

<http://www.informaworld.com/smpp/title~db=all~content=t713682269~tab=issueslist~branches=44> — v4444, Issue 1. — P. 1—15.

7. Basel Committee on Banking Supervision // Operational Risk Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord. — January 2001. — 30 p.

8. *Duffie D., Pan J.* An overview of Value-at-Risk // Journal of derivatives. — 1997. — P. 7—49.

9. *Alexander G. J., Baptista M. A.* Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis // Journal of economic dynamics & control. — 2002. — № 26. — P. 1159—1193.

10. *Заболоцький Т.* Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR // Вісник НБУ. — 2011. — № 8. — С. 31—33.

11. *Заболоцький Т.* Розподіл характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем VaR // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — 2011. — № 85. — С. 165—178.

12. *Bodnar T., Schmid W.* Econometrical analysis of the sample efficient frontier // The European Journal of Finance. — 2009. — № 15. — P. 317—335.

Стаття надійшла до редакції 14.06.2012 р.

УДК. 167.23 : 336.764.2

С. О. Силантьєв, канд. техн. наук,
доцент кафедри менеджменту,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

КАЛІБРУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ПОХІДНИХ ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ

АНОТАЦІЯ. Запропоновано метод калібрування дерева ціноутворення акцій компанії Apple з використанням імпліцитної стохастичної волатильності і наявних ринкових цін на серії опціонів CALL з експірацією у 2012 році. Метод надає можливість визначення цін на екзотичні (бермудські) опціони з нестандартними страйками. Визначені ціни CALL опціонів, виписаних 2 грудня 2011 року з експірацією 8 березня і 1 квітня 2012 року.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Похідні фінансові інструменти, імпліцитна волатильність, калібрування, стохастична волатильність

АННОТАЦИЯ. Предложен метод калибрации дерева ценообразования акций компании Apple с использованием имплицитной стохастической волатильности и доступных рыночных цен на серии опционов CALL, которые экспирируют в 2012 году. Метод даёт возможность определения цен на экзотические (бермудские) опционы с нестандартными страйка-

ми. Определены цены CALL опционов, выписанных 2 декабря 2011 года, которые экспирируют 8 марта и 1 апреля 2012 года.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: производные финансовые инструменты, имплицитная волатильность, калибрация, стохастическая волатильность.

THE SUMMARY. The pricing tree calibration method on Apple stock with implied stochastic volatility and market prices on CALL option series with expiration in 2012 are proposed. The calibration method may to price exotic (Bermudian) options with nonstandard strikes. The prices on CALL options, which wrote on 2 December 2011 with expiration on 8 March and 1 April 2012 are defined.

KEYWORDS: derivatives, implied volatility, calibration, stochastic volatility

Постановка проблеми. За даними міжнародної асоціації ринків похідних фінансових інструментів (ІОМА) об'єм ринкових контрактів з торгівлі похідними фінансовими інструментами (ПФІ) у 2010 році на всіх світових біржах складав 22,4 млрд одиниць (11,3 млрд — ф'ючерсні контракти, 11,1 — опціонні контракти) проти 17,9 млрд — у 2009 році. Тобто, річне зростання у кількості контрактів на 25 %. Причому кількість ф'ючерсних контрактів зростала на 35 %, а опціонних контрактів на 16 % згідно статистичних досліджень WFE.

На думку Р. Аркуллі керівника WFE і CEO Південно-Корейської біржі та клірингового дому «...стале зростання об'ємів торгівлі ПФІ у 2010 році на ринку свідчить про ефект у застосуванні регуляторних реформ, запроваджених на ринку позабіржових ПФІ» [19]. Результатом цього процесу є трансфер деяких фінансових ризиків з позабіржового ринку на організовані ринки ПФІ. Статистика BIS свідчить, що з липня 2009 року по липень 2010 року об'єми позабіржового ринку ПФІ за номіналом скоротилися на 13 %, і станом на кінець 2010 року складають 953 % світового ВВП [19]. У післякризових умовах спостерігається бурхливе зростання ринків ПФІ, особливо у країнах, що розвиваються, наприклад, у Індії потрійне зростання ринку ПФІ у 2010 році з прогнозом на щорічне стаłe зростання біля 36 % [19].

На сучасних фінансових ринках, особливо у передкризові часи останньої фінансової і економічної кризи, прийнято за правило неліквідні (нестандартні, екзотичні) ПФІ оцінювати за допомогою базових, широко розповсюджених моделей ціноутворення ПФІ. Ця практика визначення ціни ПФІ має назву приведення до моделі [7, 16].

Для визначених ринкових цін звичайних опціонів з обмеженою кількістю страйків, існує широкий спектр параметричних моделей, які можуть використовуватися в якості еталону для ка-

лібрування цін не ринкових (екзотичних) цін опціонів. Більш того, коли ціноутворення екзотичних опціонів базується на цих параметричних моделях, розбіжності в їх цінах можуть бути дуже суттєвими [7].

Калібрація є складною чисельною процедурою, завдяки ітераційного використання якої, шляхом послідовної мінімізації апіорі визначеної функції, залежної від ринкових цін і каліброваних цін, досягається висока адекватність майбутніх ринкових цін і цін, що формуються моделлю [7, 14].

Калібрування іноді може нагадувати не тільки науковий підхід, але й мистецтво. Тому що, процес калібрування визначається на основі складних емпіричних правил, інтегроване використання яких у вигляді методу і системи для оцінювання опціонів, захищається патентами подібно методології *vanna-volga* [4]. І, у випадку, недосконалої калібрації або нововведень наслідки для ринку можуть бути дуже серйозними, як це відбулося у середині літа 2010 року, коли був дисконтований з новими вимогами портфель свопів на відсоткову ставку у розмірі \$218 трлн дол. США [19].

Поглиблений аналіз процесів калібрування надає нові потенційні можливості щодо ефективного використання опціонних моделей на практиці. І, у зв'язку з тим, що використання опціонів подібно грі у шахи у трьох вимірному просторі — ціна БФІ, час і волатильність, потреба у більш досконалому науковому дослідженні детермінованих, параметричних, непараметричних, емпіричних, і стохастичних моделей калібрування стає все більш актуальною.

Мета статті — класифікація моделей стохастичної волатильності і удосконалення дискретної динамічної моделі у напрямку створення методу калібрації стохастичної волатильності для ціноутворення ПФІ на основі наявних ринкових серій стандартних CALL опціонів.

Аналіз публікацій. Тривалий час після результатів Ф. Блека, М. Шоулса і Р. Мертона були намагання теоретичного обґрунтування зсуву волатильності. Експериментальними дослідженнями були доведеними факти, по-перше, зсуву волатильності залежно від ступеню знаходження опціону «у грошах» і, по-друге, наявності часової структури волатильності, тобто залежності імпліцитної волатильності від часу до експірації [18].

Актуальність проблеми калібрування ПФІ була висвітленою у передкризові часи, коли М. Хенрард визначив, що форвардні ставки інструментів фінансового ринку з різними строками експіра-

ції поводяться так, що у них базові фінансові інструменти (БФІ) є різними [7].

Моделі ціноутворення ПФІ з стохастичною волатильністю досліджуються тривалий час академічною наукою [1—3, 5—16]. Дж. Халл і А. Уайт у 1987 році надали аналітичне рішення для ціни європейського опціону за умови припущення нульової кореляції між стохастичною волатильністю і ціною БФІ [9, 10]. Головним результатом запропонованої моделі був висновок про те, що відповідно моделі Блека—Шоулса—Мертонна здійснюється переоцінювання опціонів, а ступінь переоцінювання збільшується відносно до строків експірації. Крім того, емпіричними дослідженнями, після краху фондових бірж у 1987 році, був встановлений факт про наявний зсув цін на ПФІ ринкових індексів. Опціони PUT «зовні грошей» коштували значно більше у порівнянні з опціонами CALL «зовні грошей» у порівнянні з моделлю імпліцитної волатильності Блека—Шоулса [17].

Зсув волатильності у ціноутворенні опціонів, що знаходяться у різному ступені «у грошах», є несумісним для будь-якої моделі ціноутворення ПФІ. Тому адекватне визначення цін ПФІ з урахуванням зсуву волатильності є науковою і практичною проблемою у розробці реалістичних ринкових моделей стандартних і екзотичних ПФІ.

На даний час економічною наукою точно не визначено яка модель (наприклад, для зсуву волатильності у ціноутворенні опціонів) є коректною. Тому ефективною ідеєю є дослідження ціноутворення ПФІ і хеджування позицій за кількома каліброваними під ринок моделями з метою розуміння визначення їх чутливості відносно припущень, зроблених на майбутнє. Найбільш розповсюджені моделі стохастичної волатильності наведено у табл. 1.

Таблиця 1

МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

1.	Халла-Уайта — [9,10]	1987	Одна із перших аналітичних моделей для оцінювання опціонів з випадковою локальною волатильністю, яка не корелює з ціноутворенням БФІ. На основі використання ризик-нейтрального припущення, ціна опціону визначається як середнє зважена ціна опціону по Блеку-Шоулсу, яка визначається для кожного рівня волатильності до експірації опціону. Розширення моделі, при кореляції локальної волатильності з ціноутворення БФІ, надруковано у 1988 році.
----	----------------------	------	---

2.	Е. Штейна — Дж. Штейна — [15]	1991	Перша аналітична формула визначення ціни опціону за умови моделювання волатильності процесом Орштейна-Уленбека. Ціна опціону визначається за допомогою інверсного перетворення Фур'є. Методологічним недоліком цього підходу була можливість отримання негативної волатильності
3.	Хестона, Бейтса — [1, 5, 8]	1993, 1996	Узагальнення моделі 1987 року стохастичної волатильності Халл-Уайта, Скотта і Вігінса. Модель дозволяє випадкову кореляцію між ціною БФІ і його волатильністю, стохастичну відсоткову ставку тощо. Для вимірювання ризику перевага надається волатильності (ціна ризику волатильності), яка розглядається у якості параметру для всіх опціонів з однаковим часом експірації для однакового БФІ. Отримала визнання серед моделей з стохастичною волатильністю у всіх учасників ринку. Модель Хестона вважається фундаментальною теоретичною і практичною моделлю фінансової економіки. Модель Бейтса узагальнює модель Хестона введенням стрілкової складової у ціноутворенні БФІ.
4.	Шобеля, Жу — [12]	1999	Модель, у якій кореляція між БФІ і стохастичною волатильністю має властивість переключення.
5.	Скотта-Чесні — [3,13]	1987, 1989	Модель стохастичної волатильності з реверсивним середнім у ціноутворенні БФІ. У моделі робиться припущення про те, що волатильність не може знаходитися біля нульового значення і, більше того, нульове значення волатильності не може бути граничним значенням.
6.	Хагана, Кумара, Леснієвського, Вудварда (SABR) — [6]	2002	Стохастична модель альфа, бета, ρ (SABR). Двох факторна модель стохастичної волатильності, що встановлює зв'язок між БФІ і його короткостроковою імпліцитною волатильністю з визначенням трьох параметрів альфа (α), бета (β), ρ (ρ). SABR спільно з моделями ринку LIBOR є стандартом для визначення ціни звичайних ПФІ і складних продуктів на основі ПФІ на відсоткову ставку. У зв'язку з тим, що зміни волатильності не мають середнє реверсивної складової, модель є придатною для короткострокових термінів експірації опціонів.

6.	Ліптона, МакГі (VV), Карасінського (VVV метод Карасінського) — [2, 4, 11]	2002	Модель Vanna-Volga (VV) запропоновано для виводу імпліцитної волатильності на основі трьох доступних котирувань опціонів і оцінювання імпліцитної волатильності опціонів з будь-якою дельтою. Завдяки інтуїтивності і спрощеній реалізації методу результати, що отримуються завдяки розрахункам мають адекватну економічну інтерпретацію, що забезпечило ефективне використання методу для визначення вартості екзотичних опціонів. Він широко використовується на практиці у якості методу визначення витрат на управління ризиками екзотичних фінансових продуктів за допомогою ринкових ПФІ. Ці витрати мають назву <i>оверхеджу</i> і додаються до теоретичних значень витрат, отриманих за моделлю Блека-Шоулса.
----	---	------	--

Априорний перегляд сфер застосування моделей стохастичної волатильності табл. 1, аналіз і дослідження каліброваних під ринок ціноутворення ПФІ моделей є набагато ефективнішим, ніж верифікація і аналіз корпоративних дій у компанії після фіксації збитків за не обґрунтованими інвестиційними стратегіями і стратегіями хеджування на основі ПФІ.

Складнощі визначення ціни ПФІ з стохастичною волатильністю пов'язані, по-перше, з тим, що динаміка волатильності є прихованим процесом, у тому сенсі, що його динаміка визначається динамікою ціноутворення БФІ, а безпосередньо його динаміку спостерігати не можна. По-друге, волатильність має тенденцію до флуктуацій від максимальних значень до мінімальних значень, тобто зміна середнього значення (реверсія середнього значення) волатильності здійснюється багато разів протягом періоду до експірації. Причому, у деякі періоди часу до експірації, середня реверсія волатильності здійснюється значно частіше, ніж в інші періоди часу [7, 14]. Основними методами визначення динаміки і структури волатильності, що широко використовуються на практиці є наступні: дослідження історичної волатильності, застосування гетероскедастичних авторегресійних процесів, стохастичної волатильності і дослідження імпліцитної волатильності.

Виклад основного матеріалу. Розробку методології калібрування стохастичної волатильності для оцінювання ПФІ на акції компанії Apple Inc. зробимо шляхом удосконалення дискретної

динамічної моделі, запропонованої у роботі [17]. Початковими даними є: ціна акції станом на 2 грудня 2011 року; опціонні серії — груднева 2011 (експірація — 8 грудня 2011), січнева 2012 (20 січня 2012), лютнева (17 лютого 2012), березнева (16 березня 2012), квітнева (20 квітня 2012). Проблема складається у тому, щоб знайти ризик-нейтральні ціни акцій компанії станом на 8 березня 2012 і 1 квітня 2012 року, виходячи із ринкових цін опціонних серій, станом на 2 грудня 2011 року.

Таблиця 1

ЦІНИ АКЦІЇ КОМПАНІЇ APPLE І РИЗИК-НЕЙТРАЛЬНІ ЙМОВІРНІСТІ, ЯКІ ПОВИННІ БУТИ ЗНАЙДЕНИМИ

2 грудня 2011	8 березня 2012	Ймовірність	1 квітня 2012	Ймовірність
			S_3	$p_1 * p_2$
	S_1	p_1		
\$ 389,70			S_0	$p_1 * (1 - p_2) + (1 - p_1) * p_3$
	S_2	$1 - p_1$		
			S_4	$(1 - p_1) * (1 - p_3)$

1-ий крок. Знаходження цін акції на 8 березня 2012 року і ризик-нейтральних ймовірностей їх виникнення. Для розрахунків використовуємо безризикову відсоткову ставку, яка надається щоденно Міністерством фінансів США, а станом на 2 грудня 2011 року ставка купону має такі значення:

Таблиця 2

БЕЗРИЗИКОВА ВІДСОТКОВА СТАВКА, СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ (У ВІДСОТКАХ)

4 Weeks	13 Weeks	26 Weeks	52 Weeks
0,02	0,02	0,06	0,11

При застосуванні ризик-нейтрального ціноутворення, очікувана ціна повинна дорівнювати її форвардній ціні, тобто:

$$S_1 * p_1 + S_2 * (1 - p_1) = S_0 * \text{Exp}(r * T) = F_1. \quad (1)$$

З урахуванням умови центрування $S_1 * S_2 = S_0^2$, формулу для визначення ймовірності p_1 можна представити наступним чином:

$$p_1 * (S_1 - S_0) = \frac{F_1 * S_1 - S_0^2}{S_1 + S_0}. \quad (2)$$

У даній формулі невідомими є p_1 і S_1 , тому прямими обчисленнями по формулі (2) цього зробити неможливо.

Із [17] відомо, що вартість опціону CALL зі страйком, що дорівнює поточній ціні акції (у прикладі $S_0 = \$389.70$) у ризик-нейтральній дискретній динамічній моделі є вартістю синтетичного портфелю із акції (її частки) — x , і безризикового фінансового інструменту (його частки) — y , яка, по-перше, буде задовольняти функції доходності опціону на час експірації, а, по-друге, приведена вартість форвардної ціни акції з двома майбутніми станами, яка визначається як їх математичне сподівання зі ставкою дисконту $Exp(-r * T)$, повинна дорівнювати початковій ціні S_0 — (див. (1)). Тому, функцію доходності опціону на час його експірації (8 березня 2012 року) можна записати таким чином [11]:

$$S_1 * x + (1+r) * y = S_1 - S_0, \quad S_2 * x + (1+r) * y = 0. \quad (3)$$

Враховуючи, що ціна опціону є приведеною ціною і записується у тих же самих частках акції — x , і безризикового фінансового інструменту — y , тому вона буде виглядати так:

$$S_0 * x + y = CALL. \quad (4)$$

Якщо уважно подивитися на формули (1) — (4), можна визначити, що у п'яті лінійних рівняннях досі невідомими є наступні шість змінних, а саме: $x, y, S_1, S_2, p_1, CALL$. Причому, цей CALL опціон є екзотичним (бермудським), з нестандартним страйком і з часом експірації, який не відноситься до стандартних опціонних серій (час експірації: 8 березня 2012).

Обчислимо ціну опціону CALL з часом експірації 8 березня 2012 року на основі лінійної апроксимації його імпліцитної волатильності і котирувань наявних стандартних опціонних серій на 2 грудня 2011 року з найближчими до $S_0 = \$389.70$ страйками: \$ 385 і \$ 390.

Таблиця 3

**КОТИРУВАННЯ СЕРІЙ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 385,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
20 січня 2012	385	20.74	0,02	32,43*
17 лютого 2012	385	26.6	0,02	34,30*
8 березня 2012	385	29,45***	0,02	34,84**
16 березня 2012	385	31,43	0,02	34,98*

*1. Імпліцитна волатильність стандартних опціонів, що отримана за моделлю Блека-Шоулса.

**2. Імпліцитна волатильність, екзотичного (бермудського) опціону з стандартним (нестандартним) страйком, що отримана апроксимацією.

***3. Ціна опціону, яка визначена на основі його імпліцитної волатильності.

В інших таблицях використовуються аналогічні умовні визначення.

Причому, миттєва імпліцитна волатильність $\sigma(t, T)$ на 8 березня 2012 року розраховується рекуррентно, виходячи із кількості торговельних днів у наступні періоди: 2 грудня 2011 року — 20 січня 2012 року; 20 січня 2012 року — 17 лютого 2012 року; 17 лютого 2012 року — 16 березня 2012 року.

Аналогічні розрахунки проводяться для страйку \$ 390.

Таблиця 4

**КОТИРУВАННЯ СЕРІЙ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 390,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
20 січня 2012	390	18,15	0,02	33,23*
17 лютого 2012	390	23.85	0,02	33,83*
8 березня 2012	390	27,13***	0,02	34,01**
16 березня 2012	390	28,3	0,02	34,07*

Для визначення ціни необхідного опціону зведемо отримані результати до табл. 5.

Таблиця 5

**ВИЗНАЧЕННЯ ЦІНИ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 389,70
І ЧАСОМ ЕКСПІРАЦІЇ 8 БЕРЕЗНЯ 2012 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
8 березня 2012	385	29.45 (табл. 3)	0.02	34.84 (табл. 3)
8 березня 2012	389.70	27.26***	0.02	34.05**
8 березня 2012	390	27.13 (табл. 4)	0.02	34.01 (табл. 4)

Після того, як була визначена ціна необхідного CALL опціону, ми отримали систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими x, y, S_1, S_2, p_1 . Після її розв'язання отримуємо необхідні нам ціни акції станом на 8 березня 2012 року і ймовірності їх визначення, а саме: $S_1 = \$448.244, S_2 = \$338.803, p_1 = 0.465259, 1 - p_1 = 0.524741$.

2-й крок. Знаходження ціни акції S_3 на 1 квітня 2012 року і ризик-нейтральної ймовірності p_2 її виникнення, за умови, коли ціна акції 8 березня 2012 дорівнює $S_1 = \$448.244$.

Використовуємо аналогічний підхід, як і в табл. 3 і 4. Обчислимо ціну опціону CALL з часом експірації 1 квітня 2012 року на основі лінійної апроксимації його імпліцитної волатильності і котирувань наявних стандартних опціонних серій на 2 грудня 2011 року з найближчими до $S_1 = \$448.244$ страйками: \$ 440 і \$ 450.

Таблиця 6

**КОТИРУВАННЯ СЕРІЙ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 440,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
17 лютого 2012	440	6.3	0.02	30.91*
16 березня 2012	440	9.45	0.02	31.11*
1 квітня 2012	440	11.2984***	0.02	31.5686**
20 квітня 2012	440	31.43	0.03	32.91*

Слід зазначити, що миттєва відсоткова ставка $r(t, T)$ на 20 квітня 2012 змінилася відповідно до табл. 2 до 0,03 %.

Аналогічні розрахунки проводяться для страйку \$ 450.

Таблиця 7

**КОТИРУВАННЯ СЕРІЙ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 450,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
17 лютого 2012	450	4.85	0.02	31.16*
16 березня 2012	450	7.46	0.02	30.97*
1 квітня 2012	450	9.1576***	0.02	31.4508**
20 квітня 2012	450	11.9	0.03	32.73*

На основі даних, отриманих у табл. 6 і 7, шляхом інтерполяції визначимо імпліцитну волатильність, а по формулі Блека—Шоулса ціну опціону CALL зі страйком $S_1 = \$448.244$.

Таблиця 8

**ВИЗНАЧЕННЯ ЦІНИ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 448.244
І ЧАСОМ ЕКСПІРАЦІЇ 1 КВІТНЯ 2012 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
1 квітня 2012	440	11.2984 (табл. 6)	0.02	31.5686 (табл. 6)
1 квітня 2012	448.244	9.5073***	0.02	31.4715**
1 квітня 2012	450	9.1576 (табл. 7)	0.02	31.4508 (табл. 7)

Умови ризик-нейтрального ціноутворення на 8 березня 2012 з урахуванням цін акцій на 1 квітня 2012 аналогічно (1) можна записати так:

$$S_3 * p_2 + S_0 * (1 - p_2) = S_1 * \text{Exp}(r * T) = F_2, \quad (5)$$

де T — період часу з 8 березня по 1 квітня 2012 року, а безризикова відсоткова ставка обчислюється шляхом інтерполяції, але у даному прикладі вона залишається 0,02 % (див. табл. 2).

Функція доходності CALL опціону з страйком \$448.244 на час його експірації (1 квітня 2012 року) можна записати таким чином [11]:

$$S_3 * x + (1 + r) * y = S_3 - S_1, \quad S_0 * x + (1 + r) * y = 0. \quad (6)$$

Враховуючи, що ціна опціону є приведеною ціною і записується у тих же самих частках акції — x , і безризикового фінансового інструменту — y , тому вона буде виглядати так:

$$S_1 * x + y = \text{CALL}. \quad (7)$$

Вирішення системи чотирьох лінійних рівнянь (5)—(7) з чотирма невідомими, дві із яких x та y є допоміжними, надають наступний результат $p_2 = 0.837906$, $S_3 = 459.577$.

3-ій крок. Знаходження ціни акції S_4 на 1 квітня 2012 року і ризик-нейтральної ймовірності $1 - p_3$ її виникнення, за умови, коли ціна акції 8 березня дорівнює $S_2 = \$338.803$.

Обчислимо ціну опціону CALL з часом експірації 1 квітня 2012 року на основі лінійної апроксимації його імпліцитної волатильності і котирувань наявних стандартних опціонних серій на 2 грудня 2011 року з найближчими до $S_2 = \$338.803$ страйками: \$ 335 і \$ 340.

Таблиця 9

**КОТИРУВАННЯ СЕРІЙ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 335,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
17 лютого 2012	335	62.25	0.02	40.04*
16 березня 2012	335	67.55	0.02	43.01*
1 квітня 2012	335	68.5870***	0.02	41.7475**
20 квітня 2012	335	69.7	0.03	40.28*

Аналогічні розрахунки проводяться для страйку \$ 340.

Таблиця 10

**КОТИРУВАННЯ СЕРІЙ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 340,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
17 лютого 2012	340	58.15	0.02	39.40*
16 березня 2012	340	61.55	0.02	39.05*
1 квітня 2012	340	63.3299***	0.02	39.1159**
20 квітня 2012	340	65.5	0.03	39.19*

На основі даних, отриманих у таблицях 9 і 10, шляхом інтерполяції визначимо імпліцитну волатильність, а по формулі Блека—Шоулса ціну опціону CALL зі страйком $S_2 = \$338.803$.

Таблиця 11

**ВИЗНАЧЕННЯ ЦІНИ ОПЦІОНУ CALL З СТРАЙКОМ \$ 338.803
І ЧАСОМ ЕКСПІРАЦІЇ 1 КВІТНЯ 2012 РОКУ**

Час експірації	Страйк	Ціна	$r(t, T)$	$\sigma(t, T)$
1 квітня 2012	335	68.5870 (табл. 9)	0.02	41.7475 (табл. 9)
1 квітня 2012	338.803	64.5896***	0.02	39.7459**
1 квітня 2012	340	63.3299 (табл. 10)	0.02	39.1159 (табл. 10)

Умови ризик-нейтрального ціноутворення на 8 березня 2012 з урахуванням цін акції $S_2 = \$338.803$ на 1 квітня 2012 аналогічно (1) і (5) можна записати так:

$$S_0 * p_3 + S_4 * (1 - p_3) = S_2 * \text{Exp}(r * T) = F_3, \quad (8)$$

де T — період часу з 8 березня по 1 квітня 2012, а безризикова відсоткова ставка обчислюється шляхом інтерполяції, але у даному прикладі вона залишається 0,02 % (див. табл. 2).

Функція доходності CALL опціону з страйком \$338.803 на час його експірації (1 квітня 2012 року) можна записати таким чином [11]:

$$S_0 * x + (1+r) * y = S_0 - S_2, \quad S_4 * x + (1+r) * y = 0. \quad (9)$$

Враховуючи, що ціна опціону є приведеною ціною і записується у тих же самих частках акції — x , і безризикового фінансового інструменту — y , тому вона буде виглядати так:

$$S_2 * x + y = CALL. \quad (10)$$

Вирішення системи чотирьох лінійних рівнянь (8)—(10) з чотирма невідомими, дві із яких x та y є допоміжними, надають наступний результат $p_3 = 0.658348$, $S_4 = 240.739$.

Таблиця 12

**РЕЗУЛЬТАТИ КАЛІБРУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ
І ЦІНОУТВОРЕННЯ ОПЦІОНІВ НА АКЦІЇ КОМПАНІЇ APPLE,
СТАНОМ НА 2 ГРУДНЯ 2011 РОКУ**

2 грудня 2011	8 березня 2012	Ймовірність	1 квітня 2012 року	Ймовірність
			\$459.577	0.389843
	\$448.244	0.465259		
\$ 389.70			\$389.70	0.427461
	\$338.803	0.524741		
			\$240.739	0.182695

Висновки. На основі удосконалення дискретної динамічної моделі, розроблено метод калібрування стохастичної волатильності для оцінювання вартості екзотичних (бермудських) опціонів з не стандартними страйками. Для компанії Apple побудоване каліброване дерево з визначенням ціни опціонів, виписаних 2 грудня 2011 року і часом експірації 8 березня і 1 квітня 2012 року з цінами відповідно \$ 27,26 і \$ 64,58. Досконалі методи калібрування ПФІ з новими інструментальними основами і новими типами процесорів на глобальному рівні, як зазначає BIS, відкривають новий вид бізнесу (сервіс, послуги) щодо оцінювання вартості і ризиків екзотичних портфелів у реальному масштабі часу [19].

Література

1. Bates D.S. The crash of '87: Was it expected? The evidence from options markets // Journal of Finance. — 1991. — Vol. 46. — № 3. — P. 1009—1044.

2. *Castagna A., Mercurio F.* The Vanna-Volga Method for Implied Volatilities // *Risk Magazine*. — January 2007. — P. 106—111.
3. *Chesney M., Scott L.* Pricing European Currency Options: A comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. — September 1989. — № 24. — P. 267—284.
4. *Gershon D.* Method and System for Pricing Options. — Patent № US 7,315,838 B2. — 1-st January 2008. — 18 p.
5. *Fahrner I.* Modern algorithm for the Heston model // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. — 2007. — Vol.10. — № 1. — P. 23—30.
6. *Hagan P., Kumar D., Lesniewski L., Woodward L.* Managing Smile Risk // *Wilmot Magazine*. — September 2002. — P. 84—108
7. *Henrard M.* The Irony in the Derivatives Discounting // *Wilmott Magazine*. — 2007. — Vol. 7. — P. 82—98.
8. *Heston S.L.* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility and Applications to Bond and Currency Options // *Review of Financial Studies*. — 1993. — Vol.6. — № 2. — P. 327—343.
9. *Hull J., White A.* The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities // *Journal of Finance*. — 1987. — Vol. 42. — № 2. — P. 281—300.
10. *Hull J., White A.* An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by Stochastic Volatility // *Advanced in Futures and Options Research*. — 1988. — № 3. — P. 29—61.
11. *Lipton A., McGhee W.* Universal Barriers // *Risk Magazine*. — May 2002. — Vol. 15. — № 1. — P. 81—85.
12. *Schöbel R., Zhu J.* Stochastic Volatility With an Ornstein Uhlenbeck Process: An Extension // *European Finance Review*. — 1999. — № 3. — P. 23—46.
13. *Scott L.* Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and An Application // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. — December 1987. — № 22. — P. 419—438.
14. *Schoutens W.E., Simons E., Tisaert J.* A perfect calibration! Now what? // *Wilmott Magazine*. — 2004. — Vol. 6. — P. 66—78.
15. *Stein E.M., Stein J.* Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach // *Review of Financial Studies*. — 1991. — № 4. — P. 727—752.
16. *Weert F.* Exotic Options Trading. — Chichester: John Wiley & Sons Inc., 2008. — 188 p.
17. *Силантьєв С.О.* Дискретні динамічні моделі оцінювання вартості похідних фінансових інструментів // *Наук. зб. КНЕУ «Формування ринкової економіки», № 26, у 2-х частинах, ч. II, 2011.* — С.267—282.
18. *Силантьєв С.О.* Менеджмент похідних фінансових інструментів: Навчальний посібник. — К.: КНЕУ, 2010. — 279 с.
19. www.bis.org — Сайт банку: Bank for International Settlements.

Стаття надійшла до редакції 13.06.2012 р.