21. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: Учебник. / О. И. Ларичев. — 2-ое изд, перераб. и доп. — М.: Логос, 2002. — 392 с.

22. *Вітлінський В. В.* Теорія інтелектуальних систем прийняття рішень / В. В. Вітлінський, О. Д. Шарапов // Моделювання та інформаційні системи в економіці: Зб. наук. праць. — К.: КНЕУ, 2008. — Вип. 78. — С. 58—69.

Стаття надійшла до редакції 30.04.2013 р.

УДК 519.86: 330.3

В. Д. Дербенцев, канд. екон. наук., доц.,
ДВНЗ «Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана»

МОДЕЛЮВАННЯ СЕРЕДНЬОСТРОКОВИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЦИКЛІВ

АНОТАЦІЯ. Робота присвячена питанням моделювання середньострокових циклічних коливань. Побудовано компактну модель економічної динаміки, яка складається із нелінійного диференційного рівняння динаміки ВВП, що було одержано із неокласичної моделі росту Солоу та модифікованої ВФ типу Кобба-Дугласа із урахуванням часових лагів, а також доповнена інвестиційною моделлю. Модель дозволяє сумісно описувати середньострокові циклічні коливання, накладені на трендову складову, оцінювати тривалість циклів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модель середньострокових економічних циклів, цикли Жугляра.

АННОТАЦИЯ. Работа посвящена вопросам моделирования среднесрочных циклических колебаний. Построена компактную модель экономической динамики, которая состоит из нелинейного дифференциального уравнения динамики ВВП, которое было получено с неоклассической модели роста Солоу и модифицированной ПФ типа Кобба-Дугласа с учетом временных лагов, а также дополнена инвестиционной модели. Модель позволяет совместно описывать среднесрочные циклические колебания, наложенные на трендовую составляющую, оценивать продолжительность циклов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модель среднесрочных экономических циклов, циклы Жугляра

ANNOTATION. This paper is devoted to modeling the medium-term cyclical fluctuations. Built compact model of economic dynamics, which consists of nonlinear differential equations for the dynamics of GDP, which was obtained with

© В. Д. Дербенцев, 2013

the neoclassical Solow growth model and the modified PF of Cobb-Douglas function with the time lags, as well as enhanced investment model. The model allows to jointly describe the medium-term cyclical fluctuations superimposed on the trendscomponent, measure the length of cycles.

KEYWORDS: model of medium-term economic cycles, Zhuglyars cycles.

Вступ. Нерівномірність економічного розвитку, накопичення протиріч і структурних диспропорцій, які значно посилюються внаслідок глобалізаційних тенденцій, є характерною рисою сучасного етапу розвитку світової економіки. Нерівномірність розвитку виражається у несподіваній зміні фаз підйому та спаду, які останнім часом часто переростали у фінансово-економічні кризи (наприклад, світова фінансово-економічна криза 2008—2010 рр.).

На думку багатьох економістів, криза 2008—2010 рр. посилилась унаслідок накладення на знижувальну фазу 5-го циклу Кондрат'єва (50—60 років) знижувальної фази середньострового циклу Жугляра (7—10 років) [1—4].

Тому аналіз причин і наслідків економічних криз, побудова адекватних математичних моделей циклічного розвитку економіки належить до однієї із найбактуальніших задач сучасної теоретичної та прикладної науки.

Теоретичне та емпіричне пояснення економічних криз внаслідок циклічних коливань було закладено ще в роботах М. Кондрат'єва [5] та Й. Шумпетера [6]. Поте, на нашу думку, на відміну від циклів Кондрат'єва, дослідженню яких присвячено значна кількість робіт (наприклад, [7—8]), питанням аналізу та моделювання інших економічних циклів (Жугляра, Кузнеца, Кітчина), було приділено недостатньо уваги.

Тому головною метою роботи є побудова компактної математичної моделі середньострокових економічних коливань.

Основні результати. Однією із головних заслуг Жугляра було те, що він переконливо довів періодичність економічних криз. На його думку, центральних механізмом циклічних коливань виступають коливання цін: їх підвищення призводе до пожвавлення та підйому, їх зниження — до рецесії та кризи.

Цикли Жугляра (7—11 років) мають таку ж структуру, як і цикли Кондрат'єва, в них також розрізняють 4 фази:

Фаза пожвавлення (в якій виділяють фазу перегріву) — починається після ліквідації диспропорцій, що виникли на попередніх етапах економічного циклу. Пожвавлення може розпочатись після ліквідації нереалізованих товарних запасів, коли відбулось вирівнювання між попитом та пропозицією — тобто економікам прийшла в новий стан динамічної рівноваги.

Економічне зростання, яке розпочалося в стадії пожвавлення характеризується такими рисами: створенням великих запасів ресурсів (капіталу, робочої сили, сировини, виробничих потужностей) і деяким, поки що незначним, підвищенням попиту; появою у підприємців деякої впевненості, що гостра фаза кризи закінчилась; ліквідацією диспропорцій і фінансових міхурів, зокрема, стерилізацією незабезпечених товарною масою похідних фінансових інструментів; виникненням нових стимулів, зокрема, зниженням податків, банківських відсотків, одержання державних замовлень тощо; створенням нових видів товарів і послуг, розповсюдженням нових технологій.

Уже у фазі пожвавлення розпочинається зростання довгострокових інвестицій, які вкрай необхідні у фазі підйому. Інвестиції підігрівають попит і створюють часовий лаг, який посилює диспропорції попиту та пропозиції.

Але для переростання фази пожвавлення у фазу підйому мало лише технічних інновацій, для цього необхідна структурна перебудова економіки та суспільства.

Фаза підйому характеризується таким ланцюгом позитивних зворотних зв'язків: зростання попиту призводить до зростання пропозиції, зростання пропозиції — до зростання попиту; зростання виробництва призводе до зниження безробіття, а це стимулює додаткове зростання платоспроможного попиту; зростання виробництва сприяє зростанню позитивних очікувань, що, в совою чергу, призводе до зростання довгострокових інвестицій, які сприяють подальшому зростанню виробництва; зростання виробництва сприяє збільшенню доходів, а це спричиняє збільшення попиту, і як наслідок збільшенню пропозиції.

Але підвищений попит на цій фазі на різноманітні ресурси досить часто призводить до швидкого зростання цін. Розрив у очікуваннях створює додатковий ажіотажний попит, певну дефіцитність ресурсів, а тому і зростання цін на них. Таким чином, спіраль позитивних зворотних зв'язків стрімко, лавіноподібно розкручується, спричиняючи перегрів економіки.

У підфазі перегріву вже відбувається порушення рівноваги. Ця нерівновага посилюється внаслідок того, що підприємці, вичерпавши для свого розвитку вільні ресурси, все частіше використовують позикові кошти. На цій підфазі виникає структурно-ціновий дисбаланс, який пов'язаний із різними міхурами (ціновими, біржовими, валютними, інвестиційними тощо).

Фаза спаду, *рецесії або кризи*. В результаті перегріву виникає значна переоцінка ключових ресурсів (нафти, газу, металу, доро-

гоцінних металів тощо). Ще деякий час продовжується розігрів економіки, але в кінцевому рахунку, переоціненість ресурсів відсікає все більшу кількість ринкових учасників.

У фазі спаду (кризи) діє такий механізм позитивних зворотних зв'язків: зниження попиту і як наслідок зниження пропозиції, що в свою чергу спричиняє зниження доходів; скорочення виробництва сприяє зростанню безробіття, а це призводе до додаткового скорочення попиту, що призводить до зниження обсягів виробництва, що в свою чергу, сприяє зростанню безробіття; падіння виробництва підсилює кризові очікування, що призводить до зниження довгострокових інвестицій та «втечі» капіталу, що сприяє зниженню виробництва; падіння виробництва сприяє зниженню пропозиції кредитних ресурсів; падіння рівня виробництва предметів споживання призводе до зменшення вироблення засобів виробництва.

Таким чином, необхідна сильна корекція, для того щоб повернутись до рівноважного стану. Створений товарний надлишок необхідно нейтралізувати та переоцінити (стерилізувати) фінансові активи, відбувається також санація неконкурентоспроможних підприємств і навіть цілих галузей.

Фаза депресії. Саме зростання інфляції та безробіття, стагнації виробництва на попередній фазі обумовлює неминучість фази депресії. На цій фазі багато ресурсів (сировина капітал, потужності) виявляються незадіяними в економіці. Але в той же час на цій фазі відбувається активна перебудова економіки

Побудова моделі. При побудові моделі ми виходили із таких міркувань: по-перше, модель має бути компактною та дозволяти, принаймні на якісному рівні, адекватно описувати середньострокові циклічні коливання та наближено оцінювати тривалість циклу; по-друге, модель має враховувати позитивні та негативні зворотні зв'язки між економічними процесами; по-третє, вона має враховувати наявність певної інерційності, наявності часових лагів, зокрема, між зміною інвестицій залежно від зміни попиту, зміною випуску (ВВП) залежно від зміни обсягу інвестицій тощо.

Базові гіпотези при побудові моделі полягають у такому.

Будемо вважати, що випуск пов'язаний із факторами виробництва виробничою функцією (ВФ). Зауважимо, що питання специфікації ВФ для опису національної економіки (та загалом і для багатьох інших трансформаційних економік) є дискусійним [9—15] і ряд емпіричних досліджень свідчить про неможливість застосування класичної ВФ Коба—Дугласа із традиційним набором факторів праці L і капіталу K.

Тому, на відміну від класичної виробничої функції Коба—Дугласа, будемо розглядати в якості праці добуток (wL) — повну вартість праці, доцільність чого обґрунтована, зокрема, у [14—15]:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = A[K(t)]^{\alpha}[wL(t)]^{\beta}, \qquad (1)$$

де $Y(t)$ — випуск продукції (ВВП); A — показник, що враховує технічний прогрес; α, β — коефіцієнти еластичності ВФ. Принаймні в середньостроковій перспективі, ці параметри можна вважати постійними.

Необхідно зауважити, що виробнича функція (1) є статичною, тобто відображає залежності між траєкторією економічного розвитку (ВВП) за умови відсутності запізнення, тобто миттєвою реакцією виходу на вхідні впливи. Статичні моделі відображають вказані залежності для фіксованого моменту часу (точніше, усереднені для досліджуваного інтервалу часу, наприклад, року).

Але ж очевидно, що інвестиції справляють вплив на введення основних фондів (і на випуск продукції) через деякий проміжок часу. Врахування наявності часового лагу (θ_1) впливу інвестицій на обсяг ВВП можна подати у вигляді [11, 16]:

$$Y(t + \theta_1) = \theta_1 \frac{dY}{dt} + Y(t). \qquad (2)$$

Тому, враховуючи (2) перетворимо ВФ до динамічного вигляду:

$$\theta_1 \frac{dY}{dt} + Y(t) = A[K(t)]^{\alpha}[wL(t)]^{\beta}. \qquad (3)$$

Зауважимо, що як було показано у [15], оплату праці найманих працівників wL можна з достатньою точністю апроксимувати таким співвідношенням:

$$(wL(t)) = \beta(1 - \omega)Y(t). \qquad (4)$$

Тут β — коефіцієнт еластичності випуску по заробітній платі із ВФ, ω — питома вага податків у ВВП.

Вся вироблена продукція йде або на споживання (C), або на інвестиції (I):

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{5}$$

Інвестиції витрачаються на компенсацію вибуття основного капіталу, тобто амортизацію (ε), та приріст основного капіталу:

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K}(t) = I(t) - \varepsilon K(t). \tag{6}$$

Розглянемо швидкість зміни ВВП:

$$\dot{Y}(t+\theta_1) = \frac{dY(t+\theta_1)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[F(K(t), wL(t))\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial (wL)}\frac{\partial (wL)}{\partial t}\right],$$

або з урахуванням специфікації (1) одержимо:

$$\dot{Y}(t+\theta_1) = A\left[\alpha K^{\alpha-1}(wL)^{\beta}\,\dot{K} + \beta K^{\alpha}(wL)^{\beta-1}\,(\dot{wL})\right].$$

Помноживши та поділивши перший доданок на *K*, а другий на *L,* одержимо:

$$\dot{Y}(t+\theta_1) = Y(t)\left[\alpha\frac{\dot{K}}{K} + \beta\frac{(\dot{wL})}{(wL)}\right].$$

Враховуючи аналітичні вирази для заробітної плати (4) та приросту основного капіталу (6), остаточно одержимо:

$$\dot{Y}(t+\theta_1) = \beta\dot{Y} + \alpha Y(t)\left[\frac{I(t)}{K(t)} - \varepsilon\right], \tag{7}$$

Ліва частина виразу (7) дорівнює:

$$\dot{Y}(t+\theta_1) = \frac{d}{dt}\left[Y(t+\theta_1)\right] = \theta_1\,\ddot{Y}(t) + \dot{Y}(t). \tag{8}$$

Прирівнявши праві частини (7) і (8) та привівши подібні, остаточно одержимо рівняння для динаміки ВВП, що залежить від

параметрів ВФ, часового лагу між інвестиціями та випуском, норми амортизації основного капіталу, питомої ваги інвестицій у обсягу основних фондів $a_1(t)$:

$$\theta_1 \ddot{Y}(t) + (1-\beta)\dot{Y}(t) - \alpha[a_1(t) - \varepsilon]Y(t) = 0 . \qquad (9)$$

Розглянемо тепер динаміку інвестицій. Будемо розрізняти автономні інвестиції $I_a(t)$ (при фіксованому рівні сукупного попиту) та індуковані інвестиції $I_i(t)$, обсяг яких зростає із ростом сукупного доходу (або попиту):

$$I(t) = I_i(t) + I_a(t) . \qquad (10)$$

Позитивний зворотний зв'язок між зростанням обсягу індукованих інвестицій і зміною попиту можна одати у вигляді:

$$\frac{dC(t)}{dt} \cong a_2(t) I_i(t) . \qquad (11)$$

Прогнозована зміна платоспроможного попиту спонукає підприємців збільшувати обсяг інвестицій у обладнання, будівництво. Отже зміна обсягу індукованих інвестицій пропорційна зміні швидкості попиту.

Коефіцієнт $a_2(t)$ відображає вплив фінансової системи, а саме чим вищий спекулятивний ажіотаж, чим вище є очікуваний прибуток і більш доступні кредити, тим більше значення $a_2(t)$.

Часовий лаг між попитом та інвестиціями θ_2 задамо аналогічно до лагу між інвестиціями та ВВП (2):

$$I_i(t + \theta_2) = \theta_2 \frac{dI_i}{dt} + I_i(t) . \qquad (12)$$

Таким чином, спочатку відбувається зміна попиту (зокрема, попиту на зовнішніх ринках на продукцію експорту), наприклад відбувається збільшення попиту $\frac{dC(t)}{dt} \geq 0$, це через деякий проміжок часу θ_2 призводить до зміни у обсягу інвестицій:

$$\frac{dC(t)}{dt} = a_2(t) I_i(t + \theta_2),$$

або з урахуванням (12) одержимо:

$$\frac{dC(t)}{dt} = (a_2(t)\theta_2)\frac{dI_i}{dt} + a_2(t)I_i(t). \qquad (13)$$

З тотожності (5) випливає, що

$$\frac{dC(t)}{dt} = \dot{Y}(t) - \dot{I}(t). \qquad (14)$$

Прирівнявши праві частини (13) та (14), одержимо:

$$\dot{Y}(t) - \dot{I}(t) = (a_2(t)\theta_2)\left[\frac{dI}{dt} - \frac{dI_a}{dt}\right] + a_2(t)\left[I\ (t) - I_a(t)\right]. \qquad (15)$$

Зауважимо, що за визначенням автономні інвестиції не залежать від наявного доходу або ВНП, їх обсяг залежить від державної інвестиційної політики в сфері модернізації громадської інфраструктури, впровадження науково-технічних досягнень, до автономних інвестицій також належать значні суми, що йдуть на заміщення чинного основного капіталу в міру його вибуття.

Але враховуючи реалії національної економіки, а саме корегування інвестиційної політики залежно від стану наповнення бюджету (та політичної кон'юнктури), задамо в першому наближенні автономні інвестиції як частку ВВП:

$$I_a(t) = \delta Y(t). \qquad (16)$$

Отже, із (15) і (16) одержимо рівняння для динаміки інвестицій:

$$(a_2(t)\theta_2)\dot{I}(t) + a_2(t)I\ (t) - [\delta a_2(t)\theta_2 + 1]\dot{Y}(t) - \delta a_2(t)Y(t) = 0\,. \qquad (17)$$

Розглянемо тепер динаміку попиту, оскілки саме зміна попиту є спусковим гачком: збільшення попиту запускає ланцюг позитивних зворотних зв'язків, зменшення — негативних.

Хоча в моделі в явному вигляді не виділений зовнішньоекономічний сектор (динаміка експорту та імпорту), будемо розрізняти внутрішній попит $C_i(t)$ (що залежить від наявного доходу та граничної схильності до споживання) та зовнішній попит $C_e(t)$ (що залежить від кон'юнктури світових ринків та попиту на продукцію національної економіки).

Такий поділ обумовлений тим, що економіка України є надто відкритою та чутливою до коливань світової економічної кон'-юнктури (так, згідно з офіційною інформацією Держаної служби статистики [17] питома вага експорту у ВВП за період 2002—2011 рр. складала в середньому 52 %, імпорту — 53 %).

Таким чином

$$C(t) = C_i(t) + C_e(t). \tag{18}$$

Цілком природно припустити, що внутрішній попит залежить від наявного доходу (який можна апроксимувати зарплатою (wL) за логістичним законом: спочатку зростає, потім відбувається насичення:

$$C_i(t) = \frac{b \ \exp(\lambda w L(t))}{b \ + \exp(\lambda w L(t))}. \qquad .(19)$$

Тут, b і λ — параметри логістичного рівняння, оцінки яких можна знайти економетрично.

Зовнішній попит будемо вважати екзогенною змінною, що характеризує стан світової економіки та враховує зовнішні шоки.

Таким чином, у роботі побудовано модель середньострокових економічних циклів, яка складається з рівняння динаміки ВВП (9), динаміки інвестицій (17), динаміки попиту (18—19) і тотожності (5).

Висновки. Таким чином, у роботі побудовано компактну модель економічної динаміки, яка складається із моделі динаміки ВВП, що описується нелінійним диференційним рівнянням 2-го порядку, яке було одержано із неокласичної моделі росту Солоу, та модифікованої ВФ типу Кобба—Дугласа із урахуванням часових лагів, і яка доповнена інвестиційною моделлю (у вигляді диференційного рівняння 1-порядку), що відповідає середньостроковим технологічним циклам. Модель дозволяє сумісно описувати середньострокові циклічні коливання, накладені на трендову складову, оцінювати тривалість циклів.

В якості параметру управління в моделі виступає зміна попиту, що через ланцюги позитивних і негативних зворотних зв'язків спричиняє виникнення циклічних коливань.

Підсумовуючи, зауважимо, що побудовану модель можна використовувати як складову в системі інших моделей для варіантних розрахунків прогнозованого значення ВВП, моделювання економічних циклів і визначення ймовірних моментів рецесії.

Література

1. *Акаев А. А., Пантин В. И.* Финасово-экономические кризисы и геополитические сдвиги: анализ и прогноз / Моделирование глобального, регионального и национального развития. — М.: ЛИБРОКОМ. — С. 68—108.

2. Кризис: альтернативы будущего / Антология под ред. Бузгалин А., Линке П. — М.: Культурная Революция, 2010. — 368 с.

3. *Сорос Д.* Первая волна мирового финансового кризиса. Промежуточные итоги. Новая парадигма финансовых рынков. — М.: Манн, Иванов и Фербер, 2010. — 272 с.

4. *Гринин Л. Е., Коротаев А. В.* Глобальный кризис в ретроспективе. Краткая история подъёмов и кризисов от Ликурга до Алана Гринспена. — М.: Либроком/URSS, 2009.

5. *Кондратьев Н. Д.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. — М.:Экономика, 2002. — 768 с.

6. *Шумпетер Й.* Теория экономического развития. — М.: Прогресс, 1982.

7. *Дубовский С. В.* Объект моделирования — цикл Кондратьева // Математическое моделирование. — 1995. — № 7/6. — С. 65—74.

8. *Акаев А. А.* Вывод общего уравнения макроэкономической динамики, описывающего совместное взаимодействие долгосрочного роста и деловых циклов // Доклады РАН. — 2007. — № 417/4. — С. 439—441.

9. *Суворов Н. В.* Методы и результаты макроэкономического анализа эффективности производства в реальном секторе отечественной экономики // Проблемы прогнозирования. — № 3. — 2008. — С. 3—17.

10. *Дунаев Б. Б.* Модель расчета валового внутреннего продукта как функции труда и капитала // Кибернетика и системный анализ. — № 1. — 2004. — С. 104—116.

11. *Дербенцев В. Д.* Аналіз середньострокових тенденцій економічного росту національної економіки за допомогою односекторної моделі // Моделювання та інформаційні системи в економіці. Зб. наук. праць. Вип. 80. — К.: КНЕУ, 2009. — С. 62—74.

12. *Шумська С. С.* Інструмент виробничої функції в дослідженні української економіки // Економіка та прогнозування. — № 4. — 2007. — С.104—123.

13. *Алєксєєв А. А., Алєксєєв Д. А.* Практичні моделі макроекономіки. — К.: Наукова думка, 2006. — 266 с.

14. *Накоряков В. Е., Гаснемо В. Г.* Математическая модель плановой экономики // Экономика и математические методы. — 2002. — Т. 38. — № 2. — С. 118—124.

15. *Дербенцев В. Д.* Моделювання складових валової доданої вартості національної економіки // Моделювання та інформаційні системи в економіці. Зб. наук. праць. Вип. 81. — К.: КНЕУ, 2010. — С. 144—150.

16. *Кобринский Н. Е., Майминас Е. З.*, Смирнов А. Д. Экономическая кибернетика. — М.: Экономика, 1982. — 408 с.

17. http://www.ukrstat.gov.ua/

Стаття надійшла до редакції 17.05.2013 р.