

І. А. Джаладова, проф. кафедри
вищої математики ФІСІТ КНЕУ
О. Д. Шарпов, проф. кафедри
інформатики ФІСІТ КНЕУ

СУЧАСНІ АСПЕКТИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

АНОТАЦІЯ. В роботі аналізується сучасний стан актуарної математики як науки. Автори намагаються спираючись на виклики посткризової економіки і професійні вимоги до актуаріїв сформулювати основні принципи, підходи до відбору моделей, які треба будувати, досліджувати в актуарній математики; що складає її зміст, з одного боку, як математичної галузі знань а з іншого — економіки.

ANNOTATION. In this paper the modern condition of the actuarial mathematics as of science is analyzed. Authors attempt resting against the challenges of post-crisis' economics and professional demands to Actuaries to articulate guiding principles, approach selection models, what necessary to build, to investigating into actuary mathematicians and what will compose her content as on the one hand the mathematical branch of knowledge and on the other hand — economics.

КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ. Невизначеність (випадковість), чесна або актуарна вартість події, демографічна математика, страхова компанія, безумовна франшиза, економіка страхування, функція корисності, страхування ексцеденту збитку, фінансова безпека, актуарії.

Вступ. *Актуарна математика* — це загальноприйнята назва наукового напрямку, який вивчає застосування математичних методів і моделей у страхуванні. Разом з відповідними економічними і юридичними науками, актуарна математика утворює більш широку галузь знань — *актуарну науку*, яка є теоретичною основою страхового бізнесу. Початкові форми страхового бізнесу виникли в давнині. Ще в рабовласницькому суспільстві були добровільні угоди, в яких можна впізнати риси сучасного договору страхування. Вони викладені ще і в одній із книг Талмуда: якщо у одного з погоничів віслюка помирала тварина, талмуд наказував іншим погоничам виділяти йому в обмін іншого віслюка, але тільки не гроші. Тобто вже в ті часи був закладений *важливий принцип страхової справи — страховий захист не повинен слугувати збагаченню.*

Задовго до наших часів були спроби встановлення нормативів розподілу ризиків законодавчо. Царем Вавілонії Хамураппі (18 ст. до н.е.) були видані закони, що відображали характерні риси страхування того часу, де передбачались згоди між погоничами і

купцями про сумісне несення збитків, які могли відбутися на шляху від нападу розбійників, падежу верблюдів, крадіжки і т. п. Таким чином, в основі первісних форм страхування була закладена колективна взаємодопомога, яка забезпечувалась взаємними зобов'язаннями.

Найповніше взаємне страхування було розвинуто в Давньому Риме. Воно застосовувалось різними організаціями, які об'єднували своїх членів на основі професійних, матеріальних і особистих інтересів.

Актуарна математика також має сторічні традиції. Спочатку розроблялись актуарні моделі пов'язані зі страхуванням життя, як коротко строкові і так й довго строкові. Такі моделі й зараз є актуальними, але далі почали розвиватися актуарні моделі, які застосовувались для різних видів страхування.

Дійсно, перші основні означення та принципи актуарної математики як науки наведено в працях американських і британських вчених, наприклад в [1]. Роль ризику в діловій практиці вивчалася в дисертації Уілетта [2], яка проклала шлях для подальших досліджень. К. Борх опублікував серію статей [3], застосовуючи теорію корисності до питань страхування. Де Гроот у [4] дав повне викладення теорії корисності, починаючи з базових аксіом узгодженості переваг для різних розподілів фіналів. І де Гроот, і Борх обговорювали важливий з історичної точки зору Петербурзький парадокс [4]. Стаття Фрідмана і Севіджа [5] внесла суттєвий вклад у теорію корисності і поведінку людини, яка бажає бути застрахованою.

Пратт отримав кілька теорем про премії і функції корисності, в якій використовуються два не дуже точних наближення. Теорема про оптимальне страхування була доведена Ерроу [6] в контексті страхування на випадок хвороби. Теорема, мета якої страхування є мінімізація дисперсії утриманих втрат, була темою робіт Борха і Хана [8]. Використання дисперсії втрат в якості міри стабільності обговорювалось Бьордом, Пентікайненом Т. і Песоненом Е. [9].

1. Професія актуарій

Актуарій — це спеціаліст — математик, який оцінює величину страхових тарифів і надійність страховика на основі статистичної інформації і математичних методів.

Походження професії «актуарій» у сучасному розумінні пов'язано з появою перших організацій по страхуванню життя,

коли з'явилась потреба в обчисленні премій на реальній науковій базі. Перша актуарна фірма виникла у Великобританії у 1762 році. У наступні роки потреби ринку визначили неперервне зростання кількості таких фірм. Логічним завершенням цього процесу стало розуміння необхідності створення професійної організації актуаріїв. Таким чином, у 1848 році з'явився інститут актуаріїв у Лондоні і факультет актуаріїв у Единбурзі у 1856 році. Їх головні задачі формулювалися як сприяння в розвитку теорії і практики актуарної справи, в удосконаленні інформаційного забезпечення актуаріїв, що включає компоненту статистичних даних для кваліфікаційних розрахунків. Тоді же виникло розуміння важливості державних актів про страхування, пенсійне забезпечення, які регулюють і упорядковують дану сферу суспільних відношень. Точне *походження слова «актуарій»* до теперішнього часу невідомо, але можливо воно походить від слова «actuaries» — клерк, регістратор, утримувач акцій. В цьому ж сенсі розумілась посада актуарія, яка була введена Петром 1 у Росії у 1703 році. Зараз до актуаріїв відносять тих, хто пройшов університетську підготовку, здав іспити і формально належать той чи іншій національній організації актуаріїв.

У 1895 році національні суспільства актуаріїв Бельгії, Франції, Німеччині, Великобританії і США організували Міжнародну асоціацію актуаріїв, яка знаходиться у Брюсселі і кожні 4 роки проводить конгреси, одна з традицій яких полягає в тому, щоб дати можливість національним суспільствам інформувати актуарне суспільство про свій устрій, функціонуванні, проблемах актуарної науки і практики, представляти цікаві статистичні дані. *Конгреси включають велику наукову програму, яка привертає увагу як представників чистої науки, так і прикладників.*

Уже кілька років поспіль міжнародною статистичною агенцією по кадровим питанням проводиться рейтинг серед 250 сучасних спеціальностей. При складанні критеріїв рейтингу враховується прибутковість, перспективність роботи, фізична завантаженість, рівень стресу, екологічні умови. Серед усіх цих спеціальностей на **друге місце** майже у всьому світі вийшов **актуарій** — *аналітик, який спеціалізується на підрахунках страхових ризиків, без яких неможливе цивілізоване існування і розвиток страхування життя.*

Американський журнал Forbes надрукував рейтинг кращих професій на ринку праці США у 2010 році. **Лідером кар'єрної драбини є актуарій.**

У Росії кваліфікаційні вимоги актуарної науки були прийняті Першим з'їздом актуаріїв, який проходив у 1994 році в Московському університеті. Президентом створеного суспільства актуаріїв Росії був обраний відомий математик О.М. Ширяев. В Україні суспільство актуаріїв було створено 17 вересня 1999 року за ініціативою перших українських актуаріїв. На теперішній час членами цього суспільства є 68 професіоналів-актуаріїв, які працюють на страховому ринку і отримали освіту за американською або британською системою.

Актуальним є набір компетенції і професійних знань, якими повинні володіти ті, хто навчається страховій математики. Тому обговорення цих питань, як і дослідження моделей актуарної науки є предметом запропонованої роботи.

2. Економіка страхування

Інститут страхування (система страхування) — це механізм скорочення несприятливого фінансового впливу випадкових подій, які перешкоджають виконанню розумних очікувань.

Розрізняють інститут страхування та близькі до нього системи. Наприклад, банківські установи і азартні ігри. Банківські установи були створені для отримання, інвестування і розподілу заощаджень окремих фізичних та юридичних осіб. Вхідні та вихідні грошові потоки ощадних установ не є детермінованими. Проте, на відміну від систем страхування, ощадні установи не проводять платежі, що відбуваються внаслідок події (фінансових втрат), на яку не можуть впливати ті, хто страждає від її наслідків.

Інші системи, які проводять виплати, що відбуваються при настанні випадкової події, є азартні гри. Проте, азартні гри чи парі відрізняються від страхування тим, що система страхування призначена для захисту від негативного економічного впливу ризиків, які існують незалежно від застрахованого і контролювати які він, як правило, не може. Типова схема азартної гри визначається правилами виплат у зв'язку з реалізацією умисно викликаної події, і гравці добровільно йдуть на ризик. Як і в страхування, при азартній грі зазвичай перерозподіляють кошти, але на цьому подібність і закінчується.

Економічне обґрунтування інституту страхування полягає в тому, що він сприяє загальному добробуту, збільшуючи впевненість у тому, що намічені плани не будуть зруйновані випадковими подіями. Такі системи також можуть підвищувати сукупне

виробництво, оскільки стимулюють окремих людей і корпорації братися за такі підприємства, в яких є ризик великих втрат і за які вони не взяли би без участі страхового захисту. Приклад такого типу відношень дає розвиток *морського страхування*, оскільки воно зменшує фінансові наслідки загибелі суден на морі. *Міжнародна торгівля* сприяє процесу спеціалізації і підвищенню ефективності виробництва. Але взаємовигідна торгівля була би небезпечна і занадто великим ризиком для деяких потенціальних торгових партнерів, якби не існувало системи страхування, яка покриває можливі втрати при морських перевезеннях.

3. Теорія корисності

Якщо люди могли передбачати заздалегідь наслідки своїх рішень, їх життя було б більш простим, але менш цікавим. Ми всі приймаємо рішення, ґрунтуючись на перевагах від наслідків своїх дій. Проте, ми не володіємо даром абсолютного передбачення. Детально розроблена теорія, яка допомагає приймати правильне рішення в умовах невизначеності. Ця галузь знань називається **теорією корисності**.

Один з підходів до розв'язання задачі прийняття рішень в умовах невизначеності полягає в тому, щоб визначити цінність економічного проекту з випадковим результатом як його *середнє, очікуване значення*. Згідно цього принципу очікуваного значення, розподіл ймовірних результатів можна замінити одним єдиним числом, очікуваним значенням випадкового результату, вираженим в грошовій формі. Згідно цього принципу, особі, яка приймає рішення, повинно бути байдуже, прийняти на себе випадкові втрати X чи виплатити величину $E[X]$ з тим, щоб захистити себе від можливих втрат. Аналогічно, особа, яка приймає рішення, повинна погодитися виплатити суму, яка не перевищує величину $E[Y]$, для того, щоб прийняти участь у ризикованому підприємстві з випадковими виплатами Y . В економіці очікуване значення випадкових подій, які сполучені з грошовими виплатами, називається **чесною або актуарною вартістю цієї події**.

Для того, щоб пояснити, чому особа, яка приймає рішення, може погодитися сплачувати більше, ніж очікуване значення, досліджується інша ситуація. Спочатку припускається, що те значення корисності, яке особа що розглядається пов'язує з капіталом величини w , може бути виражено у вигляді деякої функції $u(w)$, яка називається **функцією корисності (капіталу)**.

Після того, як особа, що приймає рішення визначила свою функцію корисності, ця функція може застосовуватися для порівняння двох випадкових економічних наслідків. Ці наслідки будуть позначатися випадковими величинами X та Y . Треба знайти таке **правило прийняття рішення**, яке буде погоджено з перевагами, вже виявленими при визначенні функції корисності капіталу. Так, якщо той, що приймає рішення має капітал w і повинен порівняти випадкові наслідки X та Y , то він обере X , якщо

$$E[u(w + X)] > E[u(w + Y)]$$

і йому буде байдуже, який з наслідків X і Y здійсниться, якщо

$$E[u(w + X)] = E[u(w + Y)].$$

Хоча метод опитування і використання функції корисності здається вірним, але зрозуміло, що неформальні побудови повинні бути підкріплені більш суворим ланцюгом міркувань, якщо треба, щоб теорія корисності склала логічну послідовність і вичерпну основу для прийняття рішень в умовах невизначеності.

Відправною точкою теорії є припущення: розумна людина, зіштовхуючись з двома розподілами випадків, що впливають на капітал, зуміє оцінити перевагу одного з цих розподілів, або однакове відношення до обох. Далі, переваги повинні задовольняти деяким **вимогам узгодженості**. Доведена теорема, яка стверджує, що якщо переваги задовольняють вимоги узгодженості, то існує функція корисності $u(w)$, така, що якщо розподіл X краще, ніж розподіл Y , то $E[u(X)] > E[u(Y)]$, а якщо той, хто приймає рішення не віддасть перевагу жодному з цих розподілів, то $E[u(X)] = E[u(Y)]$. Таким чином, якісну перевагу або її відсутність можна замінити порівнянням чисел.

1. Теорія корисності ґрунтується на припущенні про існування і узгодженості переваг відносно розподілів ймовірностей можливих наслідків. Функція корисності не повинна відображати ніяких несподіванок. Вона є численним описанням наявних переваг.

2. Функція корисності не повинна, а насправді не може, визначатися єдиним способом.

Припустимо, що створюється **страхова компанія** (страховик), мета якої — зменшити фінансові наслідки пошкодження або знищення власності. Страховик випускає контракти (договори), які є зобов'язаннями виплатити власнику власності певну суму (страхову суму), яка дорівнює чи менша, ніж завдані фінансові

втрати, якщо власність пошкоджена чи знищена на протязі періоду дії договору. Платежі, обумовлені цими обставинами і зв'язані з розміром збитку, називаються *страховими виплатами*. На зміну обставинам, що закріплені в договорі, власник (страховик) виплачує страховику винагороду (премію).

Розмір преміальних виплат визначається принципом економічних рішень, які приймаються як страховиком, так і страхувальником. Існує можливість *взаємовигідного страхового договору*, коли величина премії по договору, визначена страховиком, менше, ніж максимальна сума, яку власник власності готов сплатувати за страхування.

При ряді фінансових обставин для окремо взятого договору страхування функція корисності страховика може бути апроксимована *лінійною функцією (прямою лінією)*. Іншими словами, страховик повинен призначити в якості базової премії при повному страховому покритті величину, яка дорівнює очікуваному збитку, $E[X]=\mu$. У цьому контексті μ називається *нетто-премією для страхового договору*, який укладається на один термін. Для того, щоб забезпечити собі кошти на покриття витрат і сплату податків, а також деякий заробіток і щоб у певній мірі застерегти себе від несприятливої динаміки втрат, страхова система повинна при визначенні премії по договору встановити *надбавку*, що додається до нетто-премії.

Таким чином, якщо функція корисності власника зростає і лінійна, розмір премії, при якій він не віддає перевагу жодній з можливостей чи віддає перевагу отримати повне страхове покриття, не перевищує величину очікуваних втрат. При відсутності дотацій при довгостроковому плануванні страховик повинен подбати про те, щоб отримані премії перевищили його очікувані втрати. Тому, у розглянутому випадку, укладання взаємовигідного страхового договору малоімовірно. При укладанні страхового договору страховик, для того щоб уникнути недостатності надходжень, повинен призначити премію, розмір якої перевищує очікуваний збиток і витрати. Таким чином, функція корисності власника власності *не може бути лінійною*.

Для існування функції корисності необхідно, щоб переваги особи, яка приймає рішення, задовольняли властивості узгодженості. Треба відмітити, що ці властивості не передбачають того, щоб функція корисності виявлялася б лінійною, квадратною, показниковою, логарифмічною чи мала будь яку іншу визначену форму. Насправді кожна з перерахованих вище функцій може бути функцією корисності для деякої особи, яка приймає рішення, а

функція, складена з їх сегментів, може відображати переваги ще якоїсь особи.

Природне, що $u(w)$ є зростаючою функцією, «більше — краще». Крім того, було відмічено, що для багатьох осіб, які приймають рішення, при збільшенні капіталу рівними частками корисність збільшується меншими частками. **Це відображається в відомому економічному положенні про складну граничну корисність.**

В обговоренні рішень, які приймаються в страхуванні на основі строго випуклої вверх функції корисності, застосовують нерівність Ієнсена. Згідно цієї нерівності, для випадкової величини X і функції $u(w)$

$$\text{якщо } u'' < 0, \text{ то } E[u(X)] \leq u(E[X]), \quad (1)$$

$$\text{якщо } u'' < 0, \text{ то } E[u(X)] \geq u(E[X]). \quad (2)$$

Застосуємо нерівність Ієнсена (1) до задачі прийняття рішень про страхування, яка сформульована у вигляді формули $u = (w - G) = E[u(w - X)]$. Припустимо, що переваги особи, яка приймає рішення, така, що $u'(w) > 0$ і $u'' < 0$. Застосовуючи нерівність Ієнсена до формули $u = (w - G) = E[u(w - X)]$, матимемо:

$$u = (w - G) = E[u(w - X)] \leq u(w - \mu). \quad (3)$$

Оскільки $u'(w) > 0$, $u(w)$ є функцією, що зростає. Тому з нерівності (3) слідує, що $w - G \leq w - \mu$, чи $G \geq \mu$, причому $G > \mu$, якщо тільки випадкова величина X не є константою. *Тобто, якщо $u'(w) > 0$ і $u'' < 0$, то той, хто приймає рішення буде сплачувати за страхування суму, переважаючи очікувані втрати. Якщо величина G не менше премії, назначеної страховиком, то можливий взаємовигідний страховий договір.*

Мовою математики, будемо казати, що особа, яка приймає рішення на основі функції корисності $u(w)$, не схильна до ризику, тоді і тільки тоді, коли $u'' < 0$.

Функція корисності ґрунтується на перевагах особи, яка приймає рішення, при різних розподілах результатів. Страховик — це не обов'язково окрема фізична особа. Це може бути товариство, акціонерне товариство чи державна організація. В цьому випадку визначення $u_1(w)$ — функції корисності страховика, може виявитися досить тяжкою задачею. Наприклад, якщо страховик є акціонерним товариством, однією із зобов'язань управління є вироблення логічно послідовної безлічі переваг відносно ряду ри-

зикованих підприємств. Ці переваги можуть включати компроміси між не співпадаючими позиціями по відношенню до ризику різних груп акціонерів.

4. Елементи страхування

Унікальність страхових систем полягає в тому, що пом'якшення фінансових втрат, число, розмір чи час настання яких є *випадковим*, — це найважливіша причина їх існування.

Термін «випадкові» в актуарній математиці означає, зокрема, що ймовірний страховик не може контролювати частоту, розмір і час настання втрат. Якщо ж він може їх контролювати, чи якщо розмір страхових виплат перевищує розмір дійсних фінансових втрат, то існує спонукальна причина піддавати себе ризику. В цьому випадку не дотримується припущення, при яких була побудована страхова система. Реальні умови, при яких будуть збиратися страхові премії і проводиться страхові виплати, виявляться іншими, чим ті, які були закладені при організації системи.

Процеси, які визначають розмір і час настання втрат, можуть бути *достатньо стабільні* в часі, так що при плануванні системи можна використовувати інформацію за попередній період. При організації нової системи часто не має статистики, яка відноситься до неї безпосередньо. Проте, можна отримати достатньо багато додаткової інформації відносно аналогічних ризикових ситуацій, щоб визначити ризики та дати попередні оцінки ймовірних розподілів, необхідних для встановлення премії. *Оскільки більшість страхових систем працюють у динамічних умовах, для того щоб системі надалі успішно адаптувалася, необхідно мати план збору і аналізу поточної статистичної інформації.*

У конкурентній економіці ринкові сили змушують страховиків виробляти такі тарифи для короткострокових страхових контрактів, при яких відхилення значень, які спостерігаються на практиці, від середнього значення ведуть себе як *незалежні випадкові величини*.

Так як страхові втрати можуть бути достатньо *рідкими подіями*, буває достатньо важко виявити невипадкові структури. Вартість інформації, необхідної для уточнення системи класифікації, також обмежує можливості експериментувати.

В страхових системах, призначених для обслуговування груп, а не окремих осіб, питання в тому, чи будуть випадковими відхилення від **страхової практики для кожної особи**, не так актуальні. Замість цього на перше місце виходить питання, чи **випадкові відхилення від групової практики**.

Групові страхові рішення ґрунтуються не на порівнянні індивідуальної очікуваної корисності; навпаки, схеми групового страхування ґрунтуються на колективному рішенні питання, чи збільшує система сукупний капітал всієї групи. Прикладом слугує колективне страхування на випадок хвороби, який передбачає виплату допомоги службовцям певної компанії.

Особа, яка приймає рішення, має в своєму розпорядженні капітал величини w , і їй у наступному часовому інтервалі загрожують втрати. Втрати подаються випадковою величиною X . Той, хто приймає рішення, може придбати страховий договір, згідно якого йому буде виплачена сума $I(x)$ при втратах x . Для того щоб у нього не було спонукальної причини прагнути до втрат, припускають що всі допустимі страхові договори такі, що $0 \leq I(x) \leq x$ або робиться, припущення, що спрощує всі допустимі договори, для яких $E[I(X)] = \beta$, можуть бути отримані за одну і ту ж саму суму P .

Особа, яка приймає слабкі рішення, визначила функцію корисності $u(w)$, яка узгоджена з його перевагами для розподілу наслідків і той хто приймає рішення не схильний до ризику, $u''(u) < 0$. Крім того, він вже визначив суму, позначимо її через P , яку він згоден сплатити за страхування. Питання полягає в наступному: який з договорів страхування, що належить класу допустимих договорів з очікуваними страховими виплатами β і премією P слідє придбати, щоб максимізувати очікувану корисність для особи, яка приймає рішення?

Один з підкласів класу допустимих страхових договорів визначається наступним чином:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & x < d \\ x - d, & x \geq d \end{cases}.$$

Цей клас договорів характеризується тим, що страхові виплати не виробляються, поки втрати не перевищують **безумовну франшизу** d . За умовами договору для втрат, які перевищують безумовну франшизу, виплачується різниця між втратами і безумовною франшизою. Такий тип страхування іноді називається **страхуванням ексцеденту збитку**, чи ексцеденту збитковості, залежно від застосувань.

Позначимо через β очікувані страхові виплати, тоді $F(x)$ — є функцією розподілу, яка відповідає випадковим втратам X :

$$\beta = \int_d^{\infty} (x - d)f(x)dx,$$

або

$$\beta = \int_a^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

Це рівняння для відповідної безумовної франшизи

В цих умовах відповідь на рішення про можливість страхування дає теорема:

Теорема [8]. *Якщо особа, яка приймає рішення,*

- має капітал w ,
- не схильна до ризику, іншими словами, її функція корисності $u(w)$ така, що $u''(w) < 0$,
- піддається ризику випадкових втрат X ,
- погоджується виплатити суму P за страхове покриття, і якщо страховий ринок надає всі допустимі договори страхування вартості P і виду $I(x)$, $0 \leq I(x) \leq x$, де $E[I(X)] = \beta$, то очікувана корисність для особи, яка приймає рішення, максимізується придбанням договору страхування

$$I_d^*(x) = \begin{cases} 0, & x < d^* \\ x - d^*, & x \geq d^* \end{cases}$$

де d^* є розв'язком рівняння

$$\beta - \int_d^{\infty} (x - d) f(x) dx = 0.$$

Теорема застосовується при певних умовах: *по-перше*, відношення премій до очікуваних страхових виплат одне й те ж саме для всіх договорів, що є. Насправді, розподіл випадкових величин $I(x)$ може бути досить різним, і ризикована надбавка, що включається в премію, зазвичай залежить від характеристик розподілу $I(x)$; *по-друге*, в теоремі припускається, що премія P зафіксована бюджетними обмеженнями, і інші значення для величини P не розглядаються; *по-третє*, хоча в теоремі вказаний вид страхування, це не допомагає визначити суму P , яку потрібно втратити. В теоремі величина P фіксована.

5. Аналіз моделей актуарної математики

Абстрактні і фізичні моделі будують для того, щоб створити на базі спостережень змістовну і логічно послідовну теорію, або для того, щоб отримати можливість в повному обсязі імітувати в лабораторії або на комп'ютері реальні

процеси і об'єкти. Моделі абсолютно необхідні в науці, інженерії і в умовах керування великими організаціями. Проте завжди необхідно пам'ятати про істотну різницю між реальністю і моделлю, яка відображає цю реальність. *Гарна модель містить стільки інформації про реальність, скільки треба, щоб дати можливість зрозуміти, що необхідно для успішного функціонування системи, яку ця модель відображає.*

Реальні страхові системи функціонують в середовище, яке складне і динамічне, тому робота по їх побудові нескінченна; наближення можна поліпшувати, реальність може змінюватися. ***Кожна наукова дисципліна переглядає і модернізує свої базові моделі, в тому числі й актуарна наука.***

Актуарна наука розвивалася в ті часи, коли розроблялися математичні засоби (математичний аналіз, теорія ймовірностей), накопичувались необхідні дані, і усвідомлювалися соціальні потреби. Моделі, які були запропоновані в той час, залишаються корисними, але час минає і треба переглядати базові положення. ***З появою швидкодійних комп'ютерів у професії актуаріїв відбулася революція:*** вони позбулися обмежень, пов'язаних з примітивними розрахунковими пристроями і зосередилися на творчих рішеннях питань фінансової безпеки. З'явилася можливість вирішувати проблеми, враховуючи можливість інтегрування страхування, зокрема, в ***загальну теорію ризику з використанням комп'ютерної математики.***

Крім того:

1. **змінюються вимоги** сучасного суспільства до страхової системи; як відповідь розробляються нові системи оплати робітників і нові системи соціального страхування;

2. **математика розвивається**, і деякі поняття яких не існувало в момент зародження актуарної науки, зараз загальноживані, якщо актуарна математика хоче залишатися і йти в ногу з часом, то їй треба використовувати *мову сучасної математики;*

3. *сучасні ППП* дозволяють працювати з найскладнішими актуарними моделями [10—17].

Є набір головних актуарних моделей, який згідно зі переліком питань, підготовленим Міжнародною асоціацією актуаріїв необхідно засвоїти кожному актуарію. Це: **моделі математичної демографії** (демографічні моделі з одним і двома статтями, що враховують вродження; загальні моделі відкритого населення; регулювання відкритого населення; проблеми практичної демографії (старіння населення та ін.); неперервна демографічна модель; поняття стаціонарного і стабільного

населення; актуарні застосування; динаміка зміни населення; страхові договори з виплатами в момент смерті); **моделі колективних ризиків на короткому і тривалому інтервалі часу** (ймовірність банкрутства і розподілу страхових виплат; розподіл величини виплат); **моделі в теорії ризику** (апроксимація індивідуальної моделі; перестраховання ексцеденту збитковості; аналіз перестраховання за допомогою теорії розорення.); **моделі, які враховують витрати**. (викупні суми; алгебраїчні основи бухгалтерського обліку: модель з єдиною причиною вибуття; доля активів); **моделі звітності і регулювання** (грошові вартості; право зміни умов договору; премії та економічні міркування; поправки на накопичений рахунок; методи модифікованого резерву); **моделі особливих видів страхування і анuitетів** (типі ануїтетів, страхування на випадок втрати годувальника); **моделі пенсійних схем** (основні актуарні функції для пенсіонерів); **стохастичні актуарні моделі** (проценти як випадкова величина; сценарії: незалежні процентні ставки, залежні процентні ставки; моделі фінансової економіки; управління процентним ринком).

А далі вже можна вивчати більш складні моделі, які краще відповідатимуть реаліям життя. Аналіз, дослідження всіх моделей потребує використання сучасного математичного апарата.

6. Математика в страховій справі

*Як вказувалося раніше, найбільша різниця між підходом, прийнятим у нашому баченні актуарної математики, і підходами, прийнятими в більшості монографій по актуарній математиці, полягає в істотно великому використанню **ймовірнісного підходу** при викладанні математичних аспектів страхування життя. Актуарії зазвичай писали і говорили про застосування **теорії ймовірностей у своїх моделях**, але їх результати могли б бути отримані і часто дійсно були отримані детерміністичними методами. В нашій роботі, розгляд задач страхування життя оснований припущенні, що **тривалість майбутнього життя є випадковою величиною з непевним розподілом**. Це дозволяє залучати більшість понять з теорії випадкових величин, таких як **функція розподілу, функція щільності, математичне сподівання, дисперсія і твірна функція моментів**. Цей підхід відповідає духу часу, його застосування засновано на наявності швидкодіючих комп'ютерів і відповідає запитам сучасної економіки. Він заснований на спостереженні, того що економічна роль страхування життя і пенсійного страхування найкращим способом проглядається, коли підкреслюється випад-*

кова основа тривалості майбутнього життя. Окрім цього *ймовірні ідеї є в наш час частиною загальної математичної освіти і їх більша глибока реалізація в страхуванні життя пов'язує останні з іншими розділами прикладної теорії ймовірностей, наприклад, з теорією надійності в інженерній справі.*

Результати, отримані із застосуванням детермінованих моделей, зазвичай можна отримати, розглядаючи математичне сподівання у ймовірних моделях.

Теорія ризику визначається як дослідження відхилень фактичних фінансових результатів від очікуваних і являє собою сукупність методів запобігання несприятливих наслідків цих відхилень. *Ймовірнісний підхід до страхування життя дозволяє вбудовувати довгострокові страхові договори в моделі теорії ризику і по суті перетворює теорію страхування життя в складову частину (але дуже важливу складову частину) теорії ризику.* Теорія банкрутства, інший важливий розділ теорії ризику, включається в неї як засіб аналізу одного з джерел несприятливих довгострокових фінансових відхилень — страхових випадків. Це джерело є головним аспектом моделей страхових компаній.

За змістом, страхування є короткостроковим механізмом передачі ризику. Витрати на покриття втрат зрештою несе страхувальник, а не страховик. *Страхування є механізмом «згладжування втрат», що змушує організацію сплачувати свої втрати в довгостроковому масштабі і забезпечувати захист від фінансового краху при середніх і великих втратах за короткий період.*

Страхові компанії пред'являють жорсткі вимоги до тих ризиків, які вони можуть прийняти на себе в межах договору страхування. Це пов'язано з тим, що як і будь-яке інше комерційне підприємство, страхова компанія прагне забезпечити себе від збитків і отримати прибуток. З всього набору ризиків, властивих діяльності конкретного підприємства, вона відбирає тільки ту їх частину, яка задовольняє наступним вимогам:

- випадковий і непередбачуваний характер подій;
- вимірність ризику;
- обмеженість втрат;
- відносно невелика ймовірність настання страхового випадку.

Вимоги випадковості і непередбачуваності подій впливає з самої природи ризику. Причому для страхової компанії важливіше дотримання цієї умови не стільки для самих подій, скільки для розміру втрат. Часті і відносно однорідні події, які приводять до витрат, які достатньо добре прогножуються на протязі року, є невідповідним об'єктом для страхування.

Вимірність ризику означає можливість розрахувати на підставі статистики чи теоретичних моделей його ймовірнісні характеристики.

Обмеженість втрат означає накладання визначених умов на максимальний розмір збитків, що підлягають страхуванню. Зазвичай ця вимога знаходить своє вираження в установленій по договору страховій сумі.

Ймовірність настання страхового випадку не повинна бути занадто великою з двох причин. Перша пов'язана з тим, що реальна частота настання страхових подій схильна флюктуціям відносно своїх середніх значень. Отже, для страхової компанії в цьому випадку реально настання максимальних збитків. Друга причина пов'язана з тим, що висока ймовірність настання страхових випадків відповідає великому розміру страхової премії, яку повинен заплатити страхувальник. Премія, яка складає 20—30 % страхової суми, очевидно, не вигідна страхувальнику.

Як правило, в кожному виді страхування є свої усталені набори ризиків, які приймаються на страхування. При цьому страхувальники можуть вибирати з кількох варіантів. Перелік ризиків обмежений і не враховує всі можливі випадки.

Задача знаходження оптимального співвідношення між страховою сумою і страховою премією є однією із важливіших задач актуарної математики. При призначенні і розрахунку премії необхідно враховувати велику кількість різноманітних факторів — величину страхової суми, адміністративні витрати, витрати на ведення справ, зарплату співробітникам, головним із яких є ймовірність банкрутства компанії, величину якої необхідно мінімізувати. ***Зменшення ймовірності банкрутства страхової компанії досягається за рахунок введення так званої «захисної» надбавки, розрахунок якої також відноситься до важливішої задачі актуарної математики.***

Висновок. Синтезуючи досягнення фундаментальної науки, сучасні комп'ютерні технології, вивчивши структуру міжнародних і національних організацій актуаріїв, а також ознайомившись із задачами, метою і правами актуаріїв у Великобританії, США, Канаді, Франції, Німеччині, згідно з вимогами міжнародної актуарної асоціації, автори пропонують розглядати актуарні методи математики:

- у страхуванні життя;
- в автострахуванні;

- у розрахунках пенсійних систем;
- бухобліку;
- звітності;
- демографії;
- перестраховування;
- теорії ризику і т.д.

Такий підхід робить актуарну математику найактуальнішим напрямом науки, знань і освіти в умовах інформаційної економіки.

Ринок страхування в Україні, розвиток комп'ютерних технологій підійшов до етапу, коли можливий поступовий перехід до нових способів його регулювання заснованих на мотивованому судженні. Ключову роль у цьому процесі, безумовно, повинні грати сертифіковані актуарії. Згідно з дослідженнями ринку, більшість актуаріїв — це молоді освідченні люди до 30 років, вони мають вищу освіту, володіють іноземними мовами, гарний дохід і мінімальні стресові навантаження.

*Актуарна функція визнана невід'ємною частиною діяльності страхових організацій. Але сучасне розуміння діяльності актуарія виходить за межі страхової галузі. Дійсно, здійснення угод фінансового характеру, де платіж залежить від деякої події, яка має ймовірностну природу, в сучасній економіці зустрічаються не лише в страхуванні. По даним міжнародної асоціації актуаріїв, потрібні актуарії не лише в страхуванні, але й банках, інвестиційних компаніях, організаціях охорони здоров'я, пенсійного і соціального захисту. До традиційних задач актуарія відноситься тарифікація, резервування, відстеження співвідношень активів і обов'язків, оцінка збитковості по видах страхування. **Актуарій — це математик, але не в традиційному (класичному) розумінні, а на відміну від математика він повинен отримувати відповіді на проблеми в ситуаціях, коли немає повної інформації.***

Багато з актуарних методів спираються на експертну думку і їм важко можуть знайти суворе математичне обґрунтування. Принципова відмінність діяльності актуарія на відміну від фінансиста або юриста є **використання ймовірностної філософії**, яка припускає, що результат діяльності компанії є результатом реалізації кількох випадкових процесів: в іншій реалізації діяльності компаній результат буде іншим.

Отже, розвиток професії актуарія, викликаний здійсненням реформ в українській економіці отримає міцний імпульс в діяльності науковців, у тому числі і математиків. Тем більше, що важливість підготовки актуаріїв в Україні вже знайшла своє ві-

дображення в постанові Кабінету міністрів № 787 про внесення змін в кваліфікаційно-освітній реєстр і створення магістерської спеціальності «Актурна математика».

Література

1. Principles of Actuarial Science (Society of Actuarial Committee on Actuarial Principles. — 1992.
2. *Willett A.H.* The economic Theory of Risk and Insurance. Philadelphia University of Pennsylvania Press. — 1951.
3. *Borch K.* The Mathematical theory of Insurance. Lexington Books. — 1974.
4. *DeGroot M.H.* Optimal Statistical Decisions. — New York: McGraw-hill. — 1970.
5. *Friedman M., Savage L.J.* The Utility Analysis of Choice Involving Risk, *Journal of Political Economy*, 56:279—304. — 1948.
6. *Arrow K.J.* Uncertainty and the Welfare of Medical Care // *American Economic Review*, 53:941 — 973. — 1963.
7. *Kahn P.M.* Some remarks on Recent Paper by Borch. *ASTIN Bulletin*, I:265—272. — 1961.
8. *Beard R., Pentikainen T., Pesonen E.* Risk theory. — New York: Chapman & Hall. — 1984.
9. *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. — М.: МГУ, 1996. — 261 с.
10. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Актурная математика в задачах. — М.: МГУ, 2003. — 190 с.
11. *Фалин Г.И.* Математический анализ рисков в страховании. — М.: Российский юридический издательский дом, 1994. — 80 с.
12. *Фалин Г.И.* Введение в актурную математику. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — 140 с.
13. *Гербер Х.* Математика страхования жизни. — М.: Мир, 1995. — 156 с.
14. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Теория риска для актуариев в задачах. — М.: Мир, 2004. — 240 с.
15. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. — М.: Изд-во «Дело», 1998. — 302 с.
16. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. — М.: Дело ЛТД, 1995. — 148 с.
17. *Штрауб Э.* Актурная математика имущественного страхования. — М.: Наука, 1995. — 119 с.

Стаття надійшла до редакції 05.06.2012 р.