УДК 330.4

Ольга Овчар, *вчитель математики вищої категорії СЗШ №67 м. Львова*

МАТЕМАТИКА В ЕКОНОМІЦІ

У даній статті висвітлено питання використання математичних знань учнівської молоді в процесі вивчення шкільного курсу економіки.

Ключові слова: *економіка, математика, математична модель, економічна задача.*

В данной статье отражен вопрос использования математических знаний ученической молодежи в процессе изучения школьного курса экономики.

Ключевые слова: *экономика, математика, математическая модель, экономическая задача.*

In this article the question of the use of mathematical knowledges of student's young people is reflected in the process of study of school course of economy.

Key words: *economy, mathematics, mathematical model, economic task.*

Постановка проблеми. Для сьогодення характерним є процес математизації наукових знань, широкого використання методів математики, її апарату в різних наукових галузях. Наприклад, археологія, біологія, екологія, економіка, медицина, мовознавство – це науки, які раніше вважалися далекими від математики, а тепер не можуть без неї обійтися.

Сучасна економіка – наука точна. Спеціалісти-економісти в умовах ринкових відносин мають бути готовими до кількісного опрацювання та аналізу великих за обсягом і різноманітних за змістом потоків економічної інформації, що є неможливим без економіко-математичних моделей і комп'ютерних технологій [6]. Це зумовлює необхідність широкого застосування математичних інноваційних методів в економічному аналізі й потребує належної математичної підготовки спеціалістів. Останнім часом усе більше уваги приділяється економічній освіті молодого покоління. Адже вижити й пристосуватися до сучасних економічних умов неможливо без знання елементарних закономірностей ринкової економіки. Серйозна увага при цьому приділяється якісному рівню знань та вмінь, що формуються у процесі вивчення економіки в старших класах. А з цього випливає, що не можна викладати економіку відірвано від математики.

Мета статті. На прикладах розв'язування економічних задач показати застосування учнями знань з математики.

Виклад основного матеріалу. При розв'язанні економічних задач спочатку умову треба перекласти на мову математики. Створити математичну модель [2]. Розглянемо приклади розв'язування задач з економіки.

Задача 1. Функція попиту має вигляд $Q_D=150-2P$, а функція пропозиції $Q_S = 3P + 25$. Знайти параметри точки ринкової рівноваги.

Розв'язання. Ринкова рівновага передбачає рівність величини попиту і величини пропозиції: $Q_S = Q_D = Q$. Тому повинна виконуватися умова: $3P+25=150-2P$. Отримане лінійне рівняння має єдиний розв'язок: $P=25$. Підставляючи або у функцію попиту, або у функцію пропозиції, визначаємо рівноважну кількість товару $Q=100$.

Задача 2. Функція попиту $Q_D = 300 - 3P$, а функція пропозиції $Q_S = P - 20$.

1. Знайдіть параметри точки рівноваги на ринку даного товару.

2. Побудуйте відповідний графік.

$Q_D=300-3P$; $Q_S=P-20$;

1) $300-3P= P-20$; $P=80$; $Q=60$.

2) P(грн)

Задача зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь графічним способом.

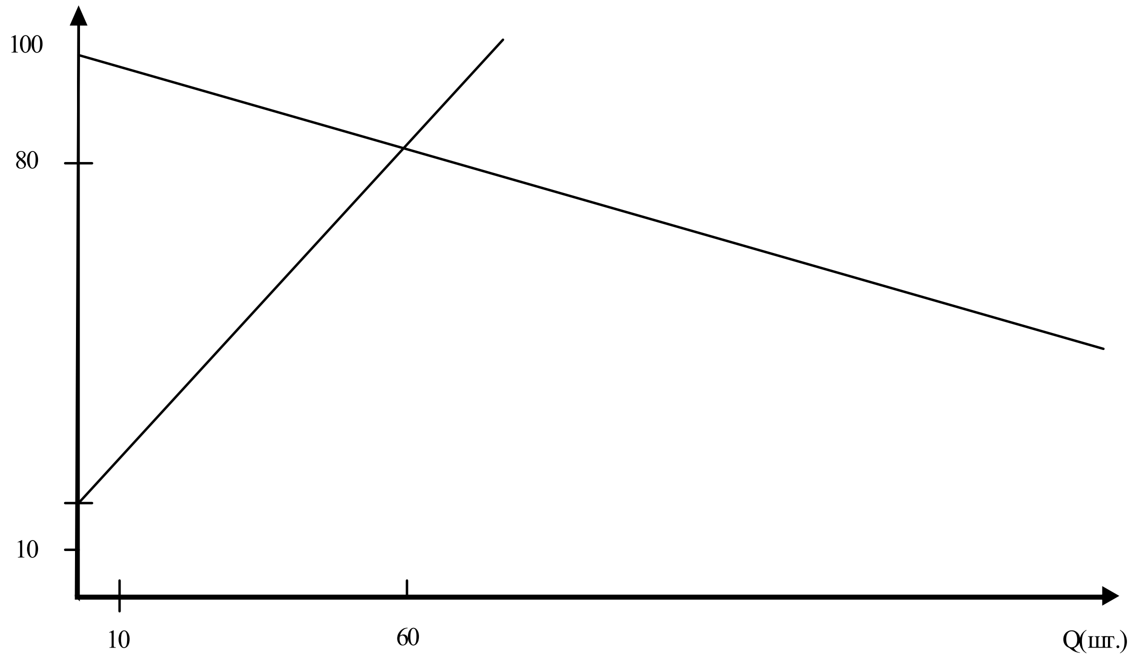
Задача 3. Залежність попиту на деякий товар від кількості товару (у шт.) задається функцією $y=3+2x-x^2$. Дослідити функцію та побудувати графік. Користуючись графіком визначити при якій кількості товару буде попит.

При розв'язуванні задачі використовуються знання учнів у побудові графіка квадратичної функції та її властивості.

Задача 4. У магазині продається поліетиленова плівка двох видів. Рулон такої плівки першого виду коштує 120 *грн*, довжина – на 4 м менше, ніж у рулоні другого виду. Рулон плівки другого виду коштує 108 *грн* і ціна кожного метра в ньому на 6 грн менше, ніж у плівки першого виду. Скільки метрів поліетиленової плівки в рулонах першого і другого виду та скільки коштує 1 *м* плівки першого і другого виду? [2].

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначивши через *x* довжину рулону плівки першого виду і через *y* – ціну 1 *м* плівки першого виду, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x \cdot y = 120; \\ (x+4)(y-6) = 108. \end{cases}$$



Розв'яжемо цю систему способом підстановки, виразимо $y = \frac{120}{x}$. Після деяких перетворень отримаємо: $x^2+2x-80 = 0$.

Розв'язавши квадратне рівняння за теоремою Вієта, отримаємо два корені $x_1 = 8$ та $x_2 = -10$. Корінь x_2 не підходить, оскільки значення від'ємне.

Відповідно, довжина плівки в рулоні першого виду – 8 *м*, а другого виду – дорівнює 8 + 4 = 12 *м*. Вартість 1 *м* плівки першого виду дорівнює y=15 *грн*, а другого виду 15-6 = 9 *грн.*

Задача 5. Автомобіль з причепом коштує 230 тис. *грн*, причому автомобіль дорожчий від причепа на 200 тис. *грн*. Скільки коштує окремо автомобіль і причеп?

Розв'язання. Позначимо через x і y вартість автомобіля і причепа, отримаємо такі рівняння: $x+ y= 230$; $x - y = 200$. Додавши праву і ліву частину рівнянь отримаємо: $2x = 430$. Звідси x= 215 тис. *грн*. Отже, x= 215 тис. грн, y = 15 тис. *грн*. Задача зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь способом додавання.

Задача 6. За трудовою угодою заробітна плата дорівнює 1800 *грн*. У січні місяці збільшили заробітну плату на 15%. але й ціни збільшилися на 10%. Яка реальна заробітна плата? [5].

Розв'язання. Підрахуємо, якою повинна була бути заробітна плата. Використаємо індексний метод. При цьому показник базового періоду позначимо через 100%. $I_{\text{ном.з.п.}}$ = (100%+ 15%): 100%= 1,15.

Нова заробітна плата мала б дорівнювати: 1800 грн • 1,15 = 2070 *грн.*

Однак ціни зросли на: $I_{\text{цін}}$ = (100% + 10%) : 100% =1,1.

Отже, заробітна плата виросла лише на: $I_{\text{реал.з.п.}} = I_{\text{ном. з. п.}} : I_{\text{цін}}$ =1,15 : 1,1 = 1,045.

Тобто, реально заробітна плата збільшилася лише на 4,5%. Реальна величина заробітної плати дорівнюватиме: 1800 грн•1,045 = 1881 грн. Математичною моделлю є задача на прості відсотки.

Задача 7. Визначте чисельність працездатного населення і рівень безробіття, якщо чисельність зайнятих в усіх галузях економіки складає 23,7 млн. осіб, а кількість безробітних – 1,437 млн. осіб.

1) 23,7 млн + 1,437 млн = 25,137 млн – чисельність працездатного населення.

2) $\frac{1,437}{25,137} \cdot 100\,\% \approx 5,72\%$ - рівень безробіття.

При умові, якщо в кількість безробітних включені люди, що знаходяться в психіатричних клініках і місцях ув'язнення. Математичною моделлю є задача на знаходження відсоткових відношень.

Задача 8. На підприємстві виробляють 2400 одиниць товару за кількості робітників 200 осіб. Сучасне автоматизоване устаткування дозволить збільшити виробництво товару на 480 одиниць, одночасно зменшити кількість персоналу на 2,5%. Визначити, як зміниться продуктивність праці.

Розв'язання. Обчислимо початкову

продуктивність праці: 2 400: 200 = 12 одиниць на одну особу. Визначимо кількість одиниць товару, які почали виробляти після встановлення сучасного автоматизованого устаткування: 2 400 + 480 = 2 880 одиниць товару. Обчислимо нову кількість робітників: 200·0,975 =195 осіб. Нова продуктивність праці дорівнює:

2880: 195 = 14,77 одиниці на одну особу. Таким чином, продуктивність праці зросла на 2,77 одиниці (14,77 - 12,0) або на 23,1% [(14,77 100% : 12) -100%].

Задача 9. На ринку горіхи коштують 50 *грн* за 1 *кг*, а очищені горіхи – 150 *грн* за 1 *кг*. Які горіхи вигідніше купувати (не враховуючи витрат на очистку горіхів), якщо в 1 *кг* горіхів у середньому міститься 400 *г* ядер?

Розв'язання. 50 *грн* коштує 1 *кг* горіхів або 400 *г* ядер. Відповідно 1 *кг* ядер повинен коштувати у 2,5 раза ($\frac{1000}{400}$) дорожче, тобто 125 *грн.*

Тобто вигідніше купувати неочищені горіхи. Математичною моделлю є задача на відношення.

Задача 10. Підприємство має власний капітал 200 млн. *грн* і бере в банку кредит під 20% річних на суму 100 млн. *грн*. Рентабельність складає 30%.

Чому буде дорівнювати прибуток підприємства? (20%=0,2)

Розв'язання. Сумарний капітал дорівнює 300 млн. *грн.*

Рентабельність буде дорівнювати: $\frac{300}{100}\cdot 30$ = 90 млн. *грн.*

Виплата за кредит складе: 100 млн. *грн* • 0,2= 20 млн. *грн*. Прибуток підприємства буде дорівнювати: 90млн. *грн* -20млн. *грн* =70 млн. *грн.* Математичною моделлю задачі є задача на відсоткове відношення.

Задача 11. Фірма випускає продукцію, що є функцією f(x)=$\sqrt{100e^{0,2t}}$ від затрачених на її виготовлення. Знайти обсяг виготовлення за 5 років.

Для розв'язання задачі потрібно використати знання учнів про знаходження визначеного інтеграла: $\int_0^5 \sqrt{100e^{0,2t}} \approx 65$ од.

Задача 12. Виручка від реалізації продукції дорівнює 200 000 *грн*. Матеріальні витрати – 100 000 *грн.* Накладні витрати – 20 000 *грн.* Витрати на заробітну плату – 30 000 *грн.* Чому буде дорівнювати прибуток, податок на прибуток (ставка податку 20%), чистий прибуток? (20%=0,2).

Розв'язання. Розмір прибутку визначається як різниця між виручкою і всіма витратами. Отже, 200 000 - (100 000 + 20 000 + 30 000) = 50 000 *грн.*

Розмір податку на прибуток буде складати: 50 000 • 0,2= 10 000 *грн.*

Величина чистого прибутку визначається як різниця між величиною прибутку і податком на прибуток. Отже, 50 000 - 10 000 = 40 000 *грн.* Математична модель – задачі на відсотки [5].

Задача 13. Уряд країни підвищив розмір пенсій. У результаті обсяг продажу молока змінився на 20%, а виторг виробників молока збільшився від 400 тис. *грн* до 528 тис. *грн*. На скільки відсотків змінилася ціна на молоко? [2]

Розв'язання. Позначимо P_0 і P_1 відповідно початкову і кінцеву ціну молока, через Q_0 і Q_1 – обсяги його продажів, через x – коефіцієнт, що показує, у скільки разів початкова ціна змінилася після підвищення розміру пенсії.

Початковий розмір виторгу виробників молока становив: $400 = P_0 \bullet Q_0$, а виручка після зміни ціни на молоко дорівнювала: $528 = 1{,}2 \bullet (P_0 \cdot x)$.

Поділивши другу рівність на першу, одержимо:

$$\frac{528}{400} = \frac{1{,}2 \bullet P_0 \bullet x}{P_0 \bullet Q_0}, \text{ звідси } x = \frac{528}{400 \bullet 1{,}2} = 1{,}1.$$

Отже, ціна на молоко виросла на 10%. Задача зводиться до розв'язання пропорції.

Задача 14. Вам запропонували купити 100 *т* товару по 300 *грн* за тонну. Товар у своєму складі має рідину, яка може з часом випаруватися (це може бути, наприклад, м'ясо чи огірки). З'ясовується, що важення товару проводилося рік тому. Тоді було визначено й відсотковий вміст рідини, яка дорівнювала 99% (по масі). На Ваше прохання на день купівлі проводиться повторний замір вмісту рідини, який показує, що тепер її вже залишилося 96% (по масі). Скільки Ви повинні заплатити коштів за товар? [2]

Розв'язання. Спочатку розрахуємо, який відсоток і маса сухого залишку в товарі.

При першому замірі рідини сухий залишок склав 1% і важив 1 тонну. При другому замірі відповідно 4% – і знову 1 тонна (маса сухого залишку не змінюється). Масу всього товару (100%), що нас цікавить, при другому замірі (x) знаходимо з пропорції:

4% -1 т

100%-x

Звідки x = 25 *т*. За цей товар слід заплатити (25 • 300) = 7,5 тис. грн.

Задача 15. Перед нами два яблука. Перше на

$\frac{1}{4}$ ширше другого, але коштує воно в півтора рази дорожче. Яке з яблук: вигідніше купувати? Якість яблук однакова.

Розв'язання. Коли людина хоче їсти, то її цікавить не ширина яблука, а його об'єм. Відношення об'єму куль пропорційне відношенню кубів їх радіусів. У нашій задачі його відношення дорівнює: $\left(\frac{1\frac{1}{4}}{1}\right)^3 = \frac{125}{64}$=2. Тоді по об'єму перше яблуко більше приблизно у два рази. А коштує воно всього в 1,5 рази більше. Значить, його купувати вигідніше. Математичною моделлю є задача на знаходження відношення об'ємів куль.

Задача 16. Продається гарнітур біжутерії: кліпси, перстень, брошка, ланцюжок. Брошка коштує 120 *грн*, ланцюжок 25 *грн.* Кліпси з брошкою втроє дешевші, ніж перстень з ланцюжком, перстень з брошкою удвічі дешевші, а ніж кліпси та ланцюжок. Скільки коштують кліпси та перстень? [2]

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо вартість кліпсів через *x*, а вартість персня через *y*. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}120 + x = 3 \cdot (y + 25),\\ 2(y + 120) = x + 25\end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, визначимо, що вартість кліпсів – 735 *грн,* вартість персня – 260 *грн.*

Задача 17. Ви отримали в банку позику 300 тис. *грн* при нормі відсотка 10%.

Який прибуток отримає банк?

Розв'язання. Знайдемо яку суму потрібно вернути банку:

300000·1,1=330 000.(100%+10%=110%=1,1), 330 000-300 000=30 000*грн.* Математичною моделлю є задача на відсотки.

Задача 18. Банк виплачує своїм вкладникам 4% річних і дає позики позичальникам під 10% річних. Чому дорівнює банківський прибуток від коштів вкладників у розмірі 10 млн. *грн* при видачі позики позичальникам у розмірі 5 млн. *грн* на один рік?

Розв'язання. Банківський прибуток визначається як різниця між сумами вкладників і сумами позичальників. 10%=0,1; 4%=0,04.

5 000 000·0,1-10 000 000·0,04=100 000 *грн.* Математичною моделлю є задача на відсотки.

Задача 19. Банк видав позику 10 млн грн із розрахунку 8% річних. Який буде прибуток банку за три місяці (без урахування відсотків на відсотки)? Розв'язання. Квартальний відсоток: 8:4=2%=0,02. 10 000 000·0,02=200 000 *грн.* Математичною моделлю є задача на відсотки.

Задача 20. У родини є 1000 *дол.*, і вона розв'язує, чи краще їх заощадити чи витратити. Якщо вона покладе їх в банк, то через рік отримає 1120 *дол.* Інфляція складає 14% за рік. Визначити, яка номінальна відсоткова ставка, яка реальна відсоткова ставка та як би ви розпорядилися грошима.

Розв'язання. Спочатку визначимо номінальну відсоткову ставку:

$\frac{1120 \bullet 100}{1000}$ - 100%= 112% - 100% = 12%. Щоб визначити реальну відсоткову ставку потрібно від номінальної відсоткової ставки відняти відсоток інфляції:

12%-14% = -2%. При від'ємному значенню реальної відсоткової ставки доцільно витратити гроші зараз, оскільки сума відсоткових надходжень не перевищує росту цін на товари. Математичною моделлю є задача на відсотки.

Задача 21. Родина виграла в "Лото-Забава" 3 000 000 *грн.* і вирішила на два роки покласти гроші в банк. У банку "А" їм запропонували 20% річних при нарахуванні "складного відсотка", а в банку "Б" запропонували більш високу відсоткову ставку – 24% за методом "простого відсотка". Родина поклала гроші в банк "Б". Проаналізувати вибір родини: визначити вигоди або збитки від прийнятого рішення.

Розв'язання. Розглянемо варіант з банком "А" за методом нарахування "складного відсотка". Складний відсоток нараховується за формулою:

$A_n = A_0(1 + i)^n$, де A_0 – сума внеску, i – відсоток річних n – кількість років. Тоді:

A_n = 3 000 000·(1 + 0,2)^2=4 320 000.

Розглянемо варіант з банком "Б" за методом нарахування "простого відсотка". Простий відсоток нараховується за формулою:

$A_n = A_0 (1 + n \bullet i),$

де A_0 – номінальна сума внеску, i – відсоток річних, n – кількість років.

A_n = 3 000 000· (1 + 2 • 0,24) =4 440 000.

Родина зробила правильний вибір. Прибуток родини від можливого кращого варіанта склали 120 000 *грн.* Математичною моделлю є задачі на відсоткові розрахунки.

Задача 22. Уряд одержав іноземний кредит у розмірі 10 млрд. *євро* з річною ставкою відсотка 6%.

Визначити суму, на яку збільшиться державний борг, та якою має бути величина щорічних виплат по кредиту.

Розв'язання. Якщо держава на момент одержання зовнішньої позики мала зовнішній державний борг, то він збільшиться на 10 млрд. *євро*.

Щорічно держава повинна сплачувати відсотки, які дорівнюють:

10 млрд. *євро* · 6%:100%=10·0,06=0,6 млрд. *євро*. Математичною моделлю є задача на відсотки.

Висновок. Розв'язування економічних задач дають можливість формувати в учнів математичний стиль мислення; розуміння того, як за допомогою математичного апарату курсу загальноосвітньої школи можна створювати математичні моделі та аналізувати завдання економіки, і як найважливіші поняття економіки стають конкретними прикладами стандартних понять математики.

1. Горун Л. Про математичне моделювання // Математика. – травень 2005. – №20(320). – С. 11 – 14.

2. Кошкалда І.В., Щербань В.П. 334 задачі з економіки з розв'язками.

3. Лавінський М., Пінчук О. Математика в економіці // Математика. – липень 2008. – №27 – 28(471 – 472). – С. 31 – 36.

4. Лисенко В.І., Пономаренко Ю.І. Економічні задачі в загальноосвітній школі // Математика. – червень 2003. – №21 (225) – С. 13 – 19.

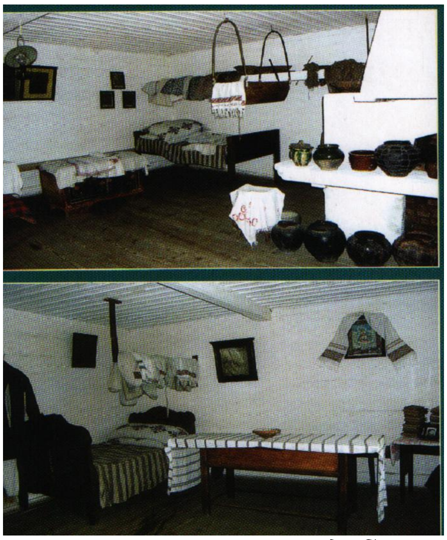
5. Науменко Т.Ю. Методи розв'язування економічних задач // Математика. – травень 2004. – №20 (272).

6. Трегуб Н. Математика в економіці. Програма спецкурсу для учнів 10 – 11 класів загальноосвітньої школи //Математика. – серпень 2005. – №31 – 32 (331 – 332). – С.15 – 17.

7. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу // Математика. – червень 2003. – №21 (225). – С .13 – 19.

Стаття надійшла до редакції 15.05.2010

До дня народження Івана Франка



Світлина музею – садиби
І.Я. Франка

Маленький хутір серед лук і нив
на горбику над річкою шумною, –
от там я в простій холопській хаті жив,
і самота, і сум жили зо мною.

Іван Франко

В хаті піч трохи не в пів кімнати
З запічком і припічком із глини,
"На Підгір'ю села невеселі".
Вічно тепло – то жолудок хати,
Величезний, як живіт дитини, –

Відривок з вірша "На Підгір'ю села невеселі"
Іван Франко

У даній публікації використано світлини з збірки портретів Іван Франко до 150-річчя від дня народження, музей Івана Франка с. Нагуєвичі видавництво "Коло".

Віктор Романюк. Свою свічку світити. Видавництво "Щедрик". – Стрий, 2004. – 95 с.

Бунь В.Л., Оркуш М.О. Музей Івана Франка: путівник. – Дрогобич, "Добре серце", 2003. – 24 с.

Написано за мотивами: Преображення Господнє. Спас. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия, 2001. Сайт b-zakon.org.