Література

1. *Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. — М.: Дело, 2008. — 1104 с.

2. *Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В.* Имитационное моделирование экономических процессов. — М.: Финансы и статистика, 2002. — 368 с.

3. *Попов В.М., Ляпунов С.И., Касаткин Л.Л.* Бизнес-планирование: анализ ошибок, рисков и конфликтов. — М.: КноРус, 2003. — 448 с.

4. *Тарасюк Г.М.* Бізнес-план: розробка, обгрунтування та аналіз. — К.: Каравела, 2008. — 280 с.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2012 р.

УДК 330.4:336.7

Є.Б. Долінська, канд. екон. наук,
Національний університет біоресурсів
та природокористування України

ОЦІНЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ КУПОННИХ ОБЛІГАЦІЙ І МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЇХ ПОГАШЕННЯ ЗА ОБМЕЖЕНОЇ ВХІДНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

АНОТАЦІЯ. Розглядаються актуальні питання розробки комплексу моделей для визначення часових та ймовірнісних показників оцінювання надійності (кредитного ризику) купонних облігацій з припустимим простроченням оплати на кожному етапі в умовах обмеженої вхідної інформації. Розроблені з використанням математичного апарату поглинаючих ланцюгів Маркова моделі дозволяють визначити низку показників оцінювання надійності купонної облігації, що надають інвесторові важливу інформацію щодо кредитно-інвестиційної якості боргового цінного паперу та дозволяють прийняти обґрунтоване рішення щодо доцільності інвестування у певний фінансовий інструмент.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: купонна облігація, прострочення виплат, дефолт, поглинаючий ланцюг Маркова, стани ланцюга Маркова, ймовірності переходу, матриця ймовірнісних переходів, фундаментальна матриця.

Поточна економічна ситуація в Україні має сприяти розвитку ринку облігаційних позик, адже використання боргових цінних паперів як альтернативного джерела фінансування діяльності підприємств є актуальним в умовах нестачі у них власних фінансових ресурсів і дефіциту доступних банківських кредитів. Однак, суттєвою перешкодою на шляху розвитку ринку облігацій в Україні є висока ризикованість капіталовкладень в ці фінансові інструменти та, як наслідок, досить низький рівень довіри до них з боку потенційних інвесторів і відповідне зниження їх ліквідності.

У зв'язку з цим першочерговим завданням інвестора на ринку боргових цінних паперів має бути ретельне оцінювання наявних фінансових інструментів з позицій кредитного ризику (або навпаки — надійності). У сучасній кредитно-інвестиційній політиці на передній план має вийти не питання дохідності, а питання надійності капіталовкладень. Однак, питання моделювання та оцінювання кредитного ризику за облігаціями в межах загальної теорії економічного ризику розкриті недостатньо. Тому науково-практичні дослідження, присвячені питанням оцінювання кредитного ризику (надійностії) боргових цінних паперів, є актуальними та своєчасними. На сьогодні серед відкритих (публічних) випусків облігацій переважають відсоткові (купонні) облігації, тому в межах даної статті розглядатимемо лише купонні облігації.

Зазначимо, що ця стаття є продовженням публікацій результатів авторських досліджень [1—2] у сфері моделювання надійності купонних облігацій з припустимими простроченнями погашення періодичних виплат. Адже, в практичній діяльності виникнення прострочення при погашенні боргового зобов'язання хоча і є небажаним, однак досить часто є припустимим. Запропонований у даній роботі підхід дозволить уникнути зайвої громіздкості моделей при збільшенні кількості виплат і подовженні прострочень оплати, а також дозволить обчислювати додаткові показники оцінювання кредитного ризику за обмеженої вхідної інформації.

Метою даної роботи є розбудова комплексу моделей для визначення часових і ймовірнісних показників оцінювання надійності (кредитного ризику) купонних облігацій з припустимим простроченням оплати на кожному етапі в умовах обмеженої вхідної інформації. Створення відповідних моделей здійснюватиметься з використання математичного апарату поглинаючих ланцюгів Маркова.

Загальноприйнятий механізм погашення купонної облігації передбачає погашення потоку купонних виплат (купонів) у визначені моменти часу або інколи протягом певного періоду часу.

Всі купонні виплати є рівними між собою та здійснюються через рівні проміжки часу. Остання виплата за облігацією відрізняється від усіх попередніх. Вона складається з купону та номінальної вартості (номіналу) облігації. Виплати за облігаціями є однаковими для всього обсягу емісії цінного паперу.

У випадку виникнення прострочення оплати, на відміну від багатьох інших кредитних інструментів, пеня за виплатами не нараховується. Виникнення прострочення при погашенні виплат за купонною облігацією є по суті технічним дефолтом. Однак, у сучасних умовах інвестор (власник облігації) може піти на компромісне рішення щодо пролонгації заборгованості та погодитись на пізніше погашення емітентом виплати за цінним папером. Таким чином, технічний дефолт може бути врегульований «мирно» та не призвести до реального дефолту за цінним папером. У випадку ж реального дефолту виплати за купонною облігацією припиняються та погашення боргу здійснюється у судовому порядку.

Отже, в нашій роботі ми розглядатимемо купонні облігації, процес здійснення виплат за якими допускає прострочення по оплаті, причому на етапі кожної виплати можливе виникнення технічного дефолту, який може бути врегульований шляхом несвоєчасного здійснення простроченого платежу.

Наведений механізм погашення купонної облігації з допустимим простроченням оплати може бути описаний за допомогою ланцюгів Маркова [3]. Оскільки основні положення щодо обґрунтування прийнятності апарату ланцюгів Маркова для опису подібних задач висвітлено в попередніх роботах [1, 4], у даній роботі ми апріорно стверджуємо, що механізм оплати купонної облігації може бути змодельований з використанням однорідних поглинаючих ланцюгів Маркова.

Перейдемо до безпосереднього формулювання та розв'язання задачі оцінювання надійності купонних облігацій з використанням математичного апарату поглинаючих ланцюгів Маркова. Сформулюємо задачу в загальному вигляді: інвестор розглядає доцільність вкладення коштів у купонну облігацію, що передбачає здійснення n купонних виплат (c) і погашення номіналу облігації (N) у кінці строку. Відомі ймовірності погашення необхідних платежів, а також прострочення та дефолту на кожному етапі. Необхідно проаналізувати доцільність інвестування в дане боргове зобов'язання на основі визначення показників оцінки ступеня кредитного ризику (надійності) даного цінного паперу з використанням математичного апарату поглинаючих ланцюгів Маркова.

Основними компонентами ланцюга Маркова є стани цього ланцюга та відповідні ймовірності переходу процесу між цими станами на кожному кроці. Визначимо спочатку перелік станів процесу погашення купонної облігації для здійснення моделювання з використанням ланцюгів Маркова. Отже, механізм оплати купонної облігації передбачає такі стани:

- стан певного періодичного платежу;
- стан повного погашення облігації, що передбачає погашення всіх виплат за облігацією;
- стан дефолту за облігацією, що виникає в разі остаточного непогашення будь-якої виплати за цінним папером.

У термінах ланцюгів Маркова описані вище стани можна поділити на дві групи: непоглинальні та поглинальні (поглинальними є стани, потрапивши в які процес у них і залишиться). Здійснення виплат за купонною облігацією передбачає наявність двох кінцевих (поглинальних) станів: стан повного погашення облігації та стан дефолту. Усі інші стани, а саме стани настання періодичних платежів є непоглинальними та, крім того, неповоротними, адже здійснивши будь-який платіж, повернутися до нього вже неможливо.

Досягнення кожного зі станів здійснення періодичних виплат відбувається зі стану попередньої виплати за умови її погашення. Стан повного погашення досягається зі стану останньої виплати за умови повної сплати всіх необхідних виплат за облігацією. В разі виникнення несплати в будь-якому періоді вважається, що відбувся дефолт за облігаційною позикою — таким чином досягається стан дефолту за облігацією.

Отже, в термінах ланцюгів Маркова ми маємо випадковий процес погашення періодичних виплат за купонною облігацією, що складається з m станів: 2 поглинальних стани: дефолт за облігацією та її повне погашення, а також n-непоглинальних станів періодичних виплат. Таким чином, загальна кількість станів ланцюга Маркова для нашої задачі $m = n + 2$.

Введемо умовні позначення описаних станів для ланцюга Маркова:

w_1 — стан дефолту за облігацією (поглинальний);

w_2 — стан повного погашення облігації, що передбачає сплату всіх купонів і номіналу цінного паперу (поглинальний);

w_i — стани періодичних платежів ($i = \overline{3, m}$, де m — загальна кількість станів ланцюга Маркова для даної облігації) — непоглинальні, неповоротні.

Зрозуміло, що процес погашення купонної облігації завжди починається з першого періоду. В нашій задачі настанню першої купонної виплати відповідає стан w_3, друга купонна виплата — відповідно стан w_4 і так далі. Тому тут і далі для запобіганню непорозумінь при визначенні номеру реального платежу за облігацією необхідно відняти 2 від i-го індексу стану ланцюга Маркова ($f = i - 2$, f — номер платежу за облігацією, i — номер стану ланцюга Маркова). Зауважимо, що стани w_1 та w_2 є поглинальними, інші — непоглинальними та неповоротними. Наявність неповоротних станів для ланцюга Маркова сприяє тому, що процес поступово рухається у напрямі до поглинальних станів. При розгляді поглинальних ланцюгів Маркова для подальшої зручності, зазвичай, стани процесу нумерують так, щоб поглинальні дістали перші номери.

Визначимо тепер ймовірності переходу процесу погашення купонної облігації між описаними станами ланцюга Маркова. Спочатку проаналізуємо ймовірності переходу процесу зі станів здійснення періодичних виплат до інших можливих станів. Для цього визначимо перелік подій, що можуть виникнути на кожному етапі погашення емітентом виплат за облігацією:

- повне своєчасне погашення періодичної виплати;
- прострочення оплати (технічний дефолт) з майбутнім врегулюванням;
- однозначна неможливість здійснення емітентом необхідних виплат (реальний дефолт).

Описані події є випадковими. В роботах [1, 5, 6] було обґрунтовано, що погашення кожної виплати за борговим цінним папером носить випадковий характер і залежить від розміру необхідної виплати та обсягу коштів, який емітент може направити на погашення цієї виплати. Необхідно зауважити, що погашення виплат за облігаційною позикою передбачає здійснення необхідних платежів не лише за окремим цінним папером, а для всього обсягу емісії облігацій. Тому при аналізі спроможності емітента здійснити відповідні виплати необхідні враховувати можливість погашення ним платежів для всієї емісії.

Кожна з описаних подій визначає перехід процесу погашення купонної облігації зі стану здійснення кожної виплати до інших можливих станів. При повному своєчасному погашенні певної i-ої періодичної виплати процес перейде до зі стану w_i до стану w_{i+1} наступного $(i + 1)$-платежу за цінним папером або до стану повного погашення облігації w_2, якщо перехід здійснюється після погашення останньої виплати. Тобто перехід процесу до поглинального стану повного погашення облігації w_2 можливий лише зі стану останнього платежу, який передбачає попередню сплату всіх інших платежів. У випадку прострочення оплати i-ого платежу процес залишиться в тому ж самому стані w_i i-ого платежу до тих пір, доки емітент не погасить дану i-ту виплату. А за однозначної неможливості погашення емітентом необхідного i-ого платежу процес перейде до стану w_1 дефолту за облігацією. Перехід процесу до поглинального стану дефолту може відбутись на будь-якому i-ому етапі. Що ж стосується поглинальних станів дефолту та повної оплати, то перехід з цих станів до будь-яких інших є неможливим, а відповідна ймовірність залишитись у кожному з цих станів дорівнює одиниці.

Для кожної з описаних подій існує відповідна ймовірність реалізації цієї події на кожному етапі погашення облігації. Підходи до визначення відповідних імовірностей виникнення вказаних подій на кожному етапі не є предметом розгляду даної статті, тому для даної задачі ми будемо вважати їх апріорно заданими або наперед визначеними величинами. Імовірності виникнення оплати, прострочення або дефолту можуть бути визначені експертним шляхом або на основі статистичного дослідження для облігаційних позик з подібними емітентами, а також схожими умовами емісії. Крім того, можна використовувати підхід до визначення ймовірностей погашення платежів за борговими цінними паперами запропонований у роботах [5, 6].

Отже, перехід процесу зі стану w_i до стану w_k для ланцюга Маркова характеризується ймовірностями переходу — P_{ik}. Введемо умовні позначення описаних вище ймовірностей для нашого ланцюга Маркова:

$P_{i(i+1)}$ — імовірність погашення поточної i-ої виплати та відповідного переходу до наступної $(i + 1)$-виплати;

P_{ii} — імовірність виникнення прострочення на етапі i-ої виплати. Іншими словами, ймовірність залишитись у i-оми стані процесу;

P_{i1} — імовірність виникнення дефолту за облігацією на i-ому етапі та відповідного переходу до стану дефолту;

P_{m2} — імовірність погашення останнього платежу та переходу до стану повного погашення облігації.

Зрозуміло, що сума ймовірностей переходу з певного стану до усіх інших можливих станів ланцюга Маркова має дорівнювати одиниці:

$$\sum_{k=1}^{m} P_{jk} = 1\,,\ \ j = \overline{1,m}\,,\ \ k = \overline{1,m}\,. \qquad (1)$$

Для кращого сприйняття наведемо графічне представлення ланцюга Маркова для описаного вище процесу погашення купонної облігації (рис. 1).

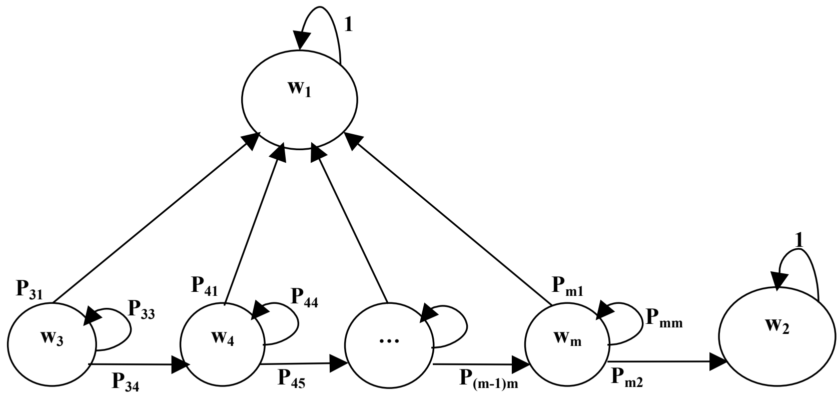

Рис. 1. Ланцюг Маркова
для опису процесу погашення купонної облігації

Зауважимо, що на відміну від попередніх робіт [1], представлення ланцюга Маркова без виділення окремих станів прострочення оплати дозволяє нам запобігти зайвої громіздкості моделі. Адже за збільшенням кількості платежів та допустимих прострочень за цінним папером у попередніх роботах значно ускладнювалось графічне представлення процесу погашення облігації, збільшувалось розмірність відповідних матриць перехідних імовірностей тощо.

Повертаючись до опису ймовірностей, зауважимо, що визначення перехідних імовірностей на кожному етапі погашення облігації є досить трудомісткою задачею та вимагає наявності великої кількості статистичної інформації та адекватних даних про фінансовий стан емітента. Така інформація на практиці часто відсутня, тому прогнозування всієї картини ймовірнісних переходів є вкрай складним завданням. В таких умовах для інвестора є важливим отримати максимум інформації щодо надійності боргового зобов'язання за обмеженості вхідних даних. Тому далі в роботі ми розглядатимемо задачу оцінки надійності купонної облігації за обмеженої вхідної інформації з метою створення важливого інструментарію аналізу доцільності інвестування в реальних умовах.

Для проведення подальшого аналізу надійності (чи кредитного ризику) купонної облігації з використанням математичного апарату ланцюгів Маркова нам буде достатньо мати лише три значення ймовірностей, що є сталими на кожному етапі здійснення виплат.

Отже, для розв'язання поставленої задачі аналізу надійності купонної облігації для даного типу емітента та купонної облігації з відповідними розмірами та періодичністю виплат необхідно знати такі ймовірності:

p — імовірність погашення поточної виплати та перехід до наступної;

g — імовірність прострочення поточної виплати та повернення до неї;

d — імовірність дефолту, тобто неспроможності емітента здійснити необхідні виплати.

На нашу думку, отримання сталих значень імовірностей є простішим завданням у порівнянні з необхідністю прогнозування відповідних імовірностей для всіх періодів здійснення виплат. Вони можуть бути визначені експертним методом або з використанням статистичної інформації щодо погашення купонних облігацій подібних емітентів зі схожими розмірами та періодичністю виплат.

Отже, на етапі кожної виплати за купонною облігацією емітент може з імовірністю p погасити необхідний платіж, з імовірністю g прострочити оплату та з імовірністю d виявитись абсолютно неспроможним здійснити необхідні виплати. Таким чином, маємо такі сталі ймовірності для всіх періодів оплати:

$$
\begin{aligned}
&p_i = p_{i+1} = \ldots = p_m = p\,, \quad i = \overline{3,m}\,;\\
&g_i = g_{i+1} = \ldots = g_m = g\,, \quad i = \overline{3,m}\,;\\
&d_i = d_{i+1} = \ldots = d_m = d\,, \quad i = \overline{3,m}\,.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Відповідно до введених раніше позначень імовірностей можемо записати:

$$P_{i(i+1)} = p\,; \quad P_{ii} = g\,; \quad P_{i1} = d\,, \quad i = \overline{3,(m-1)}\,. \tag{3}$$

Аналогічно до виразу (1) можемо записати:

$$p + g + d = 1\,. \tag{4}$$

Зауважимо, що при аналізі ймовірностей здійснення відповідних виплат за облігацією до уваги береться імовірність погашення емітентом платежів за всім обсягом емісії облігацій.

Необхідно відмітити, що остання виплата за купонною облігацією є більшою, оскільки включає в себе не тільки купон, а й номінал цінного паперу, тому ймовірність погашення останньої виплати та відповідні ймовірності прострочення та дефолту можуть відрізнятися від таких для попередніх платежів. Однак, ми приймаємо гіпотезу про добросовісність платника, тобто ми вважаємо, що емітент свідомо буде намагатись накопичити більшу суму коштів для погашення останньої виплати. Крім того, в загальному випадку запропонована задача може бути розв'язана для різних значень ймовірностей у кожному періоді, тому відмінні від інших значення ймовірностей для останньої виплати не змінюють загального підходу до розв'язання задачі.

Відповідно, тут і далі для m-го стану останньої виплати за облігацією:

$$P_{m2} = p\,; \qquad P_{mm} = g\,; \qquad P_{m1} = d\,. \tag{5}$$

З урахуванням введених позначень імовірностей (p, g, d) можемо модифікувати формулювання висхідної задачі аналізу надійності купонної облігації. Отже, інвестор розглядає доцільність вкладення коштів у купонну облігацію, що передбачає здійснення n купонних виплат (c) і погашення номіналу облігації (N) в кінці строку. З використанням експертної та статистичної інформації визначено, що емітент на кожному етапі погашення облігаційної позики з імовірністю p здійснить необхідний платіж, з імовірністю g прострочить оплату та з імовірністю d виявиться абсолютно неспроможним здійснити необхідні виплати. Необхідно проаналізувати надійність описаного боргового інструменту з використанням математичного апарату ланцюгів Маркова.

Перш ніж визначати числові характеристики ланцюга Маркова для сформульованої задачі, необхідно записати матрицю ймовірнісних переходів π для описаного ланцюга. Ця матриця описує загальну імовірнісну картину всіх можливих переходів процесу з одного стану до всіх інших. Зауважимо, що попереднє позначення поглинальних станів за допомогою перших індексів дозволяє нам отримати матрицю перехідних імовірностей відразу у канонічному вигляді. Для сталих імовірностей переходу (p, g, d), згідно сформульованої нами задачі, матриця π у канонічній формі має вигляд:

$$\pi = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & \dots & w_m \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \dots \\ w_m \end{array} & \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline d & 0 & g & p & 0 & \dots & 0 \\ d & 0 & 0 & g & p & \dots & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & g & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ d & p & 0 & 0 & 0 & \dots & g \end{array}\right) \end{array}. \qquad (6)$$

Для будь-якого ланцюга Маркова канонічна форма матриці перехідних імовірностей π має таку структуру:

$$\pi = \begin{array}{ccc} & & w_1\ w_2\ \dots\ w_k\ \dots\ w_m \\ \begin{array}{c} \\ \textit{Поглинальні стани} \\ \\ \\ \textit{Непоглинальні стани} \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \\ \dots \\ w_m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right) \end{array}, \qquad (7)$$

де I — одинична матриця; O — нульова матриця; R — матриця ймовірностей переходу системи з непоглинальних станів до поглинальних; Q — матриця ймовірностей переходів системи з непоглинальних станів до непоглинальних.

Визначимо загальний вигляд матриці R для сталих імовірностей (p, g, d), що описує ймовірності переходу системи з непоглинальних станів до поглинальних, для нашої задачі:

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \dots \\ w_m \end{array} & \left(\begin{array}{cc} d & 0 \\ d & 0 \\ d & 0 \\ \dots & \dots \\ d & p \end{array}\right) \end{array}. \qquad (8)$$

Матриця ймовірностей переходів системи з непоглинальних станів до непоглинальних Q для сталих імовірностей переходу (p, g, d):

$$Q = \begin{array}{c} \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \ldots \\ w_m \end{array} \begin{array}{c} w_3\ w_4\ w_5\ \ldots\ w_m \\ \begin{pmatrix} g & p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g & p & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & g & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & g \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (9)$$

Записавши канонічну форму матриці ймовірнісних переходів π і визначивши підматриці R і Q можна переходити до визначення числових характеристик ланцюга Маркова, що описує процес погашення купонної облігації. Визначення низки числових характеристик наведеного ланцюга дозволить отримати необхідні параметри оцінювання надійності (ступеня кредитного ризику) для підтримки прийняття рішення щодо доцільності інвестування у певну облігацію.

Основою оцінювання основних числових характеристик поглинального ланцюга Маркова є визначення фундаментальної матриці N:

$$N = \left(I - Q\right)^{-1}, \qquad (10)$$

де I — одинична матриця відповідної розмірності $n \times n$, де n — кількість виплат за облігацією, тобто кількість непоглинальних станів ланцюга Маркова.

Елементи фундаментальної матриці N задають математичне сподівання часу, що проводить процес у кожному з неповоротних станів ланцюга Маркова. Іншими словами, це середня кількість моментів часу (періодів), яку процес погашення облігації «проводитиме» у стані кожної виплати, враховуючи можливість виникнення прострочення на відповідному етапі, або середній час, необхідний на погашення певної виплати. Отримана інформація дозволяє проаналізувати надійність облігації з позицій виявлення етапів, на яких може відбутись досить довге прострочення виплат. Зрозуміло, якщо певний елемент отриманої матриці перевищує одиницю, то на цьому етапі можливе виникнення прострочень у оплаті облігації. Якщо ж відповідний елемент матриці менший за одиницю, то, можливо, процес погашення не потрапить до цього стану, а на попередніх етапах може відбутися дефолт за облігацією. Проаналізувавши отримані дані, інвестор може визначити найбільш ризиковані для себе етапи погашення, спираючись на суб'єктивно встановлений припустимий час здійснення оплати на кожному етапі. Якщо значення середнього часу перебування у стані певної виплати є неприйнятним для інвестора він може або відмовитись від придбання цінного паперу або розробити стратегію його перепродажу до моменту настання проблемного етапу.

Не зменшуючи загальності, для виявлення деяких важливих особливостей розглянемо загальну структуру фундаментальної матриці N відповідно до нашої задачі для ланцюга Маркова, який містить невелику кількість станів. *Зауважимо, що всі отримані далі результати та виявлені закономірності для всіх наведених нижче числових характеристик є актуальними для ланцюга Маркова зі сталими ймовірностями переходів незалежно від кількістю станів такого ланцюга.*

Отже, розглянемо купонну облігацію (графічне представлення рис. 2), яка передбачає здійснення трьох платежів. На етапі кожної виплати емітент з імовірністю p здійснить необхідний платіж, з імовірністю g прострочить оплату та з імовірністю d виявиться абсолютно неспроможним здійснити необхідні виплати ($p+g+d=1$). Умовні позначення станів оплати введено відповідно до визначених раніше у статті.

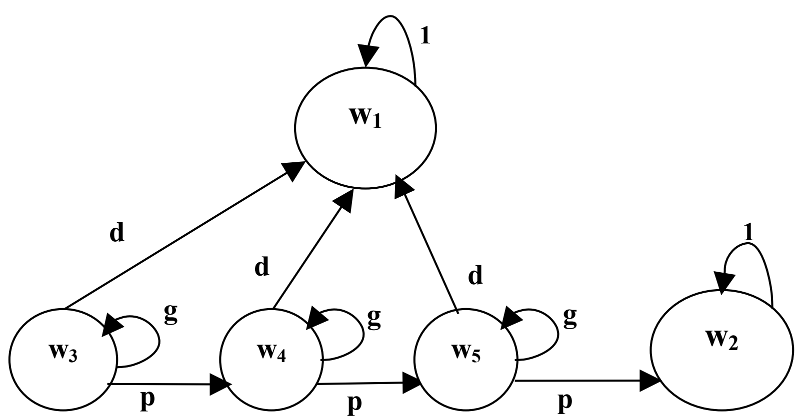

Рис. 2. Приклад ланцюга Маркова для купонної облігації з трьома виплатами

Матриця перехідних імовірностей у канонічній формі для описаної задачі матиме вигляд:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline d & 0 & g & p & 0 \\ d & 0 & 0 & g & p \\ d & p & 0 & 0 & g \end{array}\right) \end{array}. \qquad (11)$$

Визначимо фундаментальну матрицю N, елементи якої задають середній час, що проводить процес у певному неповоротному стані здійснення виплат (для здійснення перетворень нагадаємо, що $p + g + d = 1$):

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g & p & 0 \\ 0 & g & p \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+d & -p & 0 \\ 0 & p+d & -p \\ 0 & 0 & p+d \end{pmatrix};$$

$$N = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} p+d & -p & 0 \\ 0 & p+d & -p \\ 0 & 0 & p+d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p+d} & \dfrac{p}{(p+d)^2} & \dfrac{p^2}{(p+d)^3} \\ 0 & \dfrac{1}{p+d} & \dfrac{p}{(p+d)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{p+d} \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^{ий} \quad \textit{платіж} \\ 2^{ий} \quad \textit{платіж} \\ 3^{ій} \quad \textit{платіж} \end{array} \qquad (12)$$

Певний i-ий рядок отриманої фундаментальної матриці описує середню кількість часу, необхідну для погашення кожного платежу, починаючи, відповідно, з i-ої виплати. Зрозуміло, що процес погашення облігації однозначно розпочинається зі здійснення першої виплати та ніяк не може стартувати з інших станів. Тому логічно було б проводити аналіз лише першого рядку фундаментальної матриці N. Адже, саме перший рядок отриманої фундаментальної матриці описує середній час, необхідний на погашення відповідних виплат за облігацією, починаючи з першого етапу. Однак, може скластися така ситуація, коли інвестор розглядає можливість придбання цінного паперу в середині строку його обігу. В такому випадку для інвестора є більш цікавим майбутнє поводження процесу погашення облігації починаючи з певного поточного i-го етапу. В такому разі можна аналізувати не лише перший рядок матриці N, а й той рядок, що відповідає i-му поточному платежу за цінним папером. А відповідний аналіз рядків фундаментальної матриці, що передують поточному i-му етапу погашення боргового зобов'язання в такій ситуації може бути використаний з метою співставлення отриманих розрахункових даних і реального минулого перебігу подій щодо здійснення виплат за облігацією.

Незважаючи на можливість проведення аналізу надійності купонної облігації в середині строку її обігу, тут і далі в роботі, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що інвестор розглядає можливість вкладення коштів у купонну облігацію на початковому етапі, тобто до моменту здійснення першої виплати. Відповідно, тут і далі ми розглядаємо всі показники, вважаючи, що процес погашення облігації починається з першого етапу (з першого платежу). Зауважимо, що за необхідності, аналіз відповідних показників для певного i-го етапу проводиться абсолютно аналогічно 1-му етапу.

Повернемося до аналізу отриманої фундаментальної матриці. Нульові елементи цієї матриці вказують на те, що зворотній рух процесу погашення купонної облігації є неможливим, тобто здійснення 2-ої виплати означає, що перша виплата вже погашена та повернутись до неї неможливо.

Відповідно до наведених вище міркувань розглянемо детальніше перший рядок отриманої матриці N, який описує середній час, необхідний на погашення певної виплати, починаючи з першого етапу.

Отже, починаючи з першої виплати, процес проводитиме у стані першого платежу $\frac{1}{p+d}$ одиниць часу, у стані другого платежу $\frac{p}{(p+d)^2}$ одиниць часу, у стані останнього платежу $\frac{p^2}{(p+d)^3}$ одиниць часу.

Як видно з отриманої матриці, середній час, який проводить процес погашення купонної облігації у кожному з неповоротних станів здійснення виплат з кожним етапом змінюється у $\frac{p}{p+d}$ раз. Введемо змінну v:

$$v = \frac{p}{p+d}. \tag{13}$$

Запишемо матрицю N, з урахуванням проведеної заміни:

$$N = \frac{1}{p+d} \cdot \begin{pmatrix} 1 & v & v^2 \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Змінну $v = \frac{p}{p+d} = \frac{p}{1-g}$ можна інтерпретувати, як умовну ймовірність того, що процес погашення облігації перейде на наступний етап здійснення виплат (а не потрапить до стану дефолту) за умови, що він не залишиться у стані даної виплати. Зрозуміло, що оскільки $p \geq 0$, $d \geq 0$, то $v = \frac{p}{p+d} \leq 1$. Отримана умовна ймовірність v надає додаткову інформацію щодо надійності боргового зобов'язання.

Отже, для нашої задачі при сталих ймовірностях на кожному етапі, середній час перебування в стані кожної виплати буде зменшуватись з кожним етапом у $v = \frac{p}{p+d}$ раз. Таке спрощення моделі виникає через визначення ймовірностей погашення, прострочення та дефолту сталими на всіх етапах здійснення виплат за облігацією. У випадку ж різних імовірностей для кожного платежу, така закономірність може не спостерігатись. Детальніше питання розробки відповідних моделей оцінювання надійності купонних облігацій з різними ймовірностями переходу для різних етапів з використанням ланцюгів Маркова буде розглянуто в наступній роботі. Зауважимо також, що отримана структура фундаментальної матриці та виявлені закономірності є актуальними для ланцюга Маркова будь-якої розмірності.

З урахуванням визначеної закономірності, можемо сказати, що ми маємо свого роду спадну геометричну прогресію, що описує зміну часу перебування процесу у кожному неповоротному стані під час погашення купонної облігації. Перший член цієї прогресії $b_1 = \frac{1}{p+d}$, знаменник прогресії $q = v = \frac{p}{p+d} \leq 1$. Рівність $q = \dfrac{p}{p+d} = 1$ досягається при $d = 0$. Такий випадок є виродженим для нашої задачі, тому ми його не розглядаємо. Виявлення описаної закономірності дозволяє визначити середній час перебування у певному *k*-ому неповоротному стані ланцюга Маркова без обчислення фундаментальної матриці. Саме певний *k*-ий член геометричної прогресії буде відповідати *k*-ому елементу першого рядка фундаментальної матриці *N* та описувати середній час знаходження у відповідному стані, починаючи з першого стану і до моменту поглинання. Будь-який член геометричної прогресії може бути визначений так:

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1} = \frac{1}{p+d} \cdot \left(\frac{p}{p+d}\right)^{k-1} = \frac{p^{k-1}}{(p+k)^k}. \tag{15}$$

У свою чергу, сума *n* перших членів такої прогресії може бути визначена так:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{(p+d)} \cdot \left[\left(\frac{p}{p+d}\right)^n - 1\right]}{\frac{p}{p+d} - 1} = \frac{1}{d} \cdot \left(1 - \left(\frac{p}{p+d}\right)^n\right) = \frac{1}{d} \cdot (1 - v^n), \tag{16}$$

$$q \neq 1,\ d \neq 0.$$

Сума *n* членів даної геометричної прогресії (де *n* — кількість платежів за облігацією) являтиме собою загальний час перебування у неповоротних станах здійснення виплат за борговим цінним папером. Зрозуміло, що ця сума буде відповідати сумі елементів першого рядка фундаментальної матриці *N*. Вираз (16) є досить простим у застосуванні та не потребує побудови матриці *N* для визначення загального середнього часу перебування у неповоротних станах до моменту поглинання.

Виявлена закономірність і можливість сумування геометричної прогресії стане нам у нагоді при розгляді вектора τ, компоненти якого саме визначають загальний час (загальну кількість періодів) перебування процесу в множині неповоротних станів здійснення виплат до моменту поглинання у будь-якому поглинальному стані.

Теоретично при достатньо великій кількості виплат за облігацією (не менше 200), тобто при великих *n*, можна було б скористатися наближеним виразом обчислення суми геометричної прогресії S як альтернативи (16) для отримання загального часу перебування у неповоротних станах здійснення виплат за облігацією:

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{p+d}}{1-\frac{p}{p+d}} = \frac{1}{d}, \quad q \neq 1, \quad d \neq 1. \tag{17}$$

Отриманий вираз є дуже простим, однак його застосування у практичній діяльності є дещо сумнівним, оскільки необхідна для його використання кількість виплат є скоріше теоретичною, аніж практичною. Однак велика кількість виплат може бути припустимою, наприклад, для державних боргових цінних паперів, які мають досить довгий строк існування, або для облігацій з частою виплатою купонів. Однак надійність державних облігацій є достатньо високою та не потребує проведення запропонованого аналізу, а часті виплати за облігацією не набули поширення в сучасній економічній діяльності.

Отримані показники та визначені закономірності є важливими, оскільки дозволяють отримати додаткову інформацію щодо процесу погашення купонної облігації на етапі аналізу її надійності та прийняття рішень щодо доцільності інвестування у такий борговий інструмент.

Для визначення можливих меж відхилення часу перебування процесу погашення купонної облігації у непоглинальних станах здійснення виплат від середнього визначають дисперсію цієї величини:

$$N_2 = N \cdot (2N_{dg} - I) - N_{sq}. \tag{18}$$

де N_{dg} — фундаментальна матриця N, всі елементи якої, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю;

N_{sq} — фундаментальна матриця N, всі елементи якої піднесені у квадрат.

Отримані значення дозволяють оцінити розкид і побудувати довірчі інтервали для коригування оціненого середнього часу перебування у станах здійснення виплат за купонною облігацією.

Визначення середньої кількості періодів часу, що необхідні для здійснення відповідних виплат за облігацією та дисперсії цього показника дозволяють виявити найбільш проблемні етапи погашення цінного паперу з точки зору можливості та довготривалості виникнення прострочень оплати на певному етапі. З огляду на суб'єктивно встановлену інвестором припустимість кількості періодів прострочення оплати при погашенні облігації, можна розробити стратегії перепродажу цінного паперу або відмовитись від інвестицій в такий фінансовий інструмент.

Для оцінювання загального часу перебування процесу в неповоротних станах до моменту поглинання обчислюють суму середнього часу знаходження у всіх неповоротних станах. Такі суми задаються вектором τ:

$$\tau = N \cdot \xi \,. \tag{19}$$

де ξ — одиничний вектор-стовпець.

У нашому випадку елементи вектора τ визначають загальний час, протягом якого буде відбуватися погашення платежів за облігацією до моменту досягнення будь-якого поглинального стану або середню кількість кроків (періодів), що проведе процес здійснення виплат за облігацією до моменту поглинання. У даному випадку диференціація поглинальних станів відсутня, тобто немає поділу станів на дефолт чи повне погашення. В отриманому векторі τ аналогічно до описаної вище фундаментальної матриці N нас цікавить лише елемент першого рядку. Саме перший рядок вектора τ описує загальну кількість моментів часу, що проведе процес у неповоротних станах здійснення виплат до досягнення будь-якого поглинального стану, починаючи з першого етапу. Відповідно, оцінивши значення першого елементу отриманого вектору необхідно порівняти його з загальною кількістю етапів (виплат) при погашенні облігації. Якщо отримане значення загального часу до поглинання значно менше за кількість платежів за цінним папером, то це вказує на можливість виникнення дефолту під час здійснення виплат за облігацією. В тому ж випадку, якщо відповідне значення першого компоненту вектора τ перевищує кількість етапів погашення боргового зобов'язання, то це вказує на можливість виникнення прострочень при погашенні облігації. Близькість першого значення отриманого вектора до реальної кількості виплат вказує на очікувану відсутність небажаних ситуацій при погашенні аналізованого цінного паперу та є показником надійності даного боргового інструменту. Аналогічним чином проводиться аналіз і в тому випадку, коли доцільність інвестування в цінний папір проводиться в середині строку його обігу.

Аналогічно до опису фундаментальної матриці *N*, не зменшуючи загальності, наведемо загальний вигляд вектора τ для описаного вище прикладу погашення облігації, яке передбачає здійснення трьох виплат (для будь-якої довільної кількості виплат *n* усі закономірності зберігаються).

Отже, в загальному вигляді вектор τ для опису вказаної купонної облігації з трьома виплатами набуде такого вигляду:

$$\tau = N \cdot \xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} & \frac{p^2}{(p+d)^3} \\ 0 & \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+d} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v^3 \\ 1 - v^2 \\ 1 - v \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Як бачимо, значення першого елементу отриманого вектора (20) співпадає з виразом (16) для суми геометричної прогресії для трьох членів (відповідно до кількості виплат за облігацією). Таким чином, виявлена закономірність відповідає дійсності. При зростанні кількості неповоротних станів здійснення виплат за облігацією, відповідному збільшенні розмірності матриць та ускладненні розрахунків, можна застосовувати вирази (15) і (16) для спрощення розрахунків необхідних параметрів.

Для визначення меж коливання загального часу, протягом якого відбуватиметься погашення виплат за облігацією до моменту поглинання визначають відповідну дисперсію даного показника:

$$\tau_2 = (2N - I) \cdot \tau - \tau_{sq}, \quad (21)$$

де τ_{sq} — вектор τ, всі елементи якого піднесені у квадрат.

Отримане значення дисперсії дозволяє скоригувати відповідне значення загального часу перебування процесу в станах здійснення виплат та отримати відповідні можливі межі зміни цього параметра.

Якщо покласти $P_{ii} = g = 0$ для всіх неповоротних станів процесу, тобто унеможливити залишення процесу в одному і тому ж стані, та нормувати кожний рядок матриці перехідних імовірностей π, так щоб сума елементів в ньому дорівнювала одиниці, то можна отримати модифікацію розглянутих характеристик (19), (21). Визначений вектор τ для нових імовірностей переходу (при $P_{ii} = g = 0$) буде задавати математичне сподівання кількості змін станів висхідного процесу. Дисперсія ж цієї величини буде задаватися відповідною компонентою вектору τ_2. Обчисливши нові модифіковані параметри можна порівняти середній час до поглинання та середню кількість змін станів процесу, а також відповідні дисперсії та зробити висновки щодо можливості та тривалості виникнення прострочень під час погашення купонної облігації, а також щодо можливості виникнення дефолту за цінним папером. Визначення цих модифікованих параметрів дозволяє оцінити середнє значення кількості кроків, під час яких процес знаходиться в одних і тих же неповоротних станах, тобто знаходячись у певному неповоротному стані не змінює свого положення. Для отримання цього показника необхідно від значення середнього часу до поглинання відняти відповідне значення середньої кількості змін станів. Отриманий показник визначає середню кількість кроків, протягом яких відбувається прострочення оплати під час погашення купонної облігації. Цей параметр є важливим для аналізу надійності боргового інструменту та прийняття рішень щодо доцільності інвестування.

Одними з найбільш інформативних показників, що характеризують надійність купонної облігації та визначаються з використанням математичного апарату поглинальних ланцюгів Маркова, є ймовірності досягнення поглинальних станів дефолту та повного погашення цінного паперу зі станів здійснення виплат за облігацією. Такі ймовірності потрапляння до кожного з поглинальних станів, виходячи з кожного неповоротного стану визначається матрицею B:

$$B = N \cdot R, \tag{22}$$

згідно введених раніше позначень.

Елементи матриці B є важливими показниками. Вони описують імовірності повного погашення купонної облігації, а також імовірності виникнення дефолту за нею, починаючи з кожного етапу здійснення виплат. Отримана матриця дозволяє побачити загальну ймовірнісну картину можливого перебігу подій під час погашення облігаційної позики та надає потенційному інвесторові можливість проаналізувати доцільність вкладення коштів у певну облігацію з огляду на отримані ймовірнісні показники щодо можливості настання дефолту або повного погашення облігації на етапі здійснення кожного платежу.

Не зменшуючи загальності, розглянемо особливості формування матриці ймовірностей досягнення поглинальних станів B для описаного раніше прикладу купонної облігації з трьома виплатами та відповідного ланцюга Маркова (для будь-якої довільної кількості виплат n усі закономірності зберігаються).

$$B = N \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} & \frac{p^2}{(p+d)^3} \\ 0 & \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 \\ d & 0 \\ d & p \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\frac{p^3}{(p+d)^3} & \frac{p^3}{(p+d)^3} \\ 1-\frac{p^2}{(p+d)^2} & \frac{p^2}{(p+d)^2} \\ 1-\frac{p}{p+d} & \frac{p}{p+d} \end{pmatrix} \end{array}, \quad (23)$$

або з урахуванням заміни (13):

$$B = N \cdot R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-v^3 & v^3 \\ 1-v^2 & v^2 \\ 1-v & v \end{pmatrix} \end{array}, \quad (24)$$

Отримане представлення матриці B дуже добре ілюструє ймовірності потрапляння до станів дефолту та повного погашення за облігацією. Адже дефолт і повна оплата боргового цінного паперу — це два можливі кінцеві результати процесу його погашення. Відповідно сума ймовірностей цих двох результуючих подій дорівнює одиниці. Як видно з отриманої матриці B, імовірності оплати та дефолту за купонною облігацією залежать лише від відношення $v = \frac{p}{p+d}$. Розглянемо детальніше другий стовпчик отриманої матриці, який описує ймовірності повної оплати облігації відповідно до етапів здійснення виплат. Послідовна зміна ступеню відношення $v = \frac{p}{p+d}$ може мати досить просту інтерпретацію: це добуток умовних імовірностей того, що на кожному етапі здійснення виплат, якщо процес залишає стан певної виплати, то він переходить до наступної, а не потрапляє до стану дефолту. Тобто ймовірність погашення купонної облігації залежить лише від імовірності переходу процесу оплати до наступної виплати на кожному етапі, за умови, що він не залишиться у стані даної виплати.

Таким чином, використання математичного апарату поглинальних ланцюгів Маркова в даному випадку дозволяє обійтись без застосування логіко-ймовірнісного підходу та створення складних комбінаторних викладок для отримання ймовірностей кінцевих результуючих подій повного погашення купонної облігації або дефолту за нею.

Розглянемо тепер імовірності потрапляння до кожного з неповоротних станів здійснення виплат, починаючи з певної іншої виплати. Такі ймовірності визначаються за допомогою матриці H:

$$H = \left(N - I\right) \cdot N_{dg}^{-1}. \tag{25}$$

Елементи цієї матриці описують всю можливу картину імовірностей переходу процесу здійснення виплат за купонною облігацією від кожного платежу до будь-якого іншого. Розрахувавши такі ймовірнісні показники, інвестор може проаналізувати можливість досягнення процесом певного етапу, починаючи з будь-якого періоду погашення боргового зобов’язання, і тим самим відповісти на важливе питання: чи дійде колись процес погашення облігації до певної виплати. Оцінивши ймовірності досягнення станів усіх наявних виплат, інвестор може виявити найбільш проблемні етапи з точки зору можливості виникнення дефолту в цих періодах і відповідної низької ймовірності досягнення наступних платежів. Проведення такого аналізу є важливим з точки зору оцінювання надійності цінного паперу та прийняття інвестиційних рішень. Крім того, з огляду на отримані показники можна розробити певну стратегію перепродажу цінного паперу, з урахуванням імовірностей досягнення певного етапу погашення купонної облігації.

Для кращого розуміння викладеного матеріалу розглянемо формування матриці H для наведеного раніше прикладу купонної облігації з трьома виплатами та відповідного ланцюга Маркова (для будь-якої довільної кількості виплат n усі закономірності зберігаються):

$$H = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} & \frac{p^2}{(p+d)^3} \\ 0 & \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p+d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p+d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+d} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} g & \frac{p}{p+d} & \left(\frac{p}{p+d}\right)^2 \\ 0 & g & \frac{p}{p+d} \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & v & v^2 \\ 0 & g & v \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}. \quad (26)$$

З отриманої структури матриці H добре видно те, що вона складається з відповідних імовірностей залишитись у даному стані, тобто виникнення прострочення, та умовних імовірностей досягнення певного етапу здійснення виплат з будь-якого з попередніх етапів. Зрозуміло, що нульові елементи визначеної матриці вказують на те, що повернення до вже здійснених платежів є неможливим. Використання математичного апарату ланцюгів Маркова для аналізу ймовірностей досягнення певних етапів здійснення виплат за купонною облігацією, так само, як і для аналізу потрапляння до поглинаючих станів дефолту та повного погашення, дозволяє обійтись без складного комбінаторного аналізу, що є особливо актуальним за великої кількості станів ланцюга Маркова.

Отримані ймовірності досягнення стану певної виплати за облігацією (елементи матриці H) разом із загальними ймовірностями дефолту або погашення облігації (елементи матриці B) можуть бути використані для визначення низки грошових характеристик кредитно-інвестиційної якості облігації, відповідного коригування її реальної вартості із застосуванням підходів, запропонованих в роботах [5, 6] і розробки відповідних раціональних стратегій інвестування у такий борговий цінний папір. Висвітленню цих та інших питань буде присвячено наступні роботи автора.

Розглянемо тепер інше застосування розглянутої щойно матриці H. З використанням цієї матриці можна обчислити ймовірність потрапляння до певного неповоротного стану рівно z раз.

Нехай n_j — час, що проводить процес у стані w_j; δ_{ij} — вклад початкового стану (константа: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, при \quad i = j; \\ 0, при \quad i \neq j. \end{cases}$).

Тоді ймовірності $\{P_i\}$ потрапляння до певного j-го стану рівно z раз, починаючи з i-го стану, визначаються так:

$$\{P_i[n_j - \delta_{ij} = z]\} = \begin{cases} E - H, & при \quad k = 0; \\ H \cdot H_{dg}^{k-1} \cdot [I - H_{dg}], & при \quad k > 0, \end{cases} \qquad (27)$$

де E — квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці, розмірності $n \times n$, де n — кількість виплат за облігацією, тобто кількість непоглинальних станів ланцюга Маркова.

Наведений вираз (27) отримується із таких міркувань: для того, щоб потрапити до даного неповоротного стану рівно z раз, необхідно досягти цього стану хоча б один раз, потім повернутися до нього (z–1) раз, а потім залишити цей стан назавжди. Зрозуміло, що при $k = 0$ аналізується ймовірність недосягнення процесом стану певної виплати. Такі ймовірності отримується шляхом елементарного віднімання відповідного значення ймовірності досягнення даного стану (елементи матриці H) від одиниці, що ілюструє перший рядок виразу (27).

Отриманий параметр (27) дозволяє проаналізувати ймовірності виникнення прострочень оплати та їх довготривалості. Цей показник має використовуватись разом із фундаментальною матрицею N, що визначає середній час перебування у кожному зі станів здійснення виплат. Проаналізувавши елементи матриці N інвестор може оцінити ймовірність виникнення відповідної тривалості прострочень за допомогою виразу (27) та виявити таким чином проблемні етапи погашення облігаційної позики.

Нарешті, останнім показником, що дозволяє оцінити надійність описаної купонної облігації, є середня кількість неповоротних станів здійснення виплат за цінним папером, через які пройде процес погашення, перш ніж досягне будь-якого з поглинальних станів. Такі характеристики надійності облігації визначаються вектором μ:

$$\mu = \left(N \cdot N_{dg}^{-1}\right) \cdot \xi \,. \qquad (28)$$

Елементи отриманого вектора μ визначають відповідну середню кількість етапів, що пройде купонна облігація перш ніж досягне стану повного виконання або розриву, починаючи з етапу кожного платежу. Відповідно до наведених вище міркувань щодо розгляду облігації до моменту настання першої виплати розглянемо детальніше аналіз першого рядку визначеного вектора μ. Для здійснення аналізу надійності купонної облігації з використанням елементів вектора μ необхідно порівняти отримане значення елементу першого рядка вектора із загальною кількістю виплат за цінним папером. Якщо відповідний елемент одержаного вектора (28) є меншим за кількість платежів за облігацією, то це вказує на можливість настання дефолту за облігацією під час її обігу.

Розглянемо структуру вектора μ для описаного вище прикладу купонної облігації з трьома виплатами для виявлення певних закономірностей її формування (для будь-якої довільної кількості виплат n усі закономірності зберігаються):

$$\mu=\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2} & \frac{p^2}{(p+d)^3}\\ 0 & \frac{1}{p+d} & \frac{p}{(p+d)^2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{p+d}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{p+d} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{p+d} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{p+d}\end{pmatrix}^{-1}\right]\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{p}{p+d}+\left(\frac{p}{p+d}\right)^2\\ 1+\frac{p}{p+d}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+v+v^2\\ 1+v\\ 1\end{pmatrix}. \tag{29}$$

З отриманого виразу (29) можна побачити, що середня кількість неповоротних станів ланцюга Маркова, в яких побуває процес погашення описаної облігації визначається як сума ймовірностей потрапити колись до різних станів відповідно до матриці H, з урахуванням того, що до початкового стану процес потрапляє однозначно. Відповідно до виразу (29) середня кількість станів, до яких потрапить процес погашення облігації залежить лише від умовної ймовірності $v=\frac{p}{p+d}$ переходу процесу оплати до наступної виплати на кожному етапі, за умови, що він не залишиться у стані даної виплати.

Не зменшуючи загальності, розглянемо більш детально перший елемент вектора μ (29) для виявлення загальних закономірностей формування цього вектора. Отже, перший рядок даного вектора являє собою суму спадної геометричної прогресії. Перший член цієї прогресії $b_1 = 1$, знаменник прогресії $q = v = \frac{p}{p+d} \le 1$. Рівність $q = \frac{p}{p+d} = 1$ досягається при $d = 0$. Такий випадок є виродженим для нашої задачі, тому ми його не розглядаємо. Сума *n* перших членів такої прогресії може бути визначена так:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{v^n - 1}{v-1}, \quad q \ne 1, \quad v \ne 1, \quad d \ne 0. \tag{30}$$

Виявлення описаної закономірності дозволяє визначити середню кількість неповоротних станів, в яких побуває процес погашення купонної облігації, починаючи з першого етапу на основі використання виразу (30) без спеціального обчислення вектора μ. Аналіз відповідних показників, починаючи з будь-якого етапу в середині строку обігу цінного паперу проводиться аналогічно першому етапу. Зауважимо, що у описана закономірність спостерігається для ланцюга Маркова зі сталими ймовірностями пер ходуна кожному етапі, у випадку ж різних імовірностей для кожного платежу, такої закономірності може не існувати.

Аналогічно до подібної закономірності для фундаментальної матриці *N* можна було б скористатися наближеним виразом для обчислення суми геометричної прогресії *S* як альтернативи (30) при достатньо великій кількості виплат за облігацією (не менше 200):

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-v}, \; q \ne 1, \; v \ne 1, \; d \ne 1. \tag{31}$$

Однак, використання цього виразу (31) є більш теоретичним, аніж практичним через надто велику кількість платежів за цінним папером.

При розгляді описаних числових характеристик ланцюга Маркова для купонних облігацій, необхідно враховувати, що ми розглядаємо раціонально діючого інвестора. Відповідно такий інвестор скоріше за все аналізуватиме лише такі цінні папери, ймовірність погашення за якими є досить високою та однозначно перевищуватиме 0,5. У такому випадку, рух процесу погашення в бік повної оплати боргового зобов’язання є більш імовірним, що ілюструватимуть числові значення отриманих показників. Крім того, процес погашення облігації не може повернутися назад до попередніх виплат, тому відповідний рух процесу в лівий бік є неприпустимим, отже процес погашення облігації являє собою рух вправо.

Запропоновані часові та ймовірнісні показники оцінювання надійності для описаної купонної облігації з використанням математичного апарату поглинаючих ланцюгів Маркова надають інвесторові важливу інформацію щодо кредитно-інвестиційної якості боргового цінного паперу та дозволяють прийняти обґрунтоване рішення щодо доцільності інвестування у такий фінансовий інструмент. Застосування розроблених показників має бути комплексним, адже саме одночасний аналіз запропонованих параметрів дозволяє побачити цілісну картину перебігу подій під час погашення купонної облігації з припустимим простроченням виплат.

Висновки. Запропонований підхід з використанням математичного апарату поглинальних ланцюгів Маркова для оцінювання надійності купонних облігацій із припустимим простроченням виплат дозволяє подолати недоліки попередніх робіт і розширити коло моделей оцінювання кредитно-інвестиційної якості таких боргових цінних паперів. Такий підхід є актуальним в умовах нестачі достовірної статистичної інформації щодо погашення облігаційної позики на кожному етапі, адже за допомогою запропонованого інструментарію інвестор, маючі обмежену вхідну інформацію, може проаналізувати можливий перебіг подій під час погашення боргового зобов'язання та прийняти адекватне рішення щодо доцільності інвестування в такий фінансовий інструмент.

Визначення часових і ймовірнісних характеристик процесу погашення купонних облігацій з використанням математичного апарату ланцюгів Маркова дозволяє проаналізувати важливі параметри надійності боргового зобов'язання та поповнити низку показників оцінки кредитного ризику (чи, навпаки, надійності) боргових цінних паперів. З використанням описаного підходу можна визначити середній і загальний час погашення кожної виплати за купонною облігацією, ймовірності досягнення певного етапу здійснення виплат, загальну ймовірність погашення або дефолту за цінним папером, середню кількість погашених виплат тощо.

Крім того, запропоновані моделі та відповідні показники дають змогу розробити на їх основі адекватні моделі визначення вартісних характеристик оцінки надійності купонних облігацій і відповідні підходи до управління кредитним ризиком таких боргових цінних паперів з точки зору створення раціональних консервативних або спекулятивних стратегій інвестування у борговий цінний папір. Розробці моделей визначення вартісних характеристик та створення раціональних стратегій інвестування в купонні облігації буде присвячено наступну роботу автора.

Запропонований підхід може також бути застосований для інших боргових інструментів з подібною схемою погашення, а також в умовах достатності достовірної статистичної інформації щодо ймовірностей погашення боргових зобов'язань на кожному етапі здійснення виплат. Висвітленню цих питань будуть присвячені наступні роботи автора.

Література

1. *Долінскька Є.Б., Долінський Л.Б.* Марківські моделі оцінювання кредитного ризику купонних облігацій // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Міжвід. наук. зб. — К.: КНЕУ, 2011. — Вип. № 84. — С. 193—205.
2. *Долінскька Є.Б., Долінський Л.Б.* Оцінювання надійності купонних облігацій з використанням теорії графів // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Економічні науки. — Запоріжжя: ЗНУ, 2011. — С. 220—228.
3. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1970. — 272 с.
4. *Долінська Є.Б.* Моделі оцінки надійності лізингових операцій з використанням ланцюгів Маркова // Модели управления в рыночной экономике: Сб. науч. тр. Общ. ред. и предисл. Ю.Г. Лысенко; Донецкий нац. ун-т. — Донецк: ДонНУ, 2005. — Вып. 8. — С. 67—80.
5. *Долінський Л.Б., Галкін А.І.* Імовірнісні моделі оцінки ризику неплатежу та визначення вартості облігацій // Вісник НБУ. — 2007. — № 8. — С. 38—40.
6. *Долінський Л.Б., Галкін А.І.* Оцінка вартості векселів з урахуванням ризику неплатежу // Фінанси України. — 2009. — №6. — С. 68—76.

Стаття надійшла до редакції 13.11.2012 р.