

краще заданим критеріям побудови системи моніторингу відповідає платформа BI MicroStrategy — результат п'ятнадцятирічного досвіду розробки програм BI та де-факто стандарт галузі. Розроблений Національним університетом біоресурсів і природокористування України спільно з компанією RG DATA оціночний пілотний проект на основі програмних продуктів платформи BI MicroStrategy показав велику його функціональність та високу ефективність прикладної реалізації подібного класу задач.

## **Література**

1. *Андрей Колесов*. На смену Business Intelligence приходит Business Analytics? // PC Week/RE. — 2007. — №41 (599).
2. Business Intelligence [Електронний ресурс] // Wikipedia[сайт]. — Режим доступу: [http://ru.wikipedia.org/wiki/Business\\_Intelligence](http://ru.wikipedia.org/wiki/Business_Intelligence)
3. Інформаційно-аналітичний центр моніторингу стану агропромислового комплексу України. Пілотний проект. Пояснювальна записка. — 2010.
4. *Давид Харатишвили*. Рынок BI-платформ: претенденты и победители. // Компьютер Пресс. — 2008. — №7
5. *Елена Гореткина*. Рынок систем бизнес-анализа: битва Давида и Голиафа // PC Week/RE. — 2010. — №11 (713).
6. Forrester Wave™. Оценка поставщиков платформ бизнес-анализа (Business Intelligence, BI) [Електронний ресурс] // BSC[сайт]. — Режим доступу: <http://www.bsc-consulting.ru/advantages/cognos/forrester02/>

Стаття надійшла до редакції 08.11.2010 р.

УДК 517.929

**І. А. Джалладова**, д-р фіз.-мат. наук,  
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

### **ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ЙОГО РОЗВ'ЯЗКІВ**

**АННОТАЦІЯ.** Досліджується стійкість у середньому квадратичному розв'язку зі стрибками, що відбуваються у випадкові моменти часу з випадковим розміром стрибка різних видів стохастичних рівнянь. Припускається, що час між стрибками розподіляється за експоненціальним законом, а розмір стрибка розподілений за степеневим законом. Здобуто в явному вигляді умови стійкості випадкового розв'язку рівнянь, що розглядається.

© І. А. Джалладова, 2011

**АННОТАЦИЯ.** Исследуется устойчивость в среднем квадратичном решении со скачками, которые происходят в случайные моменты времени со случайным размером скачка разных видов стохастических уравнений. Предполагается, что скачки происходят в случайные моменты времени. Получены в явном виде условия устойчивости и построены границы областей неустойчивости случайного решения рассматриваемых систем.

**ANNOTATION.** Investigating stability in mean square of solution with jumps which occurred in random times with random size of jump. We suggestion that time devoted on exponential formula and size of jump devoted on series formula. We receive condition of stability of random solution considering equations.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА.** еволюційне рівняння, стійкість у середньому квадратичному, випадкові перетворення розв'язків, перетворення Лапласа, модель добробуту.

## Вступ

Економічні системи, як правило, є стохастичними, бо початкові параметри системи випадковим чином залежать від вхідних параметрів. Крім того, економічна система є складною, багатокритеріальною, багаторівневою, ієрархічною структурою; система знаходиться під впливом зовнішніх факторів; і можливого переключенню інформацію, приховуванню інформації та цілеспрямованої економічної диверсії.

Виходячи з цього, економічна система складна і містить залежність від випадкових параметрів і описуються марковським, а в реаліях напівмарковським апаратом, тобто коли поведіння системи в момент  $t_0$  характеризуються ймовірністю першого порядку  $p(x_0, t_0)$  і поведінка системи в наступному залежить від значення системи  $x_0$  і не залежить від того, коли і як система прийшла в такий стан.

Марковські випадкові процеси описуються двома параметрами:

- 1) ймовірністю першого порядку  $p(x_0, t_0)$ ;
- 2) умовною ймовірністю  $p_{ij}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ ;

де  $p_{ij}$  характеризує стан системи  $x_2$  в момент  $t_2$ , за умови, що в момент  $t_1$  система мала значення  $x_1$ .

Маючи в своєму розпорядженні матрицю умовних переходів

$$P_{i/j} = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ p_{21} \cdots p_{2n} \\ \vdots \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

можливо напочатку досліджень сформулювати поведінку системи в наступному.

Треба підкреслити, що називається станом системи, не визначається лише фізичними властивостями, системи, що вивчається-

ся. Тому не є необхідним поглиблюватися внутрішню характеристику систему. Все залежить від того, що ми хочемо знати про процеси, що ми можемо спостерігати або вимірювати, від точності цих спостережень і взагалі від математичного рівня на теперешній час. Не існує ніяких готових аналітичних методів і ніяких готових формулювань. В минулому більшість аналітичних робіт по вивченню економічних систем описувалась функціональними рівняннями і містила дуже важливі результати [6—13]. Проте, нові задачі потребують розгляду нових класів рівнянь, нових методів, які дозволяють дати відповіді на запити сучасної науки, зокрема, зробити більш повним використання ПП ПСОМ.

Далі ми розглядаємо деякі популярні моделі для вивчення певних економічних систем — лінійні еволюційні рівняння, а також їх застосування до дослідження модельних задач.

1. На ймовірносному просторі  $(\Omega, F, P)$  розглянемо лінійне еволюційне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \quad (1)$$

де  $\xi(t)$  — випадковий напівмарковський процес, що набуває  $n$  станів  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  з інтенсивностями

$$q_{jj}(t) \equiv 0, \quad q_{js}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_{js}} & \text{при } 0 \leq t < T_{js}, \\ 0 & \text{при } t \geq T_{js} \end{cases} \quad (2)$$

( $j, s = 1, \dots, n$ ).

Нехай випадкова величина  $\alpha(\xi(t))$  набуває значення  $\alpha(\xi(t)) = \alpha_k$  при  $\xi(t) = \theta_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Припускаємо, що в моменти стрибків  $t_j$  розв'язки (1) зазнають випадкових перетворень

$$x(t_j + 0) = p_l x(t_j - 0), \quad p_l \neq 0 \quad (l = 1, \dots, N) \quad (3)$$

з ймовірностями  $p_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ).

Як відомо, випадковим перетворенням розв'язку рівняння (1) відповідають наступні стохастичні оператори  $S_{rl}$  [2]

$$S_{rl}f(Y) \equiv \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,l,s} f(A_{r,l,s}^{-1}) \left| \det A_{r,l,s}^{-1} \right| \quad (r, l = 1, \dots, n).$$

Стохастичні оператори  $S_{r,l}$  ( $r, l = 1, \dots, n$ ), для перетворень вигляду (3) матимуть вигляд

$$S_{s,l}f(Y) = \begin{cases} f(Y), & r = l, \\ \sum_{s=1}^N \frac{p_s}{p_s} f\left(\frac{Y}{p_s}\right), & r \neq l. \end{cases}$$

Введемо рівняння для моментів другого порядку розв'язків лінійного диференціального рівняння (1). Спочатку обчислимо  $C_{ks}$  ( $k, s = 1, \dots, N$ ):

$$C_{ks} = \begin{cases} 1, & k = s, \\ \sum_{l=1}^N p_l p_l, & k \neq s. \end{cases}$$

Визначимо функції  $W_{ks}$  ( $k, s = 1, \dots, n$ ), згідно з рівняннями

$$W_k(t) = M_2 \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n q_{ks}(t) e^{2a_s t} ds(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} W_s(\tau) d\tau \right]; \quad (4)$$

$$(k = 1, \dots, n), \quad M_2 \equiv \sum_{l=1}^N \rho_l^2 p_l = \langle \rho^2 \rangle.$$

Тут  $M_2$  — математичне сподівання квадрата коефіцієнта  $\rho$  при випадкових перетвореннях;  $d_k(0)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — моменти другого порядку в момент часу  $t = 0$ ;  $N_k(t) = e^{\alpha_k t}$  — розв'язок рівняння (1);  $W_k(t)$  — моменти другого порядку, що визначаються за формулою (4).

Розв'язуватимемо систему моментних рівнянь (4), використовуючи перетворення Лапласа. Позначимо

$$f_k(p) \equiv \int_0^\infty W_k(t) e^{-pt} dt \quad (k = 1, \dots, n).$$

Помножимо систему рівнянь (4) на  $e^{-pt}$  і зінтегруємо від 0 до  $\infty$ . Дістанемо систему рівнянь для зображень  $f_k(p)$ :

$$f_k(p) = M_2 \left[ \int_0^\infty \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n q_{ks} e^{2a_s t} e^{-pt} ds(0) dt + \right. \\ \left. + \int_0^t \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n q_{ks} (t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} e^{-p\tau} W_s(\tau) d\tau d\tau \right] \quad (k=1, \dots, n). \quad (5)$$

Оскільки справджується рівність

$$\int_0^\infty q_{ks} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT_{ks}}}{T_{ks} p} \quad (k, s=1, \dots, n; k \neq s),$$

то з урахуванням властивості запізнення [4] дістанемо:

$$\int_0^\infty q_{ks} e^{2a_s t} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)} \quad (k, s=1, \dots, n; k \neq s).$$

Згідно з властивістю згортки [1] обчислимо

$$\int_0^t q_{ks} (t-\tau) e^{2a_s(t-\tau)} e^{-p\tau} W_s(\tau) d\tau dt = \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)}.$$

Систему рівнянь (5) можна записати у вигляді

$$f_k(p) = M_2 \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n f_s(p) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)} \right] \quad (k=1, \dots, n), \quad (6)$$

або

$$f_k(p) = M_2 \left( b_k(p) + \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n a_{ks} f_s(p) \right) \quad (k=1, \dots, n),$$

$$\text{де } b_k(p) \equiv \sum_{\substack{s=1 \\ k \neq s}}^n d_s(0) \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T_{ks}(p-2a_s)}; \quad a_{ks}(p) \equiv \frac{1 - e^{-T_{ks}(p-2a_s)}}{T(p-2a_s)} \quad (k, s=1, \dots, n; k \neq s).$$

Розв'яжемо систему рівнянь (6) за теоремою Крамера. Особливі точки розв'язку будуть визначатися коренями рівняння

$$\det \|1 - M_2 a_{ks}(p, T_{ks})\|_{k,s}^n = 0, \quad M_2 a_{kk}(p, T_{ks}) \equiv -1. \quad (7)$$

Нулі рівняння (7) є характеристичними показниками розв'язків системи інтегральних рівнянь (4). Якщо всі корені рівняння (7) мають від'ємні дійсні частини, то розв'язки рівнянь (6) асимптотично стійкі. Якщо хоча б один із коренів рівняння (7) має додатну дійсну частину, то розв'язки системи рівнянь (6) нестійкі.

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (7) числовими методами, визначимо характер залежності між параметрами  $p$  і  $T_{ks}$ .

2. Розглядається лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \quad (8)$$

де  $\xi(t)$  — напівмарковський випадковий процес, який визначається інтенсивностями  $q_{sj}(t)$ , ( $s, j = 1, 2, \dots, n$ ). Припускаємо, що при  $a_s = a(\theta_s)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) рівняння (8) набирає вигляду

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = a_s x_s(t), \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Ця система рівнянь має фундаментальні матриці розв'язків

$$N_s(t) = e^{A_s t}, \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Система моментних рівнянь першого порядку набуває вигляду

$$\begin{aligned} M_s(t) &= \psi_s(t) N_s(t) M_s(0) + \int_0^t \psi_s(t - \tau) W_s(\tau) d\tau, \\ W_s(\tau) &= \sum_{r=1}^n q_{kr}(\tau) N_r(\tau) M_r(0) + \sum_{r=1}^n \int_0^t q_{kr}(t - \tau) N_r(t - \tau) W_r(\tau) d\tau, \\ q_s(t) &= \sum_{k=1}^n q_{ks}(t), \quad (s = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (9)$$

Для розв'язування системи рівнянь застосовуємо перетворення Лапласа. Введемо позначення:

$$\int q_{sr}(t)e^{-pt} dt = f_{sr}(p),$$

$$W_s(t) \xrightarrow{\cdot} U_s(p), \quad M_s(t) \xrightarrow{\cdot} V_s(p), \quad \Psi_s(t) \xrightarrow{\cdot} S_s(p),$$

$$\Psi_s(t) = -q_s(t),$$

$$ps_s(p) - 1 = f_s(p) \Rightarrow s_s(p) = \frac{1 - f_s(p)}{p}, \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Із рівнянь (9) знаходимо системи рівнянь для зображень:

$$V_s(p) = \frac{1 - f_s(p - a_s)}{p - a_s} (M_s(0) + U_s(p)),$$

$$U_s(p) = \sum_{r=1}^n f_{sr}(p - a_r) (M_r(0) + U_r(p)).$$

Позначивши

$$W_s(p) = U_s(p) + M_s(0),$$

запишемо цю систему рівнянь у виді

$$V_s(p) = \frac{1 - f_s(p - a_s)}{p - a_s} W_s(p),$$

$$W_s(p) = M_s(0) + \sum_{r=1}^n f_{sr}(p - a_r) W_r(p), \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

Особливі точки зображення  $V_s(p)$ , ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) визначаються особливими точками зображень  $W(p)$  і є коренями рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - f_{11}(p - a_1) & -f_{12}(p - a_2) & \dots & -f_{1n}(p - a_n) \\ -f_{21}(p - a_1) & 1 - f_{22}(p - a_2) & \dots & -f_{2n}(p - a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_{n1}(p - a_1) & -f_{n2}(p - a_2) & \dots & 1 - f_{nn}(p - a_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) можна використовувати для знаходження меж області нестійкості розв'язків системи рівнянь (8) в просторі параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Модельна задача 2.1.** Розглядається система рівнянь (8) у випадку, коли  $n = 2$ , інтенсивності переходу  $q_{sj}(t)$ , ( $s, j = 1, 2, \dots, n$ ) мають вигляд

$$q_{11}(t) \equiv q_{22}(t) \equiv 0,$$

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = \frac{\alpha(\alpha^2 + 4w^2)}{2w^2} = e^{-\alpha t} \sin^2 wt.$$

Рівняння (10) має вигляд:

$$f_{12}(p - a_2) f_{21}(p - a_1) = 1.$$

При  $p = 0$  знаходимо рівняння межі області нестійкості у просторі параметрів  $a_1, a_2$ :

$$\frac{\alpha^2(\alpha^2 + 4w^2)^2}{(-\alpha_1 + \alpha)(-\alpha_2 + \alpha)((-\alpha_1 + \alpha)^2 + 4w^2)((-\alpha_2 + \alpha)^2 + 4w^2)} = 1.$$

Наприклад, якщо  $\alpha = 1, w = 1$  маємо рівняння межі області нестійкості (рис.1):

$$\frac{25}{(1 - a_1)(1 - a_2)((a - a_1)^2 + 4)((1 - a_2)^2 + 4)} = 1.$$

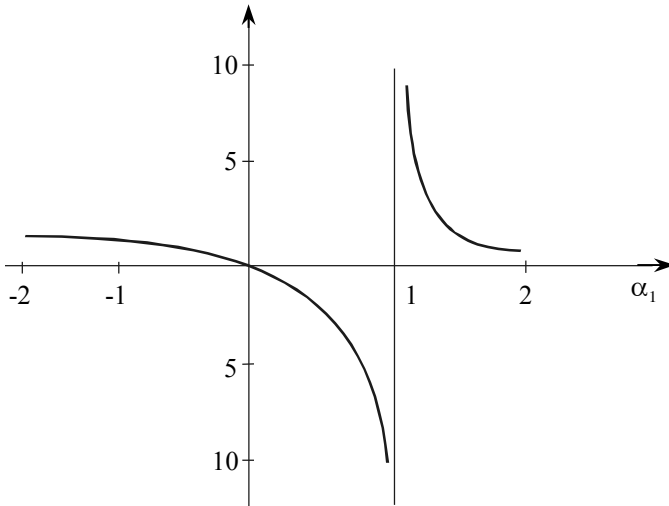


Рис. 1

**Модельна задача 2.2.** Розглядається система рівнянь (8) у випадку, коли  $n = 3$ , інтенсивності переходу  $q_{sj}(t)$  ( $s, j = 1, 2, \dots, n$ ) є сталими:



$$q_{11}(t) = q_{22}(t) = q_{33}(t) = 0,$$

$$q_{12}(t) = q_{21}(t) = q_{13}(t) = q_{31}(t) = q_{23}(t) = q_{32}(t) = \begin{cases} T^{-1}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Рівняння (10) має вигляд:

$$1 - 2f(p-a_1)f(p-a_2)f(p-a_3) - f(p-a_1)f(p-a_2) - f(p-a_2)f(p-a_3) - f(p-a_1)f(p-a_3) = 0,$$

де позначено  $f(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{pT}$ .

При  $p = 0$  знаходимо рівняння межі області нестійкості у просторі параметрів  $a_1, a_2, a_3$  (рис. 2—4):

$$1 - 2 \frac{1 - e^{a_1 T}}{a_1 T} \frac{1 - e^{a_2 T}}{a_2 T} \frac{1 - e^{a_3 T}}{a_3 T} - \frac{1 - e^{a_1 T}}{a_1 T} \frac{1 - e^{a_2 T}}{a_2 T} - \frac{1 - e^{a_2 T}}{a_2 T} \frac{1 - e^{a_3 T}}{a_3 T} - \frac{1 - e^{a_1 T}}{a_1 T} \frac{1 - e^{a_3 T}}{a_3 T} = 0.$$

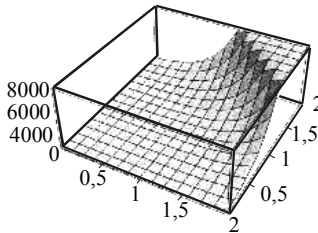


Рис. 2

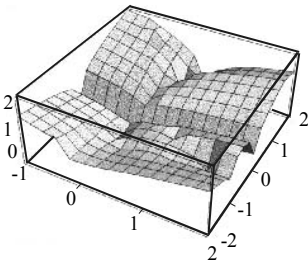


Рис. 3  $\left( z = 1, \alpha, \omega, \gamma = \frac{1}{3} \right)$

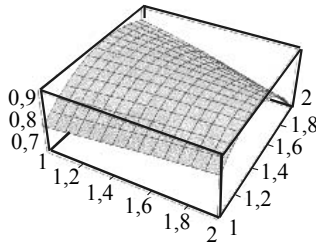


Рис. 4

3. Досліджуємо стійкість нульового розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t)x(t)),$$

де  $\xi(t)$  — напівмарковський процес, що приймає два стани. Припускаємо, що:

$$\begin{aligned} 1. a(\theta_r) &\equiv a_k (k=1, 2); \\ 2. q_{12} = q_{21} &= \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}; \\ q_{11}(t) = q_{22}(t) &\equiv 0, \end{aligned}$$

і

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 1 - \frac{t}{T}, \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t) = 0, \quad (t > T).$$

Система рівнянь (4) набуває виду

$$M_1(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{a_1 t} + \int_0^T \frac{1}{T} M_2(t - \tau) e^{a_1 \tau} dt,$$

$$M_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{a_2 t} + \int_0^T \frac{1}{T} M_2(t - \tau) e^{a_2 \tau} dt.$$

Математичне сподівання  $M(t) = \langle x(t) \rangle = M_1 + M_2 \rightarrow 0$ , якщо  $M_1(t) \rightarrow 0$ ,  $M_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Для дослідження стійкості використовуємо перетворення Лапласа. Припускаємо

$$y_k(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} M_k(t) dt;$$

$$f_k(p) = \frac{1}{p - a_k} - \frac{1}{T(p - a_k)^2}; \quad (11)$$

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{T} e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-pT}}{T}.$$

З урахуванням (11) отримаємо систему рівнянь:

$$y_1(p) = f_1(p) + \varphi(p - a_1)y_2(p);$$

$$y_2(p) = f_2(p) + \varphi(p - a_1)y_1(p).$$

Особливі точки зображення  $y_k(p)$ , ( $k = 1, 2$ ) визначаються з рівняння

$$1 - \varphi(p - a_1)\varphi(p - a_2) = 0.$$

Покладаючи  $p = 0$  знаходимо рівняння для границі області нестійкості (рис. 5, 6):

$$(e^{a_1 T} - 1)(e^{a_2 T} - 1) = a_1 a_2 T^2.$$

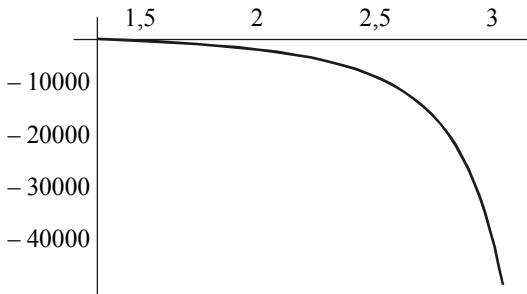


Рис. 5 ( $T = 2$   $C_1 = 3$ ,  $C_2 = 4$ )

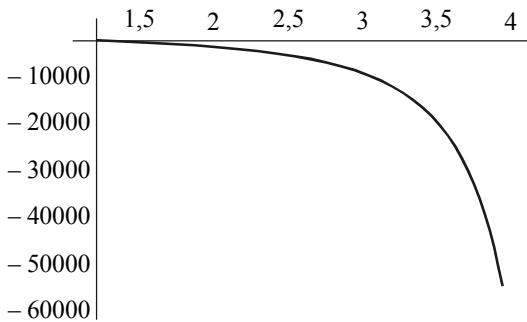


Рис. 6 ( $T = 2$   $C_1 = C_2 = 1$ )

**Модельна задача 3.1.** Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$x_{k+1} = a(\xi_k)x_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad a(\theta_s) = a_s \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

де напівмарковський ланцюг  $\xi_k$  може набувати два стани  $\theta_1, \theta_2$  і визначається інтенсивностями:

$$Q(1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(k) = 0 \quad (k = 3, 4, \dots, n), \quad \Psi(k) = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, n).$$

Система моментних рівнянь [5] набуває виду:

$$M_1(0) = 1,$$

$$M_1(1) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}M_2(0)a_1,$$

$$M_1(2) = \frac{1}{2}M_2(1)a_1 + \frac{1}{4}M_1(0)a_1^2 + \frac{1}{4}M_2(0)a_1^2,$$

$$M_1(3) = \frac{1}{2}M_2(2)a_1 + \frac{1}{4}M_1(1)a_1^2 + \frac{1}{4}M_2(1)a_1^2, \dots$$

$$M_2(0) = 1,$$

$$M_2(1) = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}M_1(0)a_2,$$

$$M_2(2) = \frac{1}{2}M_1(1)a_2 + \frac{1}{4}M_2(0)a_2^2 + \frac{1}{4}M_1(0)a_2^2,$$

$$M_2(3) = \frac{1}{2}M_1(2)a_2 + \frac{1}{4}M_2(1)a_2^2 + \frac{1}{4}M_1(1)a_2^2, \dots$$

Із цієї системи рівнянь знайдемо  $M_1(k), M_2(k)$ :

$$M_1(0) = 1, \quad M_2(0) = 1,$$

$$M_1(1) = a_1, \quad M_2(1) = a_2,$$

$$M_1(2) = \frac{a_1}{2}(a_1 + a_2), \quad M_2(2) = \frac{a_2}{2}(a_1 + a_2),$$

$$M_1(3) = \frac{a_1}{4}(a_1 + a_2)^2, \quad M_2(3) = \frac{a_2}{4}(a_1 + a_2)^2,$$

$$M_1(4) = \frac{a_1}{8}(a_1 + a_2)^3, \quad M_2(4) = \frac{a_2}{8}(a_1 + a_2)^3.$$

Далі знаходимо математичне сподівання випадкового розв'язку  $x_k$  рівняння (12)

$$\langle x_k \rangle = \frac{a_1}{2^{k-1}} (a_1 + a_2)^{k-1} \langle x_0 | \xi_0 = \theta_1 \rangle \cdot P\{\xi_0 = \theta_1\} + \frac{a_2}{2^{k-1}} (a_1 + a_2)^{k-1} \langle x_0 | \xi_0 = \theta_2 \rangle \cdot P\{\xi_0 = \theta_2\}.$$

Аналогічно знаходимо другий момент:

$$\langle x_k^2 \rangle = \frac{a_1^2}{2^{k-1}} (a_1^2 + a_2^2)^{k-1} \langle x_0^2 | \xi_0 = \theta_1 \rangle \cdot P\{\xi_0 = \theta_1\} + \frac{a_2^2}{2^{k-1}} (a_1^2 + a_2^2)^{k-1} \langle x_0^2 | \xi_0 = \theta_2 \rangle \cdot P\{\xi_0 = \theta_2\}.$$

**Модельна задача 3.2.** Нехай напівмарковський процес  $\xi(t)$ , що набуває двох станів  $\theta_1$  і  $\theta_2$ , співпадає з марковським процесом, заданим системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \lambda p_2(t), \quad \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t).$$

Складемо систему моментних рівнянь [5] для дослідження  $L_2$ -стійкості [2] розв'язків диференціального рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\xi(t))x(t), \quad a(\theta_k) \equiv a_k. \quad (13)$$

Спочатку знаходимо

$$c_1 = 1 + \int_0^{\infty} e^{2a_2 t} \lambda e^{-\lambda t} c_2 dt, \quad c_2 = 1 + \int_0^{\infty} e^{2a_1 t} \lambda e^{-\lambda t} c_1 dt,$$

і має розв'язок

$$c_1 = \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - 2a_2)}{2a_1 a_2 - \lambda(a_1 + a_2)}, \quad c_2 = \frac{(\lambda - a_2)(\lambda - 2a_1)}{2a_1 a_2 - \lambda(a_1 + a_2)}.$$

При  $c_1 > 0$  і  $c_2 > 0$  нульовий розв'язок рівняння (13) стійкий.

Нехай інтенсивності напівмарковського процесу  $\xi(t)$  задовольняють умови

$$q_{11}(t) \approx 0, \quad q_{22}(t) \approx 0, \quad q_{21}(t) - \lambda e^{-\lambda t} \approx 0, \quad q_{12}(t) - \lambda e^{-\lambda t} \approx 0.$$

Тоді знаходимо достатню умову стійкості розв'язків рівняння (13):

$$1 - c_1 \int_0^{\infty} q_{11}(t) e^{2a_1 t} dt - c_2 \int_0^{\infty} (q_{21}(t) - \lambda e^{-\lambda t}) e^{2a_2 t} dt > 0,$$

$$1 - c_1 \int_0^{\infty} (q_{12}(t) - \lambda e^{-\lambda t}) e^{2a_1 t} dt - c_2 \int_0^{\infty} q_{22}(t) e^{2a_2 t} dt > 0.$$

**Модельна задача 3.3.** Дослідимо стійкість у середньому квадратичному розв'язків різницевого рівняння

$$x_{k+1} = a(\xi_k) x_k, \quad a(\theta_s) \equiv a_s \quad (s = 1, \dots, n). \quad (14)$$

Припустимо, що в кожному стані  $\theta_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) напівмарковський ланцюг  $\zeta_k$  може здійснити всього  $N$  кроків і з імовірністю  $N^{-1}$  на кожному кроці може перейти в інший стан. Система рівнянь побудови послідовних наближень [14] набирає вигляду

$$c_1 = h_1 + (c_{21})^2 (a_2^2 + a_2^4 + \dots + a_2^{2N}) N^{-1} c_2,$$

$$c_2 = h_2 + (c_{12})^2 (a_1^2 + a_1^4 + \dots + a_1^{2N}) N^{-1} c_1,$$

а умова збіжності методу послідовних наближень така:

$$(c_{21})^2 (c_{12})^2 \sum_{k=1}^N a_1^{2k} \sum_{k=1}^N a_2^{2k} < 1.$$

Ця умова достатньою для асимптотичної стійкості розв'язків рівняння (14) у середньому квадратичному.

**4. Модель добробуту.** Розглянемо просту модель доброту країни, яка визначена різницеvim рівнянням:

$$x_{n+1} = a_n(\xi_n) x_n, \quad x_n > 0, \quad (15)$$

де величина  $x_n$  описує добробут деякої країни, марковський процес  $\xi_n$  приймає два стани  $\xi_n = a > 1, \xi_n = b < 1$  з імовірностями  $p_1(n) = P\{\xi_n = a\}, p_2(n) = P\{\xi_n = b\},$

які задовольняють систему рівнянь:

$$p_1(n+1) = (1-\lambda)p_1(n) + \nu p_2(n), \quad 0 < \lambda < 1,$$

$$p_2(n+1) = \lambda p_2(n) + (1-\nu)p_2(n), \quad 0 < \nu < 1.$$

Якщо  $\xi_n = a > 1$ , то з рівняння (15) слідує, що добробут збільшується, бо  $x_{n+1} > x_n$ .

Якщо  $\xi_n = b < 1$  ( $b > 0$ ), то добробут країни зменшується.

Будемо вважати, що якщо влада в країні народна, то  $\xi_n = a > 1$ . Якщо влада в країні антинародна, то  $\xi_n = b < 1$ . Іншими словами, народна влада з імовірністю  $(1-\lambda)$  залишається народною, а з імовірністю  $\lambda$  стає антинародною. Антинародна влада з імовірністю  $\nu$  стає народною, а з імовірністю  $(1-\nu)$  залишається антинародною.

Зміна математичного сподівання  $m(n) = \langle x_n \rangle$  описується системою різницевих рівнянь:

$$m_1(n+1) = (1-\lambda)am_1(n) + \nu bm_2(n),$$

$$m_2(n+1) = \lambda am_1(n) + (1-\nu)bm_2(n).$$

Для того, щоб математичне сподівання добробуту  $m(n) = m_1(n) + m_2(n)$  зростало необхідно і достатньо, щоб найбільше власне число матриці

$$A = \begin{pmatrix} (1-\lambda)a & \nu b \\ \lambda a & (1-\nu)b \end{pmatrix}$$

було більше одиниці.

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z - (1-\lambda)a & -\nu b \\ -\lambda a & z - (1-\nu)b \end{vmatrix} = 0$$

Переходимо до рівняння межі, які розділяють антинародні та народні влади:

$$\Delta(1) = (1-a+\lambda a)(1-b+\nu b) - \lambda \nu ab = 0,$$

Для збільшення добробуту країни повинна бути достатньо малою ймовірність переходу

$$\lambda < \frac{a-1}{a} \left( 1 + \nu \frac{b}{1-b} \right)$$

від хорошого управління до хорошого, або достатньо велика ймовірність переходу

$$v > \frac{1-b}{b} \left( \frac{\lambda a}{a-1} - 1 \right)$$

від поганого управління до хорошого.

Наприклад, якщо  $a = 1,2$ ;  $b = 0,8$ , то матимемо нерівність

$$\lambda \leq \frac{1}{6}(1 + 4v), \quad v \geq \frac{1}{4}(6\lambda - 1).$$

Якщо ці нерівності не виконуються, то добробут країни зменшується.

### **Література**

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
2. Джалладова І. А. Оптимізація стохастичних систем. — К.: КНЕУ, 2004. — 258 с.
3. Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функции Ляпунова. — К.: Наукова думка, 1981. — 412 с.
4. Зубов В. И. Методы Ляпунова и их применения. — Л.: Из-во ЛГУ, 1957. — 241 с.,
5. Валеев К. Г. Оптимізація випадкових процесів / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 2006. — 310 с.
6. Ватанабе Ш. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / Ш. Ватанабе, Н. Кеда. — М.: Мир, 1984. — 445 с.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М.: Наука, 1964. — 576 с.
8. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. — М.: ИЛ, 1960. — 160 с.
9. Вольтер Я. Стохастические модели в экономике / Я. Вольтер. — М.: Статистика, 1967. — 320 с.
10. Вонем В. М. Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления / В. М. Вонем // Математика. — 1973. — Т. 17. — № 4. — С. 129—167; Т. 5. — С. 82—114.
12. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1987. — 612 с.
13. Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 567 с.
14. Джалладова І. А. Дослідження стійкості розв'язків системи динамічних систем з напімарковськими коефіцієнтами та побудова моделі для дослідження ситуації з безробіттям // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — К.: КНЕУ, 2010. — С. 180—199.

Стаття надійшла до редакції 09.11.2010 р.



**С. В. Устенко**, д-р екон. наук,  
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

## **АНАЛІЗ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЯМИ ВИСОКОТЕХНОЛОГІЧНИХ ПІДПРИЄМСТВ**

*АННОТАЦІЯ. Обґрунтовано задачу синтезу керування інвестиціями на підприємствах з випуском високотехнологічної продукції. Запропоновано алгоритм керування інвестиціями в інтегрованій виробничій системі. Проведено аналіз результатів моделювання динамічної моделі оптимального керування інвестиціями з урахуванням функції штрафу, які можуть бути використані на високотехнологічних підприємствах у різних галузях економіки України.*

*АННОТАЦИЯ. Обосновано задачу синтеза управления инвестициями на предприятиях по выпуску высокотехнологической продукции. Предложено алгоритм управления инвестициями в интегрированной производственной системе. Проанализировано результаты моделирования динамической модели оптимального управления инвестициями с учетом функции штрафа, которые могут быть использованы на высокотехнологических предприятиях в разных отраслях экономики Украины.*

*SUMMARY. Given the reason for the synthesis of investment management in the companies, which produce highly-technological products. Introduced the algorithm of investment management in the integrated production system. Analyzed the results obtained with the help of the dynamic investment management model taking into account the function of fine, which can be used at various industries in Ukraine.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА. ВФ — виробнича функція.*

Майбутній стан економіки України пов'язаний з перетворенням виробничого, фінансово-економічного й у результаті спільного середовища існування людини в єдиному потоці загального переходу до інноваційних систем, які адекватно реагують на будь-які зміни кон'юнктури ринків, що забезпечують масове створення, розповсюдження і використання інновацій на основі інтенсивного технологічного освоєння нових наукових знань і оптимізації інноваційних, виробничих, фінансових та інвестиційних процесів, утворюючих єдину високотехнологічну систему [1].

Формування інвестиційної стратегії підприємства являє собою складний творчий процес, що ґрунтується на прогнозуванні окремих умов здійснення інвестиційної діяльності і формується в рамках загальної стратегії економічного розвитку, погоджується з нею за цілями, етапами, строками реалізації. Як довгострокові конкретизовані цілі підприємства на різних етапах можуть виступати [2]: досягнення певних норми і маси прибутку, зростання масштабів шляхом збільшення торгового обороту і частки контролюваного ринку, виробництво високотехнологічної продукції, зміна зношеного і застарілого обладнання для зниження витрат виробництва, захист навколишнього середовища й ін.