20. *Саати Т. Л.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Л. Саати. — М. : Радио и связь, 1993. — 320 с.

21. *Тимчасове положення* щодо визначення рейтингу науково-педагогічних працівників / Уклад. В. П. Головенкін, О. В. Савич. — К.: НТУУ «КПІ», 2009. — 12 с.

22. *Хотомлянский О.* Методичні питання оцінювання результатів професійної діяльності професорсько-викладацького складу вищого навчального закладу / О. Хотомлянский, Т. Дерев'янко // Наук.-практ. журн. «Освіта і управління». — Т. 9. — № 3—4. — 2006. — С. 144—151.

Стаття надійшла до редакції 20.10.2013 р.

УДК 517.9: 330.42

О. І. Неня, канд. фіз.-мат. наук,
доцент, кафедра вищої математики
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

ПРО УМОВИ ПЕРМАНЕНТНОЇ ПОВЕДІНКИ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ ПІДПРИЄМСТВА

АНОТАЦІЯ. В публікації досліджено проблему побудови умов перманентної поведінки динамічної моделі розвитку підприємства в умовах наявності кредитних ресурсів і короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна система, імпульсне диференціальне рівняння, нелінійне запізнення, перманентність.

АННОТАЦИЯ. В публикации исследуется проблема построения условий перманентности динамической модели развития предприятия в условиях кредитирования, а также при кратковременных внешних воздействий на производство.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамическая система, импульсное дифференциальное уравнение, нелинейное запаздывание, перманентность.

ANNOTATION. In article we analyse the problem of studying the conditions of permanence of the dynamic model of enterprise development in the conditions of crediting and of external influences on the production.

Keywords: dynamical system, impulsive differential equetion, nonconstant delay, permanence.

Постановка задачі. У даній роботі досліджується рівняння динамічної моделі розвитку підприємства при наявності кредитування та короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво.

© О. І. Неня, 2013

Аналогічна модель розглядається в публікаціях [1], [2] і описується рівнянням

$$A'(t) = -a(t)A(t) + c(t)R(g(t)) + I(t), \qquad (1)$$

де $A(t)$ — вартість основних виробничих фондів, $a(t)$ — темп вибуття основних фондів, інвестування коштів відбувається за рахунок кредитних ресурсів $I(t)$, та деякої частини $c(t)$ чистого прибутку $R(g(t))$, який залежить від попередніх станів динамічної системи.

Якщо чистий прибуток $R(g(t))$ прямопропорційно залежить від фондів $A(g(t))$ з коефіцієнтом пропорційності q, а вартість основних виробничих фондів $A(t)$ в певні моменти часу імпульсивно змінюється на величину $b_k > -1$ та $\beta_k \geq 0$, то рівняння (1) запишеться у вигляді імпульсного диференціального рівняння із запізненням

$$A'(t) = -a(t)A(t) + c(t)qA(g(t)) + I(t), \quad t \neq t_k, \qquad (2)$$

$$A(t_k + 0) = (1 + b_k)A(t_k) + \beta_k, \quad t = t_k, \qquad (3)$$

де $A(t) \geq 0$, $a(t)$, $c(t)$, $g(t)$, $I(t)$ — додатнозначні, кусково-неперервні, обмежені функції, $g(t) < t$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sup(t - g(t)) < \infty$.

Виходячи з економічної інтерпритації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (2), (3). Тому початкові умови задаються так:

$$A(\theta) = \varphi(\theta) \geq 0, \ \ \theta \leq 0, \ \varphi(0) > 0. \qquad (4)$$

Використовуючи метод кроків, легко перевірити, що розв'язки початкової задачі (4) для рівняння (2), (3) існують при всіх $t > 0$.

Метою даної роботи є знаходження умов перманентності рівняння (2), (3). Умова перманентності має на увазі таку властивість розв'язків рівняння (2), (3), яка забезпечує його обмеженість зверху та знизу, але при цьому вимагає щоб розв'язок залишався постійно додатним. У сенсі даної моделі це означає, що вартість основних виробничих фондів $A(t)$ має бути величиною обмеженою $A(t) \leq M$, що є природньо, але в той же час вар-

тість даних фондів ніколи не опуститься нижче певної додатної величини $0 < m \le A(t)$.

Допоміжні результати

За допомогою імпульсних диференціальних рівнянь із запізненням можна описати процеси, які, з одного боку, залежать від того що відбувалося в попередні моменти часу, а з іншого, зазнають короткострокових змін, тривалість яких є дуже незначною. Важливу роль у розвитку математичної теорії імпульсних рівнянь відіграла монографія А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [3]. Протягом останніх років з'явилась низка монографій і публікацій по темі імпульсних рівнянь [4—6], які продовжують дослідження в даній області.

Розглянемо функіонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією аналогічне рівнянню (2), (3):

$$x'(t) = c(t)x(g(t)) - a(t)x(t) + f(t), \quad t \ne t_k, \tag{5}$$

$$x(t_k + 0) = (1 + b_k)x(t_k) + \beta_k, \quad t = t_k, \tag{6}$$

де $c(t)$, $a(t)$, $g(t)$, $f(t)$ — додатні, кусково-неперервні, обмежені функції, $g(t) < t$, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sup(t - g(t)) < \infty$, $b_k \ge -1$, $\beta_k \ge 0$, послідовність точок імпульсної дії задовольняє умови $t_1 > 0$, $t_k - t_{k-1} > 0$, $k \in Z^+$, функції $x(t)$ неперервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ і існують границі $\lim\limits_{t\to t_j+0} x(t) = x(t_j + 0) < \infty$.

Під розв'язком рівняння (5), (6) розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє рівняння (5) майже скрізь, а також задовольняє умови імпульсів (6).

Початкові умови задаються таким чином:

$$x(\theta) = \varphi(\theta) \ge 0, \quad \theta \le 0, \quad \varphi(0) > 0. \tag{7}$$

Аналогічно до рівняння (2), (3), використовуючи метод кроків, можна перевірити, що розв'язки початкової задачі (7) для рівняння (5), (6) існують при всіх $t > 0$.

Означення 1. Рівняння (5), (6) називається перманентним, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку $x(t)$ з додатними початковими значеннями (7) виконуються нерівності:

$$\lim_{t\to+\infty}\inf x(t)\ge m_0\,,\qquad \lim_{t\to+\infty}\sup x(t)\le M_0\,.$$

Введемо в розгляд нерівності з імпульсною дією:

$$y'(t)\le c(t)y(g(t))-a(t)y(t)+f(t), \tag{8}$$

$$y(t_k+0)=(1+b_k)y(t_k)+\beta_k$$

$$w'(t)\ge c(t)w(g(t))-a(t)w(t)+f(t)\,, \tag{9}$$

$$w(t_k+0)=(1+b_k)w(t_k)+\beta_k\,.$$

Лема 1. Нехай $a(t)\ge 0, c(t)\ge 0, g(t)$ — додатні кусково-неперервні функції. Тоді розв'язок рівняння (5), (7) додатний. Якщо $x(t)=y(t)=w(t),\ \ t\le 0$, тоді $y(t)\le x(t)\le w(t),\ \ t\ge 0,$ де $y(t)$ і $w(t)$ відповідно розв'язки нерівностей (8), (9).

Доведення. Позначимо

$$z(t)=x(t)\exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\}\prod_{0\le t_k<t}(1+b_k)^{-1}=x(t)\omega(t),$$

тоді підставивши $z(t)$ у (5), (6), маємо таке рівняння:

$$z'(t)=c(t)z(g(t))\exp\left\{\int_{g(t)}^t a(s)ds\right\}\prod_{g(t)\le t_k<t}(1+b_k)^{-1}+f(t)\omega(t),\ \ t\ne t_k$$

$$z(t_k+0)=z(t_k)+\beta_k\omega(t_k+0),\ \ t=t_k\,.$$

Звідки робимо висновок, що при додатних початкових умовах маємо $z'(t)\ge 0,$ тому функція $z(t)$ додатна і неспадна. Розв'язок $x(t)$ теж буде додатною функцією, оскільки знаки $x(t)$ і $z(t)$ співпадають.

Нехай маємо фундаментальну функцію $X(t,s)$ для рівняння (5) — (7), яка є його розв'язком при $t\ge s$ з початковими умовами $X(t,s)=0, t<s;\ \ X(s,s)=1,$ і тому $X(t,s)>0$ (див. [2]).

Позначимо $u(t)=x(t)-y(t),$ де $y(t)$ розв'язок нерівності (8). Тоді

$$u'(t)=c(t)u(g(t))-a(t)u(t)+\widetilde{f}(t),\quad u(t)=0,\quad t\le 0, \tag{12}$$

$$u(t_k+0)=(1+b_k)u(t_k),\quad t=t_k,$$

де $\widetilde{f}(t) \geq 0$.

Маємо такий розв'язок рівняння (12) (див. [2])

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,s)\widetilde{f}(s)ds .$$

Звідки $x(t) \geq y(t)$ при $t \geq 0$.

Аналогічно, якщо $u(t) = w(t) - x(t)$, де $w(t)$ розв'язок нерівності (9), отримуємо, що $u(t) \geq 0$ і тому $x(t) \leq w(t)$.

Лему доведено.

Основні результати

Теорема 1. Якщо виконуються нерівності

$$\sigma - c(t)\exp\left(\int_{g(t)}^{t} a(s)ds\right) + a(t) \geq \sigma_1 > 0 , \ \inf_t \omega(t) > 0 , \quad (13)$$

де $\sigma = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{0\leq t_k<t}(1+b_k) < \infty$, $\omega(t) = \prod_{0\leq t_k<t}(1+b_k)e^{-\sigma t}$, тоді маємо обмежений для всіх $t > 0$ розв'язок рівняння (5), (6).

Доведення.

З того, що $c(t)x(g(t)) \geq 0$ та $f(t) \geq 0$ маємо $\dot{x}(t) + a(t)x(t) \geq 0$. Для довільного t_0 отримуємо

$$x(t) \geq x(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right\}.$$

Якщо взяти $t_0 = g(t)$, то

$$x(t) \geq x(g(t))\exp\left\{-\int_{g(t)}^{t} a(s)ds\right\},$$

звідки

$$x(g(t)) \leq x(t)\exp\left\{\int_{g(t)}^{t} a(s)ds\right\}.$$

Використовуючи останню нерівність перетворимо рівняння (5) таким чином:

$$x'(t) = c(t)x(g(t)) - a(t)x(t) + f(t) \le$$

$$\le \left(c(t)\exp\left\{ \int_{g(t)}^{t} a(s)ds \right\} - a(t) \right) x(t) + f(t) = \delta(t)x(t) + f(t), \quad (14)$$

$$x(t_k + 0) = (1 + b_k)x(t_k) + \beta_k . \quad (15)$$

Розглянемо рівняння

$$y'(t) = \delta(t)y(t) + f(t), \quad t \ne t_k, \quad (16)$$

$$y(t_k + 0) = (1 + b_k)y(t_k) + \beta_k, \quad t = t_k, \quad (17)$$

для розв'язку якого за лемою 1 буде виконуваться нерівність $x(t) \le y(t)$.

Введемо заміну $y(t) = z(t)\omega(t)$. Тоді рівняння (16), (17) набуде такого вигляду

$$z'(t) = \left(\delta(t) - \sigma\right)z(t) + \frac{f(t)}{\omega(t)}, \quad t \ne t_k, \quad (18)$$

$$z(t_k + 0) = z(t_k) + \frac{\beta_k}{\omega(t_k + 0)} = z(t_k) + \beta_k^*, \quad t = t_k, \quad (19)$$

Рівняння (18), (19) має такий розв'язок

$$z(t) = U(t,0)z(0) + \int_0^t U(t,s)\frac{f(s)}{\omega(s)}ds + \sum_{0<t_k\le t} \beta_k^* U(t,t_k),$$

де $U(t,s) = \exp\left(\int_s^t \left(\delta(\tau) - \sigma\right)d\tau \right) \le \exp\left(-\sigma_1(t-s)\right)$.

Тому

$$z(t) \le \exp\left(-\sigma_1 t\right)y(0) + \int_0^t \exp\left(-\sigma_1\left(t-s\right)\right)\frac{f(s)}{\omega(s)}ds +$$

$$+ \sum_{0<t_k\le t} \beta_k \exp\left(-\sigma_1(t-t_k)\right).$$

При виконанні умов теореми, враховуючи обмеженість функції $0 \le f(t) \le F$ та позначення $\omega^L = \inf_{t \in R} \omega(t)$, $\omega^M = \sup_{t \in R} \omega(t)$ розв'язок $z(t)$ буде обмеженим.

Дійсно

$$\limsup_{t\to\infty} z(t) \le z(0) \lim_{t\to\infty} \exp(-\sigma_1 t) + \frac{F}{\omega^L} \int_0^t e^{-\sigma_1 (t-s)} ds +$$
$$+ \sup_k \beta_k \lim_{t\to\infty} \sup \exp\left(-\sigma_1 \left(t - g(t)\right)\right) \le$$
$$\le \frac{F}{\omega^L \sigma_1} + \tilde{\beta} e^{-\sigma_1 h},$$

де $\tilde{\beta} = \sup_k \beta_k$, $h(t) = t - g(t)$, $0 < h \le h(t)$.

Тоді

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \le \limsup_{t\to\infty} y(t) \le \left(\frac{F}{\omega^L \sigma_1} + \tilde{\beta} e^{-\sigma_1 h} \right) \omega^M .$$

Теорему доведено.

Зауваження. Умови (13) теореми 1 не забезпечують обмеженість розв'язку $x(t)$ при $f(t) \equiv 0$, та $\beta_k \equiv 0$. В термінах динамічної моделі розвитку підприємства (2), (3) це означає, що при виконанні умови

$$\sigma - qc(t) \exp\left(\int_{g(t)}^t a(s) ds \right) + a(t) \ge \sigma_1 > 0,$$

та при відсутності інвестування коштів у виробництво за рахунок кредитних ресурсів $I(t) \equiv 0$ і відсутності позитивних зовнішніх впливів на систему коли $\beta_k \equiv 0$, вартість основних виробничих фондів $A(t)$ при даних умовах буде прямувати до нуля.

Теорема 2. Якщо виконується нерівність

$$\inf_t \left\{ a(t) - \sigma - c(t) e^{\sigma h(t)} \prod_{g(t) \le t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \right\} > 0 , \qquad (20)$$

де $\sigma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{0\le t_k<t} (1+b_k) < \infty$, $h(t) = t - g(t)$, то маємо додатний, обмежений знизу для всіх $t > 0$ розв'язок рівняння (5), (6).

Доведення.

При доведенні теореми скористуємося методикою представленою в публікації [7]. Функція $\omega(t) = \prod_{0\le t_k<t} (1+b_k) e^{-\sigma t}$ має $\omega^L = \inf_{t\in R} \omega(t)$, $\omega^M = \sup_{t\in R} \omega(t)$. Тоді рівняння (5), (6) заміною $x(t) = y(t)\omega(t)$ можна представити у вигляді

$$y'(t) = B(t)y(g(t)) - A(t)y(t) + f^*(t), \quad t \ne t_k \tag{21}$$

$$y(t_k + 0) = y(t_k) + \beta_k^*, \quad t = t_k, \tag{22}$$

де $A(t) = a(t) - \sigma$, $B(t) = c(t)e^{\sigma h(t)} \prod_{g(t)\le t<t} (1+b_k)^{-1}$, $\beta_k^* = \frac{\beta_k}{\omega(t_k+0)} \ge 0$, $f^*(t) = \frac{f(t)}{\omega(t)}$.

Позначимо через $y(t,\varphi)$ розв'язок рівняння (21), (22) з початковою функцією φ.

Доведемо, що існує $\tilde{m}_0 > 0$ таке, що

$$\liminf_{t\to\infty} y(t,\varphi) \ge \tilde{m}_0 \tag{23}$$

для всіх початкових функцій.

Враховуючи додатність імпульсних збурень, за теоремами порівняння достатньо розглянути рівняння (21) без імпульсної дії.

Припустимо, що (23) не виконується. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує розв'язок $y(t,\varphi_1)$ такий, що $\liminf_{t\to\infty} y(t,\varphi_1) < \varepsilon$.

Якщо $y'(t,\varphi_1) \ge 0$ для всіх $t \ge 0$, то розв'язок монотонний і обмежений. Тому існує $\lim_{t\to\infty} y(t,\varphi_1) = y_0$ і $\lim_{t\to\infty} y'(t,\varphi_1) = 0$.

Отже

$$\lim_{t\to\infty} \Big(B(t)y_0 - A(t)y_0 + f^*(t) \Big) = 0.$$

Рівність $y_0 = 0$ неможлива при виконанні умови (20). Тому $y_0 > 0$. У цьому випадку рівняння має додатну асимптотичну стійку нерухому точку $y_0 = \dfrac{f^*(t)}{A(t) - B(t)}$.

Нехай розв'язок буде немонотонним. Тоді існує послідовність $\{\tau_k\}$ така, що $y(\tau_k, \varphi_1) < \varepsilon$ та $y'(\tau_k, \varphi_1) = 0$, якщо $\tau_k \neq t_j$, і $y'(\tau_k, \varphi_1) \leq 0$ якщо $\tau_k = t_j$, де t_j — точки імпульної дії. Тоді

$$B(\tau_n) y(g(\tau_n)) - A(\tau_n) y(\tau_n) + f^*(\tau_n) \leq 0,$$

тому

$$y(g(\tau_n)) \leq \frac{A(\tau_n) y(\tau_n) - f^*(\tau_n)}{B(\tau_n)} \leq \frac{A(\tau_n)\varepsilon - f^*(\tau_n)}{B(\tau_n)}.$$

Нехай $y = \nu\varepsilon$, тоді $\nu \in (0,1)$, якщо $\varepsilon < \varepsilon^* = \inf\limits_t \left(\dfrac{f^*(t)}{A(t) - B(t)} \right)$. Тому $y(g(\tau_n)) \leq \nu\varepsilon$. Якщо $y'(g(\tau_n)) \leq 0$, то

$$y(g(g(\tau_n))) \leq \frac{A(g(\tau_n))\nu\varepsilon - f^*(g(\tau_n))}{B(g(\tau_n))}$$

і

$$y(g(g(\tau_n))) \leq \nu^2 \varepsilon.$$

Якщо $y'(g(\tau_n)) > 0$, виберемо першу зліва від $g(\tau_n)$ точку θ_1, де $y'(\theta_1, \varphi_1) \leq 0$.

Продовжуючи аналогічно, отримуємо послідовність точок $\{\theta_k\}$ таку, що $y(\theta_k, \varphi_1) \leq \nu^k \varepsilon$. Нехай $\widetilde{\varphi}_1 = \inf\limits_{\theta \in [g(0),0]} \varphi_1(\theta)$. Виберемо k_1 так, що $\nu^{k_1} \varepsilon < \widetilde{\varphi}_1$. Вибираючи досить велике τ_n за початкове з нескінченної послідовності $\{\tau_n\}$, отримуємо, що існує θ_k таке, що $y(\theta_k, \varphi_1) \leq \nu^k \varepsilon < \widetilde{\varphi}_1$. Отримуємо суперечність вибору числа $\widetilde{\varphi}_1$. Якщо початкова функція $\varphi_1(\theta)$ не відділена від нуля, то як почат-

кову функцію будемо розглядати розв'язок $y(t,\varphi_1)$, $t \in \left[0, g^{-1}(0)\right]$ який є строго додатним за лемою 1.

В якості числа $\widetilde{m}_0$ для розв'язків рівняння (21), (22) можна вибрати число ε^*. Відповідно, в якості m_0 для розв'язків рівняння (5), (6) можна вибрати число $\omega^L \varepsilon^*$.

Теорему доведено.

Висновки. У статті розглянуто динамічну модель розвитку підприємства в умовах кредитування та при дії короткотривалих зовнішніх впливів на виробництво, побудовано функціонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією та змінним запізненням, яке описує дану модель. Отримано умови перманентності розв'язку рівняння, які забезпечують додатність та обмеженість розв'язку зверху та знизу, та вказують на те, що вартість основних виробничих фондів $A(t)$ є величина обмежена, але ніколи не опуститься нижче певної додатної величини.

Література

1. *Неня О.І.* Умови перманентної поведінки нелінійної моделі розвитку підприємства // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — К., 2012. — № 86. — С. 207—217.
2. *Неня О.І.* Розв'язок функціонально-диференціального рівняння динамічної моделі розвитку підприємства // Формування ринкової економіки. — 2011. — № 6. — С. 388—396.
3. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. — World Scientific, Singapore, 1995. — 462 p.
4. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. — Longman, Harlow. — 1993. — 245 p.
5. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Systems with Impulse Effect. — Ellis Horwood, Chichester. — 1989. — 256 p.
6. *Lakshmikantham V., Bainov D.D. Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapure: World Scientific, 1989. — 273 p.
7. *Мисло Ю. М., Ткаченко В.І.* Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі–Гласса з імпульсною дією // Нелінійні коливання. — 2011. — Т. 14, № 4, — С. 507—515.

Стаття надійшла до редакції 21.11.2013 р.