

УДК 514.12(07)

Тетяна Махомета, кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

ВИВЧЕННЯ ПЕРШОКУРСНИКАМИ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ У КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПЕДАГОГІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

У статті визначено мету, завдання та зміст вивчення першокурсниками ліній і поверхні в курсі аналітичної геометрії у педагогічному університеті. Детальніше розглянуто зміст теми "Пряма лінія на площині", конкретизовано завдання, що спрямовані на досягнення загальнонаукової та фахової мети вивчення теми. Подано рекомендації щодо шляхів реалізації сформульованих завдань.

Ключові слова: аналітична геометрія, лінія, поверхня, загальнонаукова мета, фахова мета.

Рис. 3. Літ. 5.

Татьяна Махомета, кандидат педагогических наук,
доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике
Уманского государственного педагогического университета имени Павла Тychины

ИЗУЧЕНИЕ ПЕРВОКУРСНИКАМИ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ В КУРСЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В статье определена цель, задание и содержание изучения первокурсниками линии и поверхности в курсе аналитической геометрии в педагогическом университете. Подробнее рассмотрено содержание темы "Прямая линия на плоскости", конкретизированы задачи, направленные на достижение общенаучной и профессиональной цели изучения темы. Представлены рекомендации относительно путей реализации сформулированных задач.

Ключевые слова: аналитическая геометрия, линия, поверхность, общенаучная цель, профессиональная цель.

Tetiana Makhometa, Ph.D. (Pedagogy), Assistant Professor of the
Higher Mathematics and Mathematics Teaching Methods Department
Uman Pavlo Tychyna State Pedagogical University

FRASHMEN LEARNING LINE AND SURFACE IN THE COURSE OF ANALYTICAL GEOMETRY AT PEDAGOGICAL UNIVERSITY

The article defines the purpose, objectives and content of the freshmen learning line and surface in the course of analytical geometry at Pedagogical University. Given detailed characteristics the content of the theme "Direct Line on Flat", specified tasks aimed at achieving the goal of general and professional study of the theme. Given recommendations on the ways of implementation of formulated tasks.

Keywords: analytic geometry, line, surface, general and specific purpose, professional purpose.

Постановка задачі. В Концептуальних засадах розвитку педагогічної освіти України та її інтеграції в європейській освітній простір зазначається, що метою розвитку педагогічної освіти є створення такої її системи, яка на основі національних надбань світового значення та усталених європейських традицій забезпечує ґрунтовну підготовку педагогічних працівників, здатних здійснювати професійну діяльність на демократичних та гуманістичних засадах, реалізовувати освітню політику як пріоритетну функцію держави, що спрямовується на розвиток та самореалізацію особистості, задоволення її освітніх і духовно-культурних потреб, а також необхідність бути конкурентоспроможними на ринку праці [3].

Процес підготовки майбутніх учителів

математики розпочинається на першому курсі, триває під час навчання у педагогічному університеті та упродовж усього життя. Важливу роль у цьому процесі відіграють математичні дисципліни, зокрема аналітична геометрія.

Аналітична геометрія закладає основу для формування нових абстрактних понять і відношень, які геометрично ідеалізують навколишню дійсність. Вона сприяє методологічній цілісності різних математичних дисциплін навчального плану підготовки вчителя математики, тісноті міжпредметних зв'язків, коректності введення нового математичного апарату. Все це стає базою для подальшого поглибленого вивчення геометрії як науки і розуміння її елементів як складової навчального предмета в школі.

ВИВЧЕННЯ ПЕРШОКУРСНИКАМИ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ У КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПЕДАГОГІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Плоскі лінії і лінії та поверхні в просторі – дві змістові лінії курсу, які є методологічно нерозривними і породжують спільні проблеми у теорії та методиці навчання (аналітичної геометрії). Питання якісного викладання та вивчення ліній і поверхонь є не простим. Існують об'єктивні труднощі методологічного характеру, непростою є задача інтенсифікації процесу навчання, нетривіальною є проблема формування цілісного уявлення про чисті геометричні форми і аналітичні умови, що їх задають тощо. Все це на фоні сучасних об'єктивних передумов процесу навчання формує проблему наявності ефективної методики навчання аналітичної геометрії у розрізі вивчення ліній та поверхонь. Зазначимо, що в шкільному курсі геометрії учні знайомляться лише з деякими лініями (пряма, коло, ламана, графіки функції) і поверхні тіл (кулі, циліндри, піраміди, конус).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сучасному етапі розвитку методичної науки окремі аспекти вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії висвітлені в роботах відомих математиків, педагогів і методистів: М.В. Працьовитого, Н.А. Тарасенкової, М.К. Тюлюша, О.В. Семеніхіної, О.М. Коломієць, Я.В. Гончаренко, Г.М. Улитина, Л.П. Мироненко та інших.

Різні методичні шляхи та прийоми вивчення ліній і поверхонь знайшли відображення у підручниках, навчальних посібниках та збірниках задач із курсу аналітичної геометрії, серед яких слід відзначити визнані праці: В.П. Білоусової та ін. "Аналітична геометрія", П.С. Александрова "Лекции по аналитической геометрии", В.П. Єрмакова, підручники з аналітичної геометрії Л.С. Атанасяна, В.Т. Базилева, О.В. Погорелова, О.А. Борисенка та інших.

Формування цілей статті: визначити мету, завдання та зміст вивчення першокурсниками ліній і поверхонь в педагогічному університеті.

Викладення основного матеріалу. Загальну мету курсу, як і мету кожної навчальної теми, слід формулювати відносно діяльності студентів, а не відносно діяльності викладача. Головне у навчанні – кінцевий результат, якого мають досягти студенти. Завдання викладача полягає у здійсненні розумного і цілеспрямованого управління навчально-пізнавальною діяльністю студентів стосовно сприйняття, осмислення, засвоєння (повторення тощо) ними навчального матеріалу.

Стосовно вивчення студентами ліній і поверхонь це означає, що, визначаючи мету кожної із зазначених тем, слід враховувати два взаємопов'язані аспекти – загальнонауковий і

фаховий. З дидактики відомо, що у процесі навчання необхідно реалізувати три групи взаємопов'язаних цілей – дидактичну, розвивальну та виховну.

Загальнонаукова мета вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики:

- **(ДЗ)** оволодіння системою знань та умінь, що стосуються ліній і поверхонь, формування умінь використовувати координатний, векторний методи та метод геометричних перетворень для дослідження ліній і поверхонь, а також створення на основі вивчених відомостей про лінії та поверхні міцного підґрунтя для розв'язування задач з інших навчальних дисциплін;

- **(РЗ)** формування та розвиток алгоритмічного, логічного та просторового мислення, інтелектуальних і комунікативних умінь і навичок, загальної і математичної культури, а також наукового світогляду;

- **(ВЗ)** виховання графічної культури, культури мови і мовлення, а також наполегливості, творчості, активності, цілеспрямованості, дисциплінованості та інших особистісних якостей.

Фахова мета вивчення ліній і поверхонь майбутніми вчителями математики:

- **(ДФ)** засвоєння відомостей про лінії та поверхні, необхідних для правильного розв'язання методологічних і методичних питань, які вимагають у процесі навчання математики в школі;

- **(РФ)** формування і розвиток основ математичної, педагогічної та методичної культури, а також емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери;

- **(ВФ)** виховання готовності до педагогічної діяльності, зокрема до навчання учнів питанням, що тісно пов'язані з лініями і поверхнями.

Щоб у процесі вивчення студентами ліній і поверхонь було досягнуто визначеної мети, слід сформулювати і розв'язати низку завдань (систему умов), які матеріалізуються у конкретних практичних діях.

Оскільки навчальний матеріал, що стосується ліній і поверхонь, великий за обсягом і багатогранний (прямі і криві, на площині і в просторі, загальна теорія ліній і загальна теорія поверхонь, геометричні перетворення площини і простору), то завдання доцільно конкретизувати для кожного навчального модуля програми. Необхідно з'ясувати, як вибудовується зміст навчального матеріалу, що стосується ліній і поверхонь.

У додатку "Система змістових модулів" галузевих стандартів [4] змістовий модуль **ІІІ.07. Аналітична геометрія** визначається переліком

ВИВЧЕННЯ ПЕРШОКУРСНИКАМИ ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ У КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПЕДАГОГІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

таких тем – навчальних модулів (курсивом позначено теми, що стосуються ліній і поверхонь):

1. *Елементи векторної алгебри (ПП.07.01).*
2. *Метод координат на площині (ПП.07.02).*
3. *Пряма на площині (ПП.07.03).*
4. *Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола (ПП.07.04).*
5. *Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку (ПП.07.05).*
6. *Геометричні перетворення площини (ПП.07.06).*
7. *Метод координат у просторі (ПП.07.07).*
8. *Теорія прямих і площин у просторі (ПП.07.08).*
9. *Вивчення алгебраїчних поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями (ПП.07.09).*
10. *Загальна теорія алгебраїчних поверхонь 2-го порядку (ПП.07.10).*
11. *Геометричні перетворення простору (ПП.07.11).*

Існує кілька способів структурування навчального матеріалу як усього курсу аналітичної геометрії, так і матеріалу про лінії та поверхні зокрема. Зрозуміло, що зміст освіти майбутніх учителів математики визначається стандартами вищої педагогічної освіти. І все ж структура курсу аналітичної геометрії і його змістове наповнення певною мірою залежать від умов педагогічного університету (загальна кількість годин, кількість годин на аудиторні заняття тощо), майбутньої спеціалізації студентів.

Розглянемо детальніше зміст теми “Пряма лінія на площині” та визначимо мету за завдання вивчення даної теми.

1. Різні види рівнянь прямої (канонічне рівняння, рівняння прямої, яка проходить через відому точку і паралельна заданому вектору, рівняння прямої, яка проходить через дві відомі точки, рівняння прямої у відрізках на осях, параметричні рівняння прямої, рівняння прямої, яка проходить через відому точку і має заданий кутівий коефіцієнт, рівняння прямої з кутівим коефіцієнтом, загальне рівняння прямої, рівняння прямої, яка проходить через задану точку і перпендикулярна до заданого вектора, нормальне рівняння прямої).

2. Відстані на площині (відстань між двома точками, відстань точки від прямої, відхилення точки від прямої). Геометричний зміст лінійних нерівностей з двома невідомими.

3. Взаємне розміщення прямих. Кут між двома прямими. Критерій перпендикулярності прямих. Пучок прямих.

4. Основні задачі на знаходження рівняння прямої на площині. Застосування теорії прямих

до розв’язання задач, зокрема шкільного курсу математики.

Завдання вивчення теми “Пряма лінія на площині”, розв’язання яких сприятиме досягненню загальнонаукової мети навчання студентів педагогічних університетів ліній і поверхонь, на нашу думку, найдоцільніше сформулювати так:

- **(ДЗ)** оволодіння поняттями і твердженнями теми; формування умінь застосовувати координатний і векторний методи для задання і дослідження прямих на площині та інших геометричних об’єктів і до розв’язування задач; формування умінь застосовувати теорію прямих при розв’язуванні задач;

- **(РЗ)** володіння уявленнями про місце теми в системі математичних дисциплін; формування умінь будувати приклади та контрприкладів, зокрема з використанням інформаційних технологій; формування умінь аналізувати отриманий результат на предмет його зв’язку з іншими темами курсу; формування та розвиток алгоритмічного, логічного та критичного мислення;

- **(ВЗ)** виховання патріотизму та національної самосвідомості; виховання графічної культури, культури мови і мовлення, а також наполегливості, творчості, активності, цілеспрямованості, дисциплінованості та інших особистісних якостей.

Завдання, що спрямовані на досягнення фахової мети вивчення теми “Пряма лінія на площині”, розв’язання яких сприятиме досягненню загальної мети навчання студентів педагогічних університетів ліній і поверхонь можуть бути такими:

- **(ДФ)** володіння уявленнями про місце теми в шкільному курсі математики; засвоєння відомостей про пряму лінію, необхідних для правильного розв’язання методологічних і методичних питань, які виникають у процесі навчання математики в школі; розкриття сутності прогалін шкільного курсу математики і можливих шляхів їх усунення; формування умінь застосовувати теорію прямих до розв’язування задач шкільного курсу математики; засвоєння методів і прийомів раціонального розв’язування задач ШКМ про пряму на площині;

- **(РФ)** створення комп’ютерної підтримки для вивчення теми “Пряма лінія на площині”; формування і розвиток основ методичної культури, а також емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери; добір і складання прикладних задач, які можна використати в процесі вивчення теми;

- **(ВФ)** формування мотивацій для отримання

нових знань і розвиток інтересу до навчання; виховання готовності до педагогічної діяльності, зокрема до навчання учнів питанням, що пов'язані з прямими на площині; створення сприятливої атмосфери на заняттях і підтримання у студентів бажання самовдосконалюватися.

Ця тема тісно пов'язана зі шкільним курсом алгебри та геометрії, курсами елементарної математики та методики навчання математики. Ефективність її вивчення залежить від організації актуалізації опорних знань студентів, отриманих у школі.

Розгляне особливості шляхів реалізації сформульованих завдань.

Інтенсифікувати виклад нового матеріалу на лекції можна за допомогою заздалегідь підготовленої презентації. Наприклад, слайди, зображені на рисунку 1, допоможуть викладачу унаочнити теоретичний матеріал, а студентам – краще усвідомити й запам'ятати його.

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (3 - 2; 4 - (-1)) = (1; 5)$$

Якщо підставити знайдені значення у рівняння прямої, то одержимо:

$$1(x - 1) + 5(y - 0) = 0, \quad x + 5y - 1 = 0.$$

Відповідь. Рівняння прямої має вигляд $x + 5y - 1 = 0$.

Сносів 2. Щоб записати рівняння прямої, яка проходить через точку C і перпендикулярна до прямої AB , необхідно спочатку знайти рівняння прямої AB , яке проходить через дві точки за формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \text{де } (x_1; y_1) - \text{координати}$$

точки A , $(x_2; y_2)$ – координати точки B . У результаті:

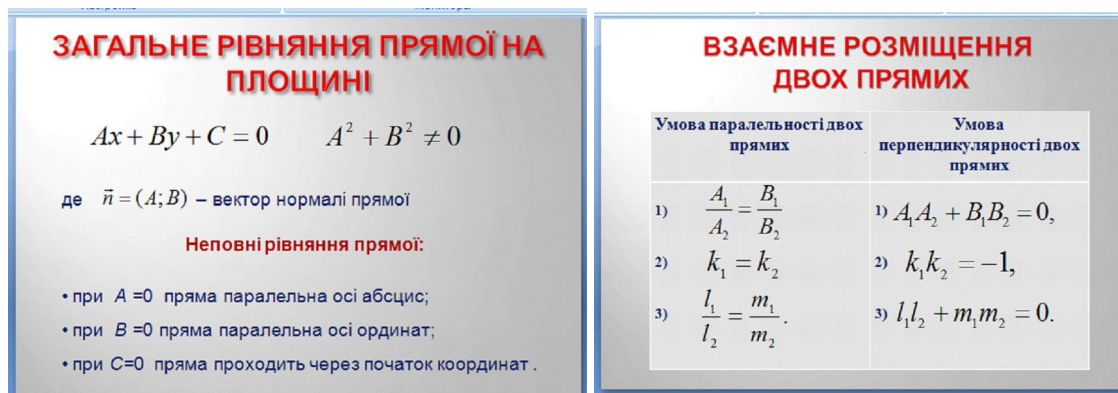


Рис. 1. Тема лекції “Пряма на площині”

Наприкінці першого практичного заняття студентам пропонується розв'язати кількома способами задачу про складання рівняння прямої, перпендикулярної заданій. Традиційно студенти подають розв'язання задачі способами, що не вивчаються в ШКМ, наприклад такі.

Задача 1. Задано точки $A(2; -1)$, $B(3; 4)$ і $C(1; 0)$. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку C і перпендикулярна до прямої AB .

Розв'язання. Сносів 1. Дану задачу можна розв'язати за допомогою рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно заданому вектору (в прямокутній декартовій системі координат), $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$,

де $(x_0; y_0)$ – координати точки C , тобто $x_0 = 1, y_0 = 0$, а $\vec{n} = (A; B)$ – вектор нормалі прямої. Знайдемо координати вектора \overline{AB} :

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y + 1}{4 + 1}, \quad \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{5}, \quad \text{або}$$

$$y = 5x - 11.$$

Враховуючи умову перпендикулярності двох прямих: $k_1 k_2 = -1$. Кутові коефіцієнти прямої AB ($k_1 = 5$) і шуканої прямої k_2 пов'язані між собою

співвідношенням $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, а пряма проходить через

точку C , за формулою $y - y_A = -\frac{1}{k_1}(x - x_A)$

одержимо шукане рівняння:

$$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 1), \quad y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5},$$

$$5y = -x + 1, \quad x + 5y - 1 = 0.$$

Відповідь. Рівняння прямої має вигляд $x + 5y - 1 = 0$.

Якщо студенти інших способів не називають, то доцільно провести бесіду в ході якої слід поставити такі питання:

1. Чи вивчається в загальноосвітній школі теоретичний матеріал, який було використано?
2. Чи можуть учні розв'язати таку задачу тими засобами, що пропонуються програмою?
3. Який апарат потрібно для цього використати.

Ці питання спонукають студентів до розв'язання задачі векторним методом.

Спосіб 3. Візьмемо на шуканій прямій довільну точку $M(x; y)$. Розглянемо два вектори

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (3 - 2; 4 - (-1)) = (1; 5)$$

$$\overline{CM} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (x - 1; y - 0) = (x - 1; y)$$

Оскільки за умовою задачі ці вектори лежать на перпендикулярних прямих, то можемо скористатися властивістю скалярного добутку взаємно перпендикулярних векторів.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CM} = 0, \quad (1; 5) \cdot (x - 1; y) = 0,$$

$$\text{або } x + 5y - 1 = 0.$$

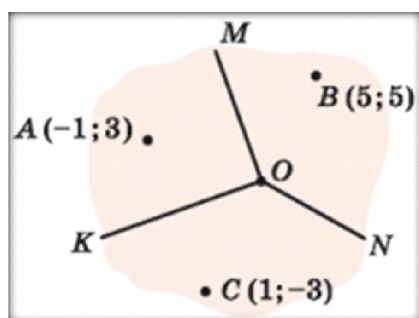


Рис. 2. Діаграма Вороного

Таке розв'язування задач сприяє розвитку творчого і критичного мислення у студентів, ефективній актуалізації знань, реалізує зв'язки з шкільним курсом математики тощо.

Для домашнього завдання, крім інших завдань, студентам варто запропонувати розв'язати різними способами задачу за підручником з геометрії для 11 класу [2].

Задача. На діаграмі Вороного зображено три антени A, B, C, їх координати та області обслуговування (рис. 2). Ребра OM, ON, OK клітин на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків AB, BC, AC. Запишіть

рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки O – вершини діаграми Вороного.

У такий спосіб викладач створює природний інтерес студентів до постаті Вороного. Бажано скористатися цим моментом, щоб показати портрет відомого українського математика і запропонувати студентам прочитати про його життєвий і творчий шлях [1].

Засвоєння теоретичного матеріалу, що виноситься на самостійне опрацювання студентами, перевіряється на практичних заняттях, колоквиумах, заліках, екзаменах та під час виконання інших видів робіт. Оскільки у першокурсників вміння самостійно працювати з новим матеріалом ще не сформоване, викладачу бажано не просто визначити теми для самостійного вивчення, а вибудувати певну траєкторію навчання (прочитати, законспектувати, вивчити, навести приклади, розв'язати задачі тощо).

Наприклад, на самостійне опрацювання виносяться питання про геометричний зміст лінійних нерівностей з двома невідомими.

На лекції студенти отримують завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Розв'язати задачі на застосування вивченого матеріалу.

Оскільки цей матеріал студенти мають підготувати на практичне заняття самостійно, то можна їм поради скористатися для закріплення вивченого матеріалу та розв'язування задач одним із ППЗН. Доцільно дати кілька конкретних завдань, які студенти виконують за допомогою комп'ютера. На допомогу їм прийде наш посібник "Використання ППЗН GRAN-2D і GRAN-3D під час вивчення ліній і поверхонь" [5]. Перш, ніж самостійно приступити до виконання завдань, студенти можуть ознайомитися з розв'язуванням схожої задачі.

Задача. Побудувати багатокутник системи розв'язків нерівностей:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 11 \leq 0, \\ -3x + y - 1 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для побудови прямої $3x + 2y - 11 = 0$ знайдемо дві точки, що

належать цій прямій. Якщо $x = 0$, то $y = \frac{11}{2}$.

Якщо $y = 0$, то $x = \frac{11}{3}$. Проводимо пряму через

дві знайдені точки $\left(\frac{11}{3}; 0\right)$ і $\left(0; \frac{11}{2}\right)$. Нерівність

$3x + 2y - 11 \leq 0$ визначає нижню замкнену півплощину, яка лежить під прямою AB (рис. 3).

Аналогічно будемо пряму $-3x + y - 1 \leq 0$,

що проходить через точки $(0; 1)$ і $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Нерівність $-3x + y - 1 \leq 0$ визначає нижню замкнену півплощину, яка лежить під прямою BC .

Взявши до уваги також нерівності $x \geq 0, y \geq 0$, дістанемо опуклий багатокутник $OABC$ – багатокутник розв'язків заданої системи нерівностей, що показаний на рисунку 2.

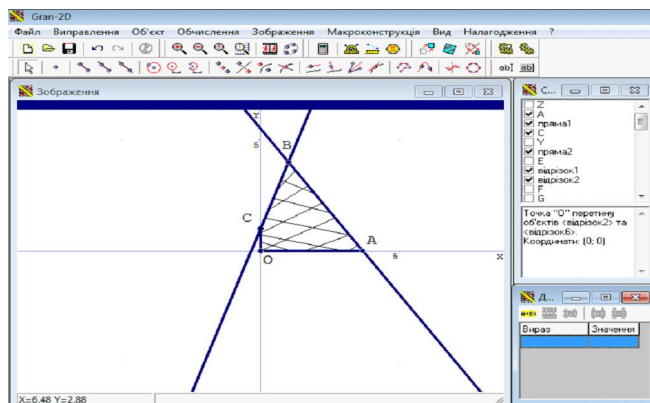


Рис. 3. $OABC$ – багатокутник розв'язків заданої системи нерівностей

Необхідно дібрати такі задачі, розв'язання яких посприє формуванню у студентів вміння впоратись із базовими задачами з теми. Аналізуючи розв'язання системи нерівностей, отриманий на екрані комп'ютера, студенти бачать, яку частину півплощини слід віднести до розв'язку (рис. 3). така візуалізація сприяє кращому усвідомленню механізму розв'язування задач.

Вивчення ліній і поверхонь у курсі “Аналітична геометрія” є необхідною складовою у процесі

підготовки майбутніх учителів математики, сприяє розвитку у студентів абстрактного та логічного (критичного) мислення, просторової уяви та уявлення, графічної та алгоритмічної культури, таких необхідних їм у майбутній професійній діяльності. Важливість засвоєння студентами відомостей про лінії та поверхні визначається сучасним розумінням цих об'єктів і різноманітністю застосування навчального матеріалу в різних галузях знань. Оскільки загальною метою підготовки вчителя математики в педагогічному університеті є формування основ його професійної культури, то визначаючи комплексну мету до кожного змістового модулю навчального курсу “Аналітична геометрія” потрібно враховувати два взаємопов'язані аспекти: загальнонауковий і фаховий.

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: навч. посіб. для студентів фіз.-мат. ф-тів педуніверситетів / В.Г. Бевз. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

2. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі / А.Г. Конфорович. – К.: Радянська школа, 1981. – 189 с.

3. Концептуальні засади розвитку педагогічної освіти України [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://sites.znu.edu.ua/liberal_edu/docs/181.ukr.html. – Загол. з титул. екрану.

4. Математика. Освітньо-кваліфікаційна характеристика підготовки бакалавра. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра. Напрямок підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність

6.010100 педагогіка і методика середньої освіти: галузевий стандарт вищої освіти України / Міністерство освіти і науки України. – К., 2003. – 148 с.

5. Махомета Т.М. Використання ППЗН GRAN-2D і GRAN-3D під час вивчення ліній і поверхонь: навчальн-методичний посібник для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів III – IV рівнів акредитації / Т.М. Махомета. – Умань: Алмі, 2013. – 41 с.

Стаття надійшла до редакції 15.11.2015



“Виховувати людину – означає визначити долю нації”.

Схиархімандрит Іоанн

