УДК 519.852(07)

Тарас Кобильник, *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики та обчислювальної математики*
Володимир Грозовський, *викладач кафедри інформатики та обчислювальної математики*
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ “ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ”

У статті подано загальну характеристику методів розв’язування задач цілочисельного лінійного програмування, детально проаналізовано алгоритм методу гілок і меж, вказані його переваги та недоліки.

***Ключові слова**: дискретна оптимізація, цілочисельне лінійне програмування, метод гілок і меж, системи комп’ютерної математики.*

Рис. 3. Літ. 17.

Постановка проблеми. Дискретні оптимізаційні задачі знаходять широке застосування в різних галузях, де використовуються математичні методи для аналізу процесів, що там відбуваються. Необхідність розв’язування таких задач призводить до того, що дискретна оптимізація стає важливим елементом освіти фахівців. На сьогодні розроблені сучасні методи та алгоритми розв’язування задач дискретного програмування [4 – 8, 10, 11, 13, 15, 16], розроблені пакети прикладних програм (наприклад, ДІСПРО, МОРОЗ, TORA), які дозволяють розв’язувати ряд стандартних задач дискретного програмування. Крім того, зростає роль універсальних математичних пакетів (Maple [1], Mathematica [17], Matlab [2], Maxima [9] та інших).

Аналіз досліджень і публікацій. У період становлення дискретної оптимізації, який нараховує понад п’ятдесят років, з’явилося багато робіт, присвячених цій проблемі. Серед них монографії А.О. Корбута та Ю.Ю. Фінкельштейна [4], А. Кофмана та А. Анрі-Лабордера [5], Л.С. Лесдона [6], Т. Ху [1], І.В. Сергієнка [11], І.В. Сергієнка та В.П. Шила [10], Х. Пападімітріу і К. Стайгліца [8], А. Схрейвера [13], В.С. Михалевича та А.І. Кукси [7], Ю.Ю. Фінкельштейна [15].

Мета статті: методична характеристика теми “Цілочисельне лінійне програмування”.

Виклад основного матеріалу. Існує очевидний і досить універсальний метод розв’язування задач цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП), який може бути застосований, якщо множина допустимих розв’язків обмежена. Це метод повного перебору [3], який полягає у переборі всіх можливих варіантів. Метод дає гарантований розв’язок, якщо множина допустимих розв’язків скінченна, та існує ефективний алгоритм знаходження будь-якого елемента з цієї множини та обчислення за цим елементом цільової функції. Повний перебір варіантів у більшості випадків дозволить отримати оптимальний розв’язок. Але він має очевидний недолік: для більшості випадків кількість варіантів, які доводиться перебирати, надто велика, і реалізувати метод за прийнятний час не вбачається можливим. Тому розвиваються методи і алгоритми, які дозволяють скоротити такий перебір.

Виокремимо основні методи розв’язування задач ЦЛП: методи відтинання [4], комбінаторні методи [7; 5], наближені методи [11; 9].

Методи відтинання. Перші спроби розв’язування задач ЦЛП зводились до відкидання умови цілочисельності, розв’язування лінійної задачі і округлення отриманого результату. Суть методів полягає в наступному. Якщо отриманий розв’язок задовольняє умові цілочисельності, то процес закінчено. Інакше до початкової задачі додається нове лінійне обмеження, що виключає з розгляду отриманий нецілочисельний план. Розв’язується задача з додатковим обмеженням. Процес повторюється до отримання цілочисельного розв’язку.

Методи відтинань не знайшли широкого застосування при розв’язуванні прикладних задач з таких причин [12]: визначення того, яке відтинання сильніше, є досить складним в обчислювальному плані завданням; методи відтинання не пристосовані до задач зі слабо заповненими матрицями.

Комбінаторні алгоритми. Основна ідея комбінаторних методів полягає у використанні скінченності множини допустимих розв’язків і заміні повного їх перебору скороченим. Якщо якимось чином вдається показати, що підмножина $G' \subset G$ не може містити оптимальних розв’язків, то далі задача розв’язується на множині $x \in G \setminus G'$. При цьому серед множин, які послідовно утворюються на кожному кроці процесу, можуть з’явитися як підмножини, які не містять допустимих розв’язків, так і підмножини, які не містять оптимального розв’язку. Таким чином, комбінаторні методи базуються на двох принципах: послідовному розбитті на підмножини та оцінюванні отриманих підмножин. Підмножина, яка не може бути відсіяною, розбивається на підмножини далі. Комбінаторні методи розрізняються способом розбиття і способом оцінювання. Серед цих методів виокремлюють такі [12]: послідовного аналізу варіантів; гілок і меж; динамічного програмування; апроксимаційно-комбінаторний; методи, які базуються на послідовних схемах.

Наближені методи. Кількість обчислень для розв’язування більшості задач ЦЛП, експоненціально зростає при збільшенні розмірності. Досить часто необхідно оперативно розв’язувати оптимізаційні задачі в реальному масштабі часу, тому наближений розв’язок задачі, отриманий за прийнятний час, важливіший ніж точний розв’язок, знайдений через значний проміжок часу. Серед наближених методів розв’язування задач ЦЛП умовно можна виділити наступні групи: методи, що є модифікацією точних; жадібні алгоритми; методи локального типу; методи випадкового пошуку; метаевристичні методи.

В цілому, алгоритми цілочисельного програмування містять два кроки.

Крок 1. Розв’язується задача лінійного програмування і визначається її оптимальний розв’язок (без умови цілочисельності змінних).

Крок 2. Додаються спеціальні обмеження, які ітераційним шляхом змінюють простір допустимих розв’язків задачі лінійного програмування таким чином, щоб у результаті отримати оптимальний розв’язок, що задовольняє умову цілочисельності.

Вважається, що метод гілок і меж є зручним для чисельної реалізації.

Розглянемо використання методу гілок і меж для розв’язування задачі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) на прикладі [14].

Приклад. Максимізувати функцію $f = 5x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \ \textit{і цілі.} \end{cases}$$

Відповідна задача лінійного програмування (позначимо ЛП0) отримується шляхом відкидання умови цілочисельності. Її оптимальним розв’язком буде $x_1 = 3{,}75$, $x_2 = 1{,}25$ і $f = 23{,}75$. Оскільки оптимальний розв’язок задачі ЛП0 не задовольняє умові цілочисельності, змінюємо простір допустимих значень задачі. Для цього спочатку вибираємо одну зі змінних, значення якої в оптимальному розв’язку задачі ЛП0 не є цілочисельним. Вибравши x_1, вихідна задача ЛП0 замінюється двома новими задачами лінійного програмування ЛП1 та ЛП2, які визначаються таким чином: простір допустимих розв’язків задачі ЛП1 складається з простору допустимих розв’язків задачі ЛП0 з додаванням нового обмеження $x_1 \le 3$; простір допустимих розв’язків задачі ЛП2 складається з простору допустимих розв’язків задачі ЛП0 з додаванням нового обмеження $x_2 \ge 4$.

На рис.1 зображені простори допустимих розв’язків задач ЛП1 та ЛП2. Ці простори містять всі допустимі розв’язки початкової задачі цілочисельного лінійного програмування. Це означає, що задачі ЛП1 та ЛП2 “не втратять” розв’язку початкової задачі ЛП0.

Продовжуючи виключати з розгляду області, які не містять цілочисельних розв’язків (такі як $3 < x_1 < 4$), шляхом введення відповідних перетворень, отримаємо розв’язок, який відповідатиме умові цілочисельності. Іншими словами, розв’язується задача цілочисельного лінійного програмування шляхом розв’язування набору неперервних задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_1 \le 3$ та $x_1 \ge 4$ взаємовиключаючі, тому задачі ЛП1 та ЛП2

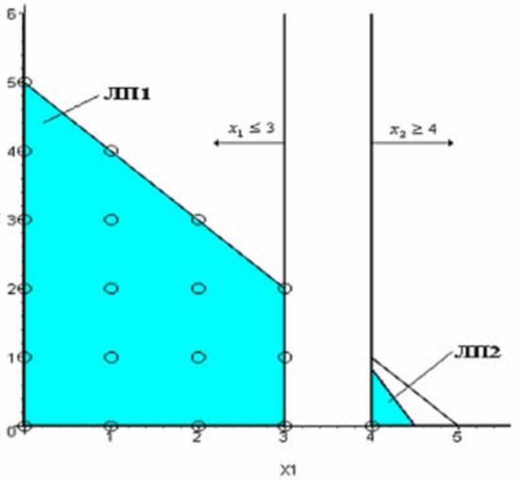

Рис. 1

необхідно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування, що і показано на рис. 2. Дихотомізація задач лінійного програмування – основа концепції галуження у методі гілок і меж. У цьому випадку x_1 називається змінною галуження. Оптимальний розв’язок задачі цілочисельного програмування знаходиться у просторі допустимих розв’язків або задачі ЛП1, або задачі ЛП2. Тому обидві підзадачі повинні бути розв’язані. Виберемо спочатку задачу ЛП1 (вибір довільний), що має додаткове обмеження $x_1 \le 3$.

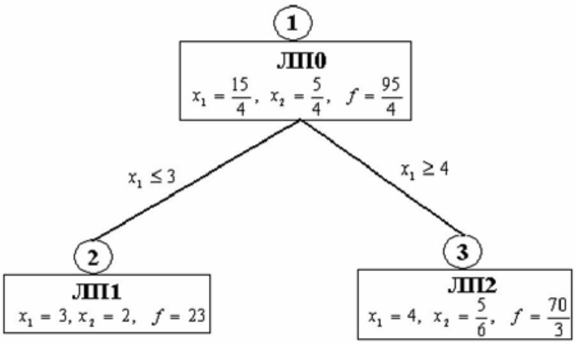

Рис. 2. Галуження за змінною x_1 для створення задач ЛП1 та ЛП2

Максимізувати $f = 5x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45, \\ x_1 \le 3, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \ і \ цілі. \end{cases}$$

Оптимальним розв’язком задачі ЛП1 є $x_1 = 3,\ x_2 = 2$ та $f = 23$, що задовольняє вимозі цілочисельності змінних x_1 та x_2. У такому випадку говорять, що задача ЛП1 прозондована. Це означає, що задача ЛП1 не повинна більше досліджуватися, оскільки вона не може містити кращого розв’язку задачі цілочисельного лінійного програмування.

У цій ситуації не можна оцінити якість цілочисельного розв’язку, отриманого із задачі ЛП1, оскільки розв’язок задачі ЛП2 може привести до кращого цілочисельного розв’язку. Нижньою межею оптимального значення цільової функції початкової задачі ЦЛП є $f = 23$. Будь-яка нерозглянута підзадача, яка не може призвести до кращого цілочисельного розв’язку, повинна бути виключена з розгляду як безперспективна. Якщо ж нерозглянута підзадача може призвести до кращого цілочисельного розв’язку, то нижня межа повинна бути відповідним чином змінена.

При значенні нижньої межі $f = 23$ досліджуємо задачу ЛП2 (єдину, яка залишилась нерозглянутою). Оскільки в задачі ЛП0 оптимальне значення цільової функції дорівнює $\frac{95}{4} = 23{,}75$ і всі її коефіцієнти є цілими числами, то неможливо отримати цілочисельний розв’язок задачі ЛП2, який буде кращим за існуючий. Тому задача ЛП2 є безперспективною і вважається дослідженою. Залишаються без відповіді два питання: чи можна було в задачі ЛП0 вибрати змінну x_2 в якості змінної галуження і чи можна було при виборі підзадачі для зондування розв’язати спочатку задачу ЛП2 замість ЛП1?

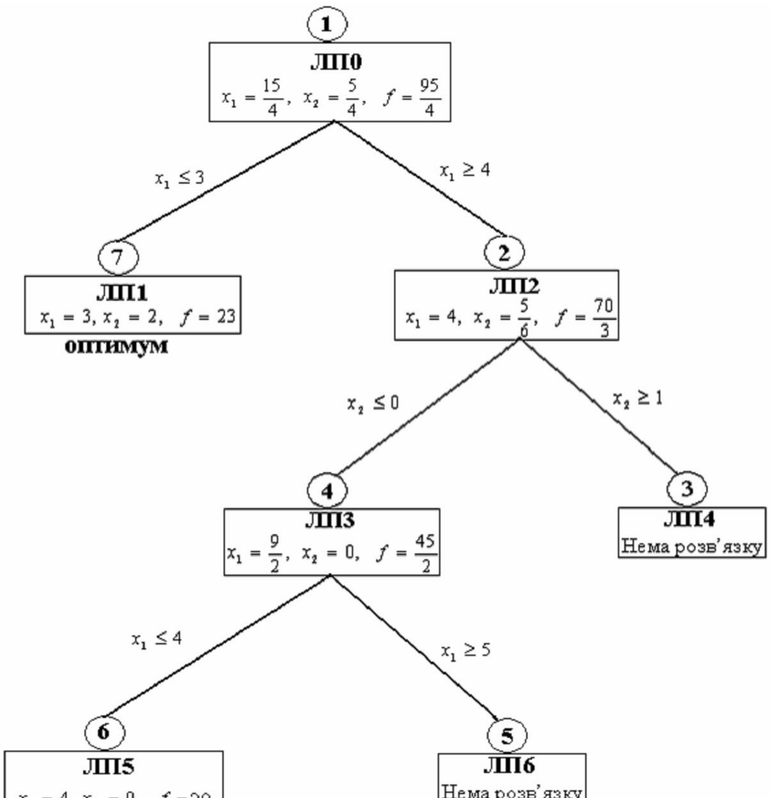

Рис. 3

Відповідь на обидва запитання “так”. Проте наступні обчислення можуть суттєво відрізнятися. Ситуація, коли першою розв’язується задача ЛП2, ілюструється схемою обчислень (рис. 3). Оптимальним розв’язком задачі ЛП2 є $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{5}{6}$.

Оскільки значення змінної x_2 не є цілим числом, то задача ЛП2 досліджується далі. Розглядаємо підзадачі ЛП3 та ЛП4, використовуючи гілки $x_2 \le 0$ та $x_2 \ge 1$ відповідно. Це означає, що простір розв’язків ЛП3 = простір розв’язків ЛП2+($x_2 \ge 1$) = простір розв’язків ЛП0+($x_1 \ge 4$)+($x_2 \ge 1$); простір розв’язків ЛП4 = простір розв’язків ЛП2+($x_2 \le 0$) = простір розв’язків ЛП0+($x_1 \ge 4$)+($x_2 \le 0$).

Є три нерозглянуті підзадачі, які повинні бути розв’язані, – ЛП1, ЛП3 та ЛП4. Припустимо, що довільно вибрано першою задачу ЛП4. Ця задача не має розв’язку і, відповідно, є прозондованою. Наступною вибираємо підзадачу ЛП3. Її оптимальним розв’язком є $x_1 = \frac{9}{2},\ x_2 = 0$ та $f = \frac{45}{2}$. Нецілочисельне значення породжує дві гілки розв’язків при $x_1 \le 4$ та $x_1 \ge 5$ і відповідні їм підзадачі ЛП5 та ЛП6. При цьому:

- простір розв’язків задачі ЛП5 = простір розв’язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + ($x_2 \le 0$)+($x_1 \le 4$) = простір розв’язків ЛП0 ($x_1 = 4$)+($x_2 \le 0$);
- простір розв’язків задачі ЛП6 = простір розв’язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + ($x_2 \le 0$)+($x_1 \ge 5$) = простір розв’язків ЛП0 ($x_1 \ge 5$)+($x_2 \le 0$).

Тепер нерозглянутими є підзадачі ЛП1, ЛП5 та ЛП6. Підзадачу ЛП6 прозондовано, оскільки нема допустимих розв’язків. Підзадача ЛП5 має цілочисельний розв’язок ($x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ f = 20$) і, відповідно, породжує нижню межу ($f = 20$) оптимального значення цільової функції задачі ЦЛП. Тепер залишається тільки підзадача ЛП1, розв’язок якої також є цілочисельним ($x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ f = 23$). Відповідно, нижню межу значень цільової функції покладаємо рівною 23. Оскільки всі підзадачі прозондовано, оптимальним розв’язком задачі ЦЛП є розв’язок, що відповідає останній нижній межі, а саме $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ f = 23$.

Набір розв’язків підзадач, зображених на рис.3 (ЛП0, ЛП1, ЛП4, ЛП3, ЛП6, ЛП5, ЛП1), є найгіршим. Тим не менше, він зустрічається на практиці. Цей приклад вказує на основний недолік методу гілок і меж: як вибирати наступну підзадачу для дослідження і як вибирати для неї змінну галуження?

Зауважимо, що всі задачі ЛПi зручно розв’язувати, наприклад, за допомогою команди **maximize_lp** у СКМ Maxima 5.18.1.

У процесі розв’язування, зображеного на рис.2, випадково вибрано добру нижню межу значень цільової функції на першій же підзадачі ЛП1, що дозволило прозондувати ЛП2 без детальних досліджень та завершити обчислення. У процесі розв’язування, показаного на рис. 3, досліджено сім підзадач, і тільки тоді закінчились обчислення за методом гілок і меж. Хоча існують евристичні методи, які дозволяють “вгадати”, яка з гілок може призвести до найкращого розв’язку задачі ЦЛП, проте не існує строгої теорії, яка забезпечувала би надійні результати.

Алгоритм методу гілок і меж безпосередньо розповсюджується на задачі частково-цілочисельного ЛП (в яких тільки деякі зі змінних повинні набувати ціличисельних значень). Якщо деяка змінна є неперервною, то вона ніколи не вибирається в якості змінної галуження.

Висновок. Для розв’язування задач ЦЛП досить ефективним є метод гілок і меж. Спочатку симплексним методом (або з використанням певної СКМ) розв’язується задача без умов цілочисловості. Потім вводиться правило перебору. Починаючи з розв’язування такої задачі, за методом гілок і меж передбачається поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв’язків, і дослідження кожної окремої частини множини допустимих розв’язків.

Алгоритм методу гілок і меж є найбільш надійним засобом розв’язування задач ЦЛП. Він лежить в основі більшості прикладних програм призначених для розв’язування таких задач.

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в MAPLE: Монография / Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. – Гродно; Таллин, 2007. – 454 с.

2. Гаєв Є.О. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики: Навч. посіб. [для студ. техн. спец. вищих навч. закл.] / Є.О. Гаєв, Б.М. Нестеренко. – К.: НАУ, 2004. – 175 с.

3. Глибовець М.М. Штучний інтелект: підруч. [для студ. вищ. навч. закладів, що навчаються за спец. “Комп’ютерні науки” та “Приклад. математика”] /

М.М. Глибовець, О.В. Олецький. – К.: Вид. дім “КМ Академія”, 2002. – 366 с.

4. Корбут А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

5. Кофман А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование / А. Кофман, А. Анри-Лаборде. – М.: Мир, 1977. – 432 с.

6. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем / Л.С. Лэсдон. – М.: Мир, 1975. – 432 с.

7. Михалевич В.С. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов / В.С. Михалевич, А.И. Кукса. – М.: Наука, 1983. – 208 с.

8. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 512 с.

9. Семеріков С.О. Maxima 5.13: довідник користувача / Семеріков Сергій Олексійович; за ред. академіка М.І. Жалдака. – Київ, 2007. – 48 с.

10. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – Киев: Наук. думка, 2003. – 264 с.

11. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И.В. Сергиенко. – К : Наук. думка, 1988. – 471 с.

12. Сигал И.Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: учеб.пособие / И.Х. Сигал, А.П. Иванова. – [изд. 2-е, испр.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

13. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования / А. Схрейвер. В двух томах. – М.: Мир, 1991. Т. 1. – 362 с.; Т. 2. – С. 363 – 704.

14. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха; пер. с англ. – [7-е издание]. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005. – 912 с.

15. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования / Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1976. – 264 с.

16. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: Мир, 1974. – 520 с.

17. Шмидский Я.К. Mathematica 5: Самоучитель / Яков Константинович Шмидский. – М.; СПб.; К.: Диалектика, 2004. – 580 с.

Стаття надійшла до редакції 06.04.2011

УДК 332.12.007(477)

Роман Городнюк, *заступник директора з навчально-методичної роботи ВПУ №22, м. Сарни*

НАПРЯМИ ФОРМУВАННЯ ОСВІТНЬО-ФАХОВОГО ПОТЕНЦІАЛУ В СИСТЕМІ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ РЕГІОНУ

У статті висвітлено теоретичні засади щодо формування освітньо-фахового потенціалу регіону відповідно до потреб суспільства для забезпечення реалізації стратегічних цілей соціально-економічного розвитку регіону.

Ключові слова: *освітньо-фаховий потенціал, людські ресурси, трудовий потенціал, професійна освіта, людський капітал, соціальна економіка, соціально-економічний розвиток, інтелектуальний капітал.*

Літ. 4.

Актуальність проблеми. Здобуття Україною незалежності поставило на порядок денний питання підготовки фахівців, здатних забезпечити Гі-безпеку і економічне відродження.

Адже, розвиток економіки України, який може забезпечити соціально-економічне зростання в умовах інтенсифікації удосконалення ринкового середовища, з одного боку, та включення її в світові глобалізаційні процеси, з другого боку, є можливим лише при формуванні якісно нового трудового потенціалу, що має оптимальні показники фізичного, психічного та соціального здоров’я й містить в своїй структурі високий інтелектуальний і освітньо-фаховий потенціал.

Тільки трудовий потенціал з вказаними характеристиками, насамперед, з розвиненою до належного рівня освітньо-фаховим потенціалом може дати можливість отримувати переваги у конкурентній боротьбі на національному, регіональному рівнях. У нових соціально-економічних умовах саме освітньо-фаховий потенціал викликає особливий інтерес, оскільки його якість та рівень розвитку визначатиме креативну здатність та інноваційні можливості трудового потенціалу, детермінуватиме перехід до інформаційного суспільства, а, отже, формування сучасних пріоритетів розвитку суспільства та їх реалізацію.

На жаль, на зламі XX і XXI ст. спостерігається погіршення кількісних та якісних характеристик трудового, у тому числі освітньо-фахового потенціалу, що посилює напругу на загальноукраїнському ринку праці, зумовлює деформації його регіональних та галузевих сегментів, активізує відтік економічно активного населення за межі країни. Сказане засвідчує про важливість виявлення проблем формування