові на ділянці *j* різко зменшується наполовину, а потім приходить у стале положення. Характер усіх графіків коливальний. Потік крові на всіх ділянках різко падає до негативних значень, потім з великою амплітудою коливань повертається до колишньої величини.

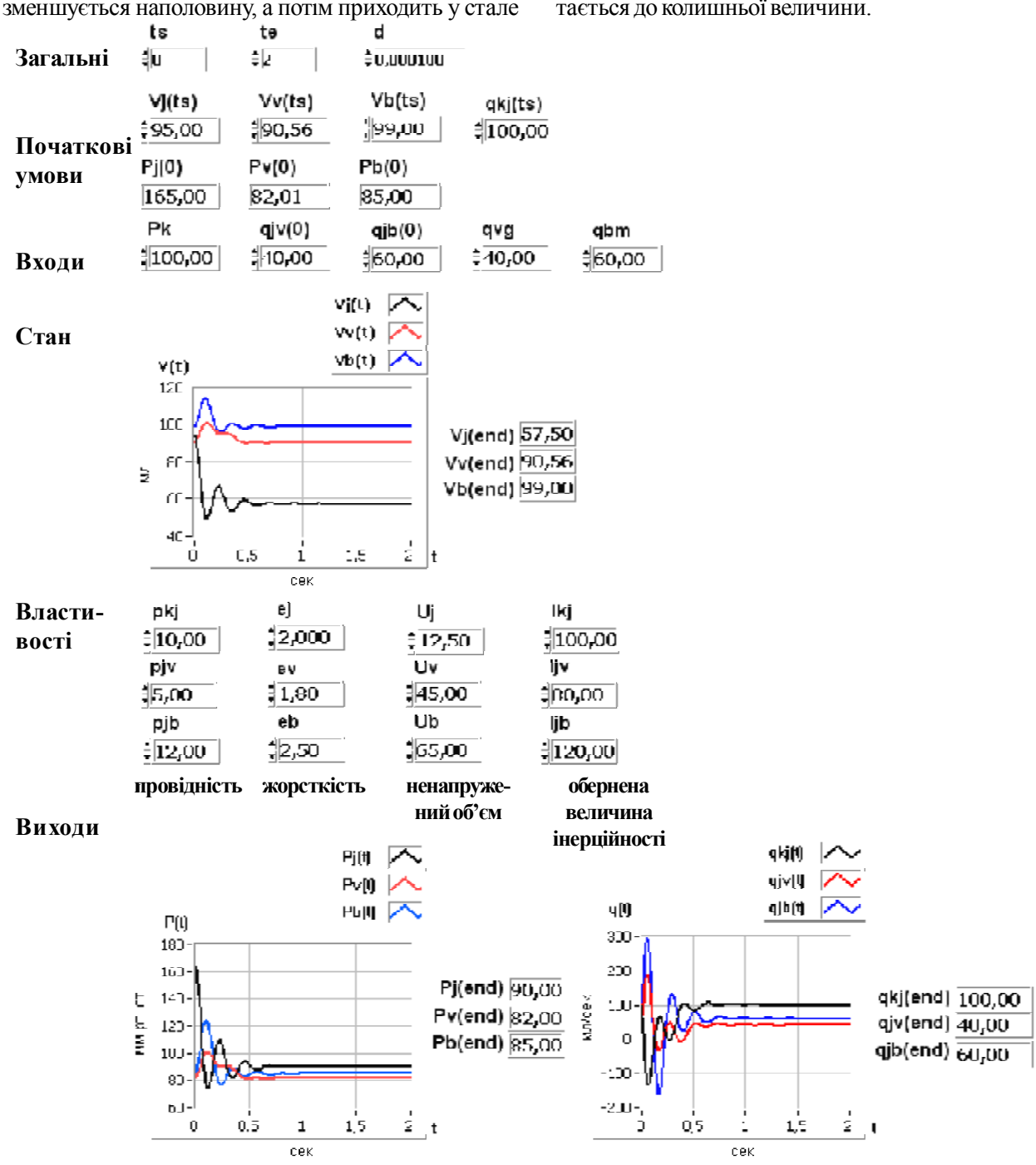


Рис. 12. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на зменшення U_j від 50 до 12,5 мл.** Пояснення в тексті.

При збільшенні при U_j від 50 до 200 мл при збереженні тих же умов (рис. 12) характер перехідних процесів такий, як і при зменшенні U_j (рис. 13). Ще більш значимо в динаміці зростає, а потім повертається до колишньої величини вхідний потік q_{kj}.

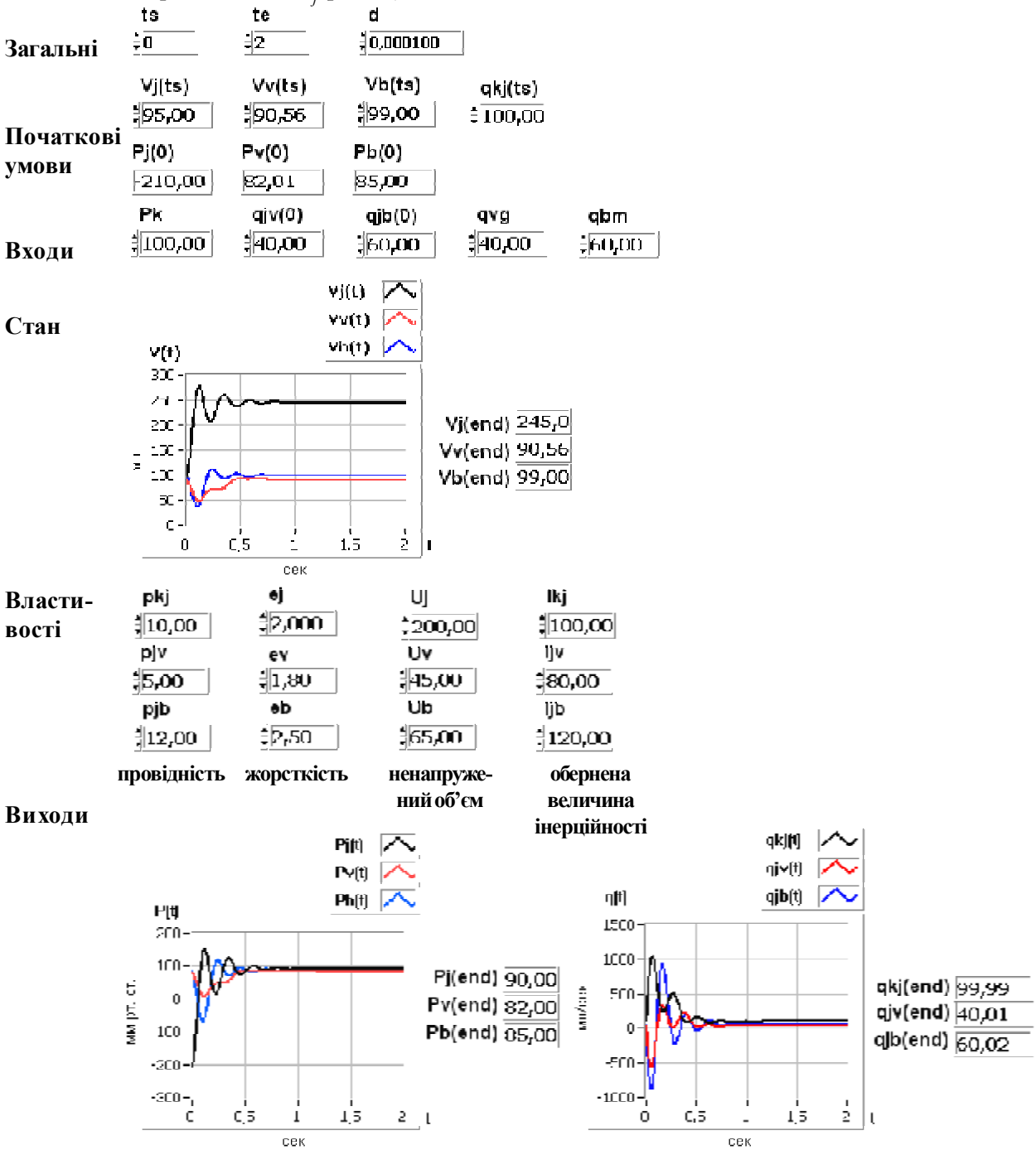


Рис. 13. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} на збільшення U_j від 50 до 200 мл.** Пояснення в тексті.

Щоб оцінити роль інерційності, проведемо дослідження реакції функціонування при різних l_{kj} і зменшеному значенні початкового обсягу V_j в 2 рази, тобто $V_j(0)$=47,50 мл. Нехай значення інерційності відрізняються в два рази. Приймемо одне значення інерційності таким же, як у статиці l_{kj}^{-1}= 0,01 (тор*с^2)/см^3 (зворотна величина інерційності l_{kj}=100 см^3/(тор*с^2)), інше – 0,02 (тор*с^2)/см^3 (l_{kj}=50 см^3/(тор*с^2)). Для цих двох значень інерційності і зміні початкового наповнення судини $V_j(0)$ від 95 мл до 47,5 мл, одержимо два відповідні набори перехідних процесів зміни об'ємів, тисків і потоків. На рисунку 14 показані перехідні процеси при зміні об'єму V_j від 95 мл до 47,5 мл і l_{kj} =100 см^3/(тор*с^2). Час контролю – 2 с.

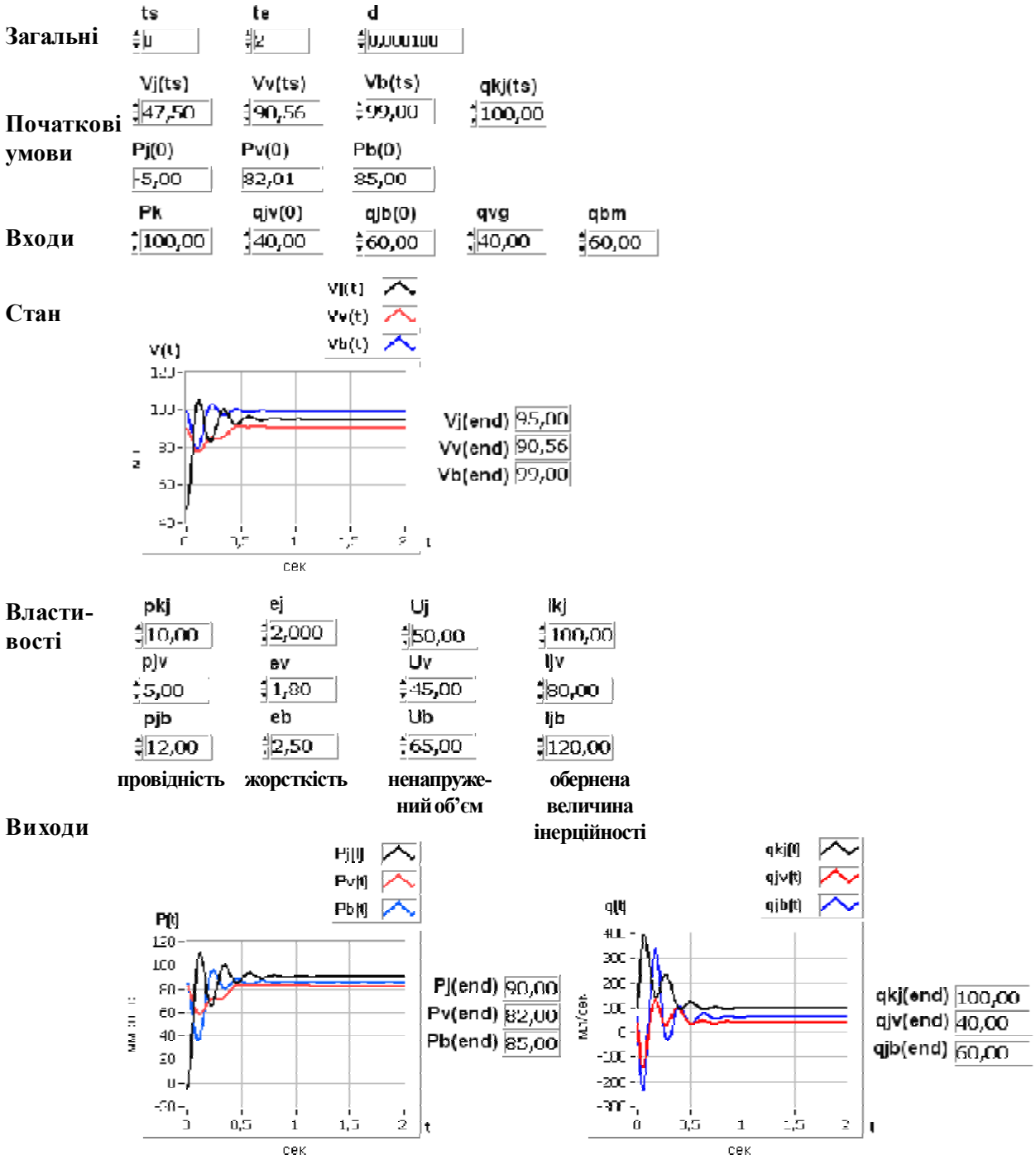


Рис. 14. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, qj_b при зміні $V_j(0)$ від 95 мл до 47,5 мл і l_{kj} =100 см^3/(тор*с^2).** Пояснення в тексті.

На рисунку 15 представлений той же перехідний процес при тій же зміні об'єму $V_j(0)$ і зворотній величині інерційності l_{kj}=50 см^3/(тор*с^2).

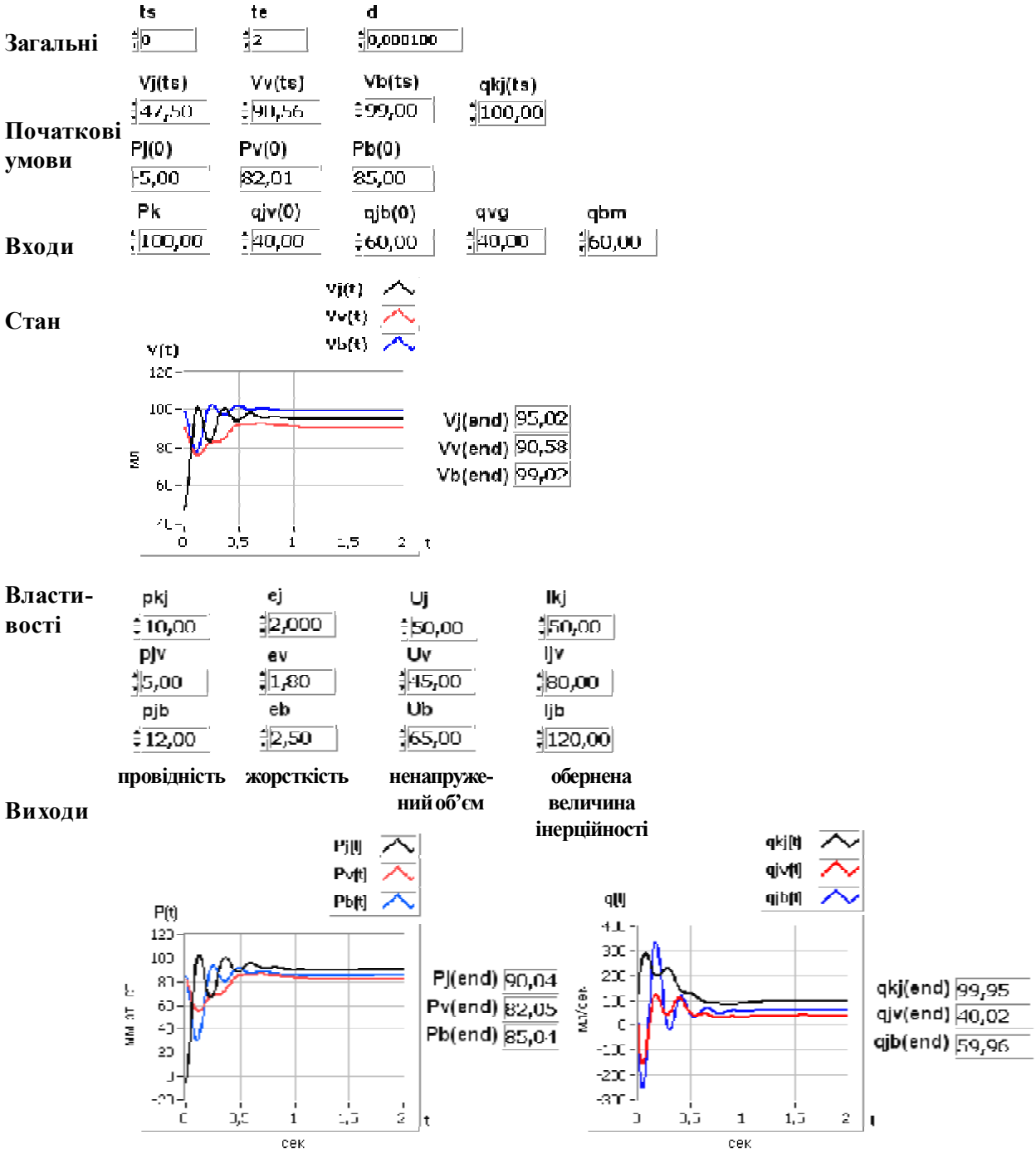


Рис. 15. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} при $V_j(0)$=47,5 мл і l_{kj}=50 см³/(тор*с²).** Пояснення в тексті.

Видно, що розходження в перехідних процесах є, але воно невелике. При збільшенні інерційності коливальний характер перехідного процесу більш виражений. Треба відзначити, що як сама зміна інерційності, так і зміна початкового наповнення $V_j(0)$ (і те й інше в 2 рази) істотні.

Для порівняння розглянемо збільшення інерційності від 0,01 (тор*с²)/см³ до 0,1 (тор*с²)/см³ (зворотна величина інерційності l_{kj} від 100 до 10 см³/(тор*с²)) при збереженні тих же умов (рис. 16). Перехідний процес має коливальний характер, що збільшує час дослідження до 8 секунд.

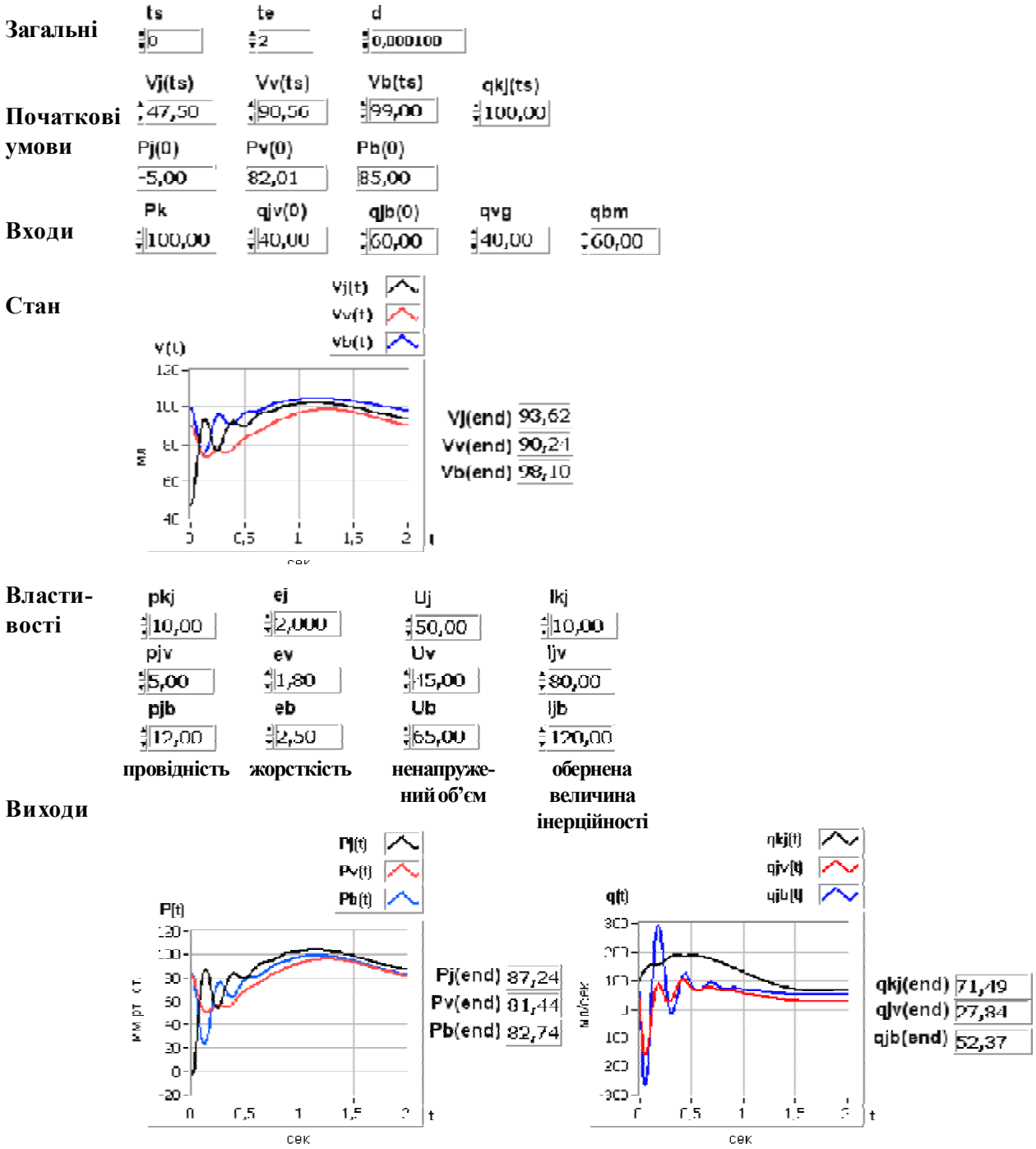


Рис. 16. **Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} при $V_j(0)$=47,5 мл і зміні l_{kj} від 100 см^3/(тор*с^2) до 10 см^3/(тор*с^2).** Пояснення в тексті.

Ще більше збільшення інерційності l_{kj} від 100 см^3/(тор*с^2) до 1 см^3/(тор*с^2) приводить до тривалих виражених коливань об'єму, тиску і потоку. Час контролю збільшується до 60 с. Перехідний процес при початкових умовах V_j=47,5 мл, тобто відмінних від статики в 2 рази в бік зменшення, і заданому збільшенні зворотної величини інерційності до l_{kj} = 1 см^3/(тор*с^2) показаний на рисунку 17.

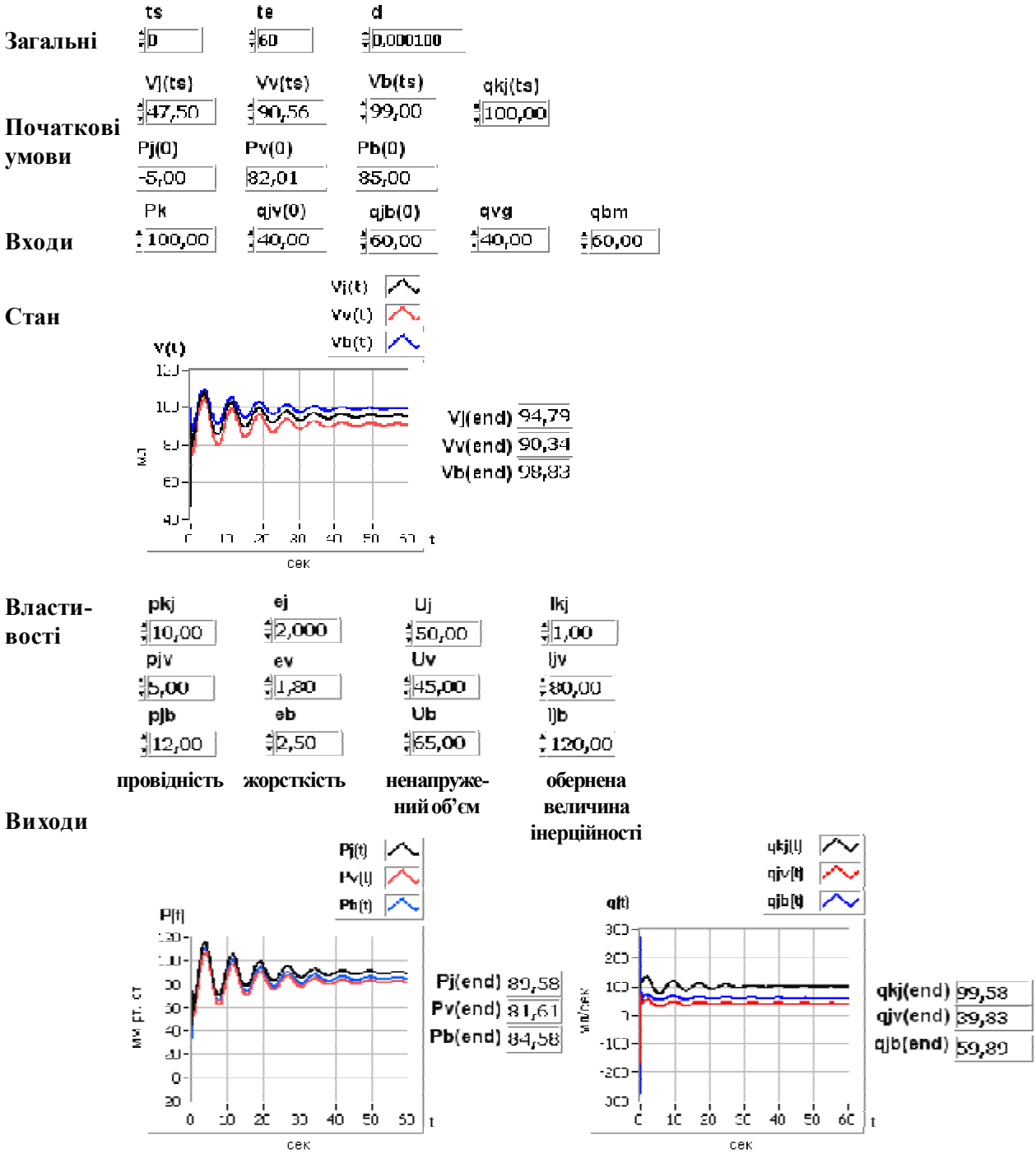


Рис. 17. Реакція V_j, V_v, V_b, P_j, P_v, P_b, q_{kj}, q_{jv}, q_{jb} при $V_j(0)$=47,5 мл і зміні l_{kj} від 100 см³/(тор*с²) до 1 см³/(тор*с²). Пояснення в тексті.

Таким чином, зміна інерційності веде до значних за часом і амплітудою перехідних процесів у біфуркації судини.

Висновок. Ми представили досить наближений опис біфуркації судинного русла, який необхідний для побудови серцево-судинної мережі. Він корисний для розуміння відносин між оцінками, що характеризують потік, тиск і об'єм, і властивостями судини – провідністю, жорсткістю, інерційністю і тонусом.

Проведені дослідження показали, що статичні характеристики не завжди виявляють при зміні властивостей судин небезпеки, що впливають на цілісність ендотелію судин або операційних швів.

Дослідження динамічних режимів при зміні властивостей судин показують наявність значних амплітуд коливань об'ємів, тисків, потоків, що можуть приймати і негативні значення при початкових і вхідних величинах, що лежать у межах фізіологічних властивостей.

Порівняння результатів досліджень статики і динаміки елементарної судинної ділянки, проведених у роботі [4], з дослідженнями біфуркації судини, виконаними в даній роботі, показують схожість статичних і динамічних процесів. Однак зміни об'ємів, тисків, потоків у відгалуженнях біфуркації судини мають свої особливості, які потрібно враховувати. Наприклад, відгалуження в біфуркації судини мають різні властивості, що впливає як на статичні характеристики, так і на динаміку процесів. Розмаїтість комбінацій властивостей ділянок біфуркації судини вимагає спеціальних досліджень у кожному конкретному випадку. Основою таких досліджень може бути представлена модель. Тому актуальною є наявність моделі біфуркації судини, реалізованої в ефективному для практичного дослідження середовищі програмування LabVIEW.

Відомі моделі судинної ділянки і біфуркації, описані в частинних похідних. На відміну від цих моделей, при описі біфуркації за допомогою звичайних диференціальних рівнянь (із загальноприйнятими компартментами) є наступні переваги: простота одержання чисельного розв'язку, при доброму узгодженні з теоретичними моделями гемодинаміки, що описані в часткових диференціальних рівняннях; початкові умови і параметри моделі можуть бути визначені за результатами фізіологічного експерименту і клінічного контролю; модель відображає рух потоку крові в такому вигляді, для якого є методи аналізу, ідентифікації і синтезу.

Литература

1. *Лищук В. А., Амосов Г. Г., Амосов Г. Г. (мл.), Фролов С. В.* Математическая модель сосуда в частных производных. Часть 1 // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – № 3. – С. 37–44.

2. *Лищук В. А., Амосов Г. Г., Амосов Г. Г. (мл.), Фролов С.В. и др.* Математическая модель сосуда в обыкновенных производных как инструмент для исследования сосудистой патологии. Часть 2 // Клиническая физиология кровообращения. – 2007. – № 1. – С. 64–70.

3. *Лищук В. А.* Математическая теория кровообращения . – М.: Медицина, 1991г. – 256 с.

4. *Лищук В. А.* Реализация математической модели элементарного сосудистого участка в среде LabVIEW, ориентированной на кардиохирургическую клинику // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – № 4. – С. 67–81.

5. *Лищук В. А.* Модель сосуда из последовательно соединенных модулей элементарного сосудистого участка // Клиническая физиология кровообращения. – 2007. – № 4. – С. 63–71.

6. *Sonnenblick E. R.*, *Downing S. E.* Afterload as a primary determinant of ventricular performance// Amer. J. Phisiol. – 1963. Vol. 204, № 4. – P. 604.

7. *Defares Y. J.*, *Osborn J. J.*, *Hiroshi H. H.* Theoretical synthesis of the cardiovascular system. Study I: The controlled system/ / Acta Physiol. Pharmacol. – 1963. Vol. 12, № 3. – P. 189 – 265.

8. *Bugliarello G, Hsiao CC*. The mechanism of phase separation at bifurcations. An introduction to the problem in the microcirculatory system. // Bibl Anat. 1965; P. 363–367

9. *Perktold K., Rappitsch G.* Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model // J. Biomech. – 1995, Vol. 28, P. 845–856.

10. *Abakumov M.V., Gavrilyuk K.V., Favorskii A.P., et al*. Mathematical Model of Hemodynamics of Cardiovascular System. J. Differential. Equations, 1997, 3 (7), P. 892–898.

11. *Veneziani A.* Mathematical and Numerical Modelling of Blood Flow Problems/ PhD thesis, Politecnico di Milano, Italy, 1998.

12. *Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A.* Multiscale modelling of the circulatory system: A preliminary analysis// Comput. Visual. Sci. – 1999, №2, P. 75–83.

13. *Quarteroni A*. Modeling the cardiovascular system: a mathematical adventure – Part II// SIAM News 2000, 34 (6).

14. *Canic S.* Blood flow through compliant vessels after endovascular repair: Wall deformation induced by the discontinuous wall properties, submitted to Comput// Visual. Sci., 2001.

15. *Haljasmaa I.V., Robertson A.M., Galdi G.P.* On the effect of apex geometry on wall shear stress and pressure in two-dimensional models of arterial bifurcations, to appear// Math. Models Meth. Appl. Sci., 2001.

16. *Stroud J. S., Berger S. A., Saloner D.* Numerical Analysis of Flow Through a Severely Stenotic Carotid Artery Bifurcation // J. Biomech. Eng. – February 2002, P. 3–12.

17. *Bushi D, Grad Y, Einav S et al*. Hemodynamic evaluation of embolic trajectory in an arterial bifurcation: an in-vitro experimental model// Stroke 2005 Dec; 36(12), P. 696–700.