

*Ю.В. Ігнатова*, ст. викладач  
кафедри економіко-математичного моделювання,  
*Л.В. Іващенко*, аспірант кафедри вищої математики,  
ДВНЗ «Київський національний економічний  
університет ім. Вадима Гетьмана

## **ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗЕРНОПЕРЕРОБНИМ ПІДПРИЄМСТВОМ З УРАХУВАННЯМ СИСТЕМНИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

*Анотація. В статті розглядаються прикладні аспекти однієї моделі розробленої на основі теорії масового обслуговування в агропромисловому секторі, а саме модель роботи елеватора. Використання такої моделі дозволило отримати оптимальні ситуаційні характеристики для прийняття рішень в умовах невизначеності, а також значно підвищити ефективність роботи системи в цілому.*

*Ключові слова: вимога, вхідний потік, час обслуговування, математична модель СМО.*

*Аннотация. В статье рассматриваются прикладные аспекты одной модели разработанной на основе теории массового обслуживания в агропромышленном секторе, а именно модель работы элеватора. Использование такой модели позволило получить оптимальные ситуационные характеристики для принятия решений в условиях неопределенности, а также значительно повысит эффективность работы системы в целом.*

*Ключевые слова: требование, входной поток, время обслуживания, математическая модель СМО.*

*Annotation. The article deals with practical aspects of a model developed based on queuing theory in the agricultural sector, namely the model of the elevator. The use of this model allowed us to obtain optimal situational characteristics for decision making under uncertainty, and significantly improve the efficiency of the whole system.*

*Keywords: requirement, input stream of requirements, service time, mathematical model of queueing theory.*

**Вступ.** За останні 10 років Україна стала одним із світових лідерів з виробництва та експорту зернових. Сприятливі погодні умови 2008—2010 рр. дозволили зібрати рекордні врожаї — більше 53 млн тонн у 2008 р., та 49 млн тонн і більше 45 млн тонн у 2009—2010 рр. відповідно.

Найважливішим питанням після збору врожаю є питання збереження та експорту зерна. Внутрішні потреби України складають 26—27 млн тонн та не менше 23—27 млн тонн підлягає експорту. Більше 90 % експортного потоку зернових з України

відвантажуються морським транспортом (насіпом). Для експорту використовуються портові зернові елеватори (термінали). «Основними чинниками, які визначають вибір порту та елеватора є вартість та терміни перевалювання зернових, вартість проводки судна в акваторію порту, тарифи на фумігацію судна та зерна, вартість та строки оформлення судової документації та документації на вантаж» [5, с. 47—49].

**Постановка проблеми.** Метою даної роботи є розробка математичної моделі, яка імітує процес функціонування зернового елеватора (термінала) задля одержання основних операційних характеристик підприємства, а саме вартості та термінів перевалювання зернових. Причому, при побудові адекватної моделі управління елеватором необхідно максимально враховувати технологічні особливості функціонування підприємств зернопереробної підгалузі, а саме переміщення зерна відповідними виробничими маршрутами, які забезпечать завчасну оцінку та подальше корегування діяльності зернопереробного підприємства на кожній виробничій фазі.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблеми розвитку зернопереробного підкомплексу розглядаються у працях В.І. Бойка, О.Ю. Єрмакова, О.В. Захарчука, І.В. Кобути, М.Г. Лобаса, П.М. Макаренка, Л.О. Мармуль, В.Я. Месель-Веселяка, П.Т. Саблука, В.П. Ситника, Л.М. Худолій, І.І. Червена, та інших. Але, незважаючи на вагомі розробки в даній сфері, питання ефективного функціонування зернопереробного підкомплексу має базуватись на новітніх дослідженнях та враховувати зміни у функціонуванні агропромислового комплексу.

**Виклад основного матеріалу.** Представимо наступну двофазову модель роботи елеватора, яка представляє собою фази прийому і попереднього очищення зернових однієї культури, що надходить двома потоками: один потік, пріоритетний, надходить на фазу розвантаження на три автомобілерозвантажувачі, а після цього на фазу попереднього очищення. Інший потік, непраіоритетний, (вже розвантажене зерно) надходить лише на фазу попереднього очищення.

Інтенсивність надходження пріоритетного потоку, який потребує дві фази обслуговування (прийом і попереднє очищення) має пуассонівський закон розподілу ймовірностей з параметром  $\lambda_1$  т/год. Надходження непраіоритетного потоку на фазу попереднього очищення має пуассонівський закон розподілу ймовірностей з параметром  $\lambda_2$  т/год. Докладніше, роботу елеватора представлено на рис. 1.

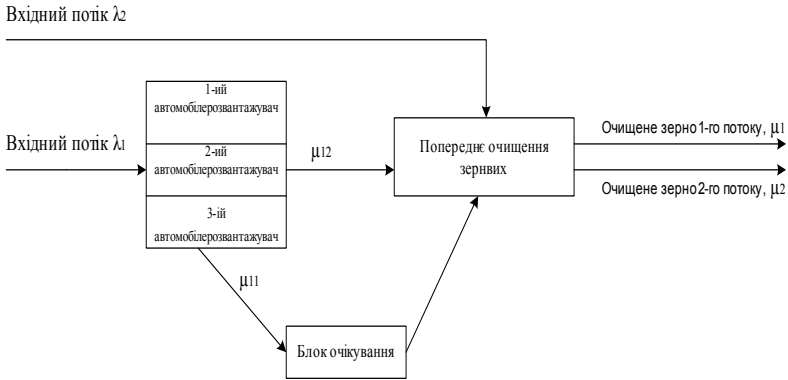


Рис. 1. Схема роботи елеватора

Представлена модель має один канал обслуговування і при цьому дисципліна обслуговування є FIFO, але кількість вимог, що обслуговуються обмежується обсягом блоку очікування, в якому вони перебувають, чекаючи своєї черги до каналу обслуговування. Ті вимоги першого потоку зернових, що знаходяться в блоці очікування (пройшли першу фазу обслуговування) користуються пріоритетом перед вимогами, які не пройшли першої фази. Число в блоці повинно не перевищувати числа  $M_1 = M + i + k \leq 4$ . Максимальна кількість черги для другого, неперіоритетного, потоку  $N_1 = N + j \leq 5$ . Інтенсивність обслуговування на першій та другій фазах має експоненціальний закон розподілу ймовірностей з параметрами  $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_1, \mu_2$  т/год. зернових. Причому:

- $\mu_{11}$  — інтенсивність обслуговування на першій фазі, де відбувається розвантаження зернових пріоритетного потоку і перехід в блок очікування, в тому випадку, якщо друга фаза обслуговування є зайнятою;

- $\mu_{12}$  — інтенсивність обслуговування на першій фазі, де відбувається розвантаження зернових пріоритетного потоку і перехід на другу фазу попереднього очищення зернових, в тому випадку, коли друга фаза обслуговування є вільною, користуючись при цьому правом пріоритетності по відношенню до потоку із параметром  $\lambda_2$ ;

- $\mu_1$  — інтенсивність обслуговування пріоритетного потоку на другій фазі, при якому розвантажене на першій фазі зерно пройшло процедуру попереднього очищення та покинуло систему;

—  $\mu_2$  — інтенсивність обслуговування неперіоритетного потоку на другій фазі, при зерно пройшло відразу на другу фазу обслуговування, успішно очистилось та покинуло систему.

Конкретна модель бізнес-процесів підприємства (елеватора) розроблена як система диференційних рівнянь має вигляд (1):

$$P'_{0,0(0,0)}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{0,0(0,0)}(t) + \mu_2 P_{0,0(0,1)}(t) + \mu_1 Q_{0,0(0,0)}(t)$$

$$P'_{0,0(1,0)}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{0,0(1,0)}(t) + \lambda_2 P_{0,0(0,0)}(t) + \mu_2 P_{1,0(0,1)}(t) + \mu_1 Q_{1,0(0,1)}(t) + \mu_1 R_{0,0(1,0)}(t)$$

$$P'_{1,0(0,1)}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_{1,0(0,1)}(t) + \lambda_2 P_{0,0(0,1)}(t) + \mu_2 P_{2,0(0,1)}(t) + \mu_1 Q_{2,0(0,1)}(t)$$

$$R'_{0,0(1,0)}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_{12})R_{0,0(1,0)}(t) + \lambda_1 P_{0,0(0,0)}(t) + \mu_2 P_{0,0(1,1)}(t) + \mu_1 Q_{0,0(1,1)}(t)$$

$$R'_{0,1(3,0)}(t) = -(\lambda_2 + 3\mu_{12})R_{0,1(3,0)}(t) + \lambda_1 R_{0,0(3,0)}(t) + \mu_2 P_{0,1(3,1)}(t) + \mu_1 Q_{0,1(3,1)}(t)$$

$$Q'_{0,0(0,1)}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)Q_{0,0(0,1)}(t) + \mu_2 P_{0,0(0,1)}(t) + \mu_1 Q_{0,0(0,1)}(t) + \mu_{12} R_{0,0(1,0)}(t)$$

$$Q'_{4,0(3,1)}(t) = -(\lambda_1 + 3\mu_{11} + \mu_1)Q_{4,0(3,1)}(t) + \lambda_2 Q'_{3,0(3,1)}(t) + \lambda_1 Q_{4,0(2,1)}(t) + \mu_1 Q_{4,0(3,1)}(t) + \mu_2 P_{4,0(3,1)}(t)$$

$$Q'_{4,1(3,1)}(t) = -(3\mu_{11} + \mu_1)Q_{4,1(3,1)}(t) + \lambda_2 Q'_{3,1(3,1)}(t) + \lambda_1 Q_{4,0(3,1)}(t)$$

$$Q'_{1,1(3,1)}(t) = -(\lambda_2 + 3\mu_{11} + \mu_1)Q_{1,1(3,1)}(t) + \lambda_2 Q'_{0,1(3,1)}(t) + \lambda_1 Q_{1,0(3,1)}(t)$$

$$Q'_{2,1(3,1)}(t) = -(\lambda_2 + 3\mu_{11} + \mu_1)Q_{2,1(3,1)}(t) + \lambda_2 Q'_{1,1(3,1)}(t) + \lambda_1 Q_{2,0(3,1)}(t)$$

В моделі (1):

$Q_{N, M(i,1)}(t)$  — імовірність обслуговування пріоритетного потоку зернових, при цьому в системі в момент часу  $t$  перебуває в черзі  $N$  вимог другого, непріоритетного, потоку,  $M$  вимог першого, пріоритетного, потоку і елеватор обробляє вимоги пріоритетного потоку, як на першій, так і на другій фазах.

$P_{N, M(i,1)}(t)$  — імовірність обслуговування непріоритетного потоку зернових на другій фазі, при цьому в системі в момент часу  $t$  перебуває в черзі  $N$  вимог другого, непріоритетного, потоку,  $M$  вимог першого, пріоритетного, потоку і елеватор обробляє на першій фазі вимоги першого потоку, а на другій фазі – вимоги другого потоку.

$R_{0, M(i,0)}(t)$  — імовірність обслуговування зернових тільки пріоритетного потоку, при цьому в момент часу  $t$  елеватор обробляє на першій фазі вимоги пріоритетного потоку, а вимоги непріоритетного потоку в системі відсутні.

Так наприклад:

$P_{0,0(0,0)}(t)$  — імовірність того, що в момент часу  $t$  на переробку не надійде жодної вимоги першого та другого потоків, тобто елеватор простоюватиме.

Так наприклад:

$Q_{0,0(0,1)}(t)$  — імовірність того, що в момент часу  $t$  елеватор обслуговує на другій фазі вимоги пріоритетного потоку, в черзі вимоги відсутні.

$R_{0,0(3,0)}(t)$  — імовірність того, що в момент часу  $t$  елеватор обслуговує на другій фазі вимоги пріоритетного потоку, в черзі вимоги відсутні.

Стохастичну модель (1), яка працює в реальному масштабі часу, можна представити у векторно-матричній формі:

$$\frac{d\bar{P}(t)}{dt} = A\bar{P}(t) \quad (2)$$

$$\text{де } \vec{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{0,0(0,0)}(t) \\ R_{0,0(1,0)}(t) \\ Q_{2,1(3,1)}(t) \end{pmatrix} \text{ — вектор ймовірностей станів підприємства}$$

в момент часу  $t$ ;

$A$  — квадратна матриця, елементи якої  $a_{ij}$  є сталими величинами, які визначаються параметрами системи  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_1, \mu_2$ . Елементи  $a_{ii}$  головної діагоналі матриці є найбільш вагомими за своїм числовим значенням порівняно із іншими недіагональними елементами і мають від'ємний знак. Недіагональні елементи цієї матриці  $a_{ij}$  можуть дорівнювати  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_1, \mu_2$  або нулю. При цьому нульові елементи кожного рядка матриці становлять більшість.

У стаціонарному режимі роботи ( $t \rightarrow \infty$ ) система (1) переходить в однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\vec{P} = 0, \quad (3)$$

яка має безліч розв'язків. Якщо, до (3), додамо умову нормування, то дістанемо лінійну систему неоднорідних рівнянь яка має ненульові розв'язки.

$$\begin{cases} A\vec{P} = 0 \\ \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} P_{N,M(i,1)}(k) + \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} Q_{N,M(i,1)}(k) + \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} R_{0,M(i,0)}(0) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо основні операційні характеристики роботи системи:

– загальне завантаження системи буде  $\rho = 1 - P_{0,0(0,0)}(0)$ ;

– відсоток завантаження системи вимогами 1-го потоку визначається як:

$$\rho_1 = \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} P_{N,M(i,1)}(k) + \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} Q_{N,M(i,1)}(k) + \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} R_{0,M(i,0)}(0)$$

– відсоток завантаження елеватора вимогами другого потоку:

$$\rho_2 = \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} P_{N,M}^{(i,1)}(k)$$

– середня сподівана кількість зернових культур першого, пріоритетного, потоку буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} M_1 = & \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} (M+i+k) P_{N,M}^{(i,1)}(k) + \\ & + \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} (M+i+k+1) Q_{N,M}^{(i,1)}(k) + \\ & + \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} (M+i) R_{0,M}^{(i,0)}(0) \end{aligned}$$

– середня сподівана кількість зернових культур другого, не-пріоритетного, потоку буде дорівнювати:

$$M_2 = \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} (N+1) P_{N,M}^{(i,1)}(k)$$

– дисперсія для зернових культур першого потоку дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} D_1 = & \left( \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} (M+i+k)^2 P_{N,M}^{(i,1)}(k) + \right. \\ & + \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} (M+i+k+1)^2 Q_{N,M}^{(i,1)}(k) + \\ & \left. + \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} (M+i)^2 R_{0,M}^{(i,0)}(0) \right) - M_1^2 \end{aligned}$$

– дисперсія для зернових культур другого потоку дорівнюватиме:

$$D_2 = \sum_{N=0}^{N_1} \sum_{M=0}^{M_1} \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{k=0}^{m_1-m-i} (N+1)^2 P_{N,M}^{(i,1)}(k) - M_2^2$$

Встановимо початкові умови. Нехай  $\lambda_1 = 10/60$  т/год. зернових,  $\lambda_2 = 20/60$  т/год.,  $\mu_1 = 20/60$  т/год.,  $\mu_2 = 40/60$  т/год.,  $\mu_{11} = 20/60$  т/год.,  $\mu_{21} = 20/60$  т/год. зернових.

Розподіл ймовірностей при відповідних вхідних параметрах наведено на рис. 2.

### Розподіл імовірностей в залежності від стану системи

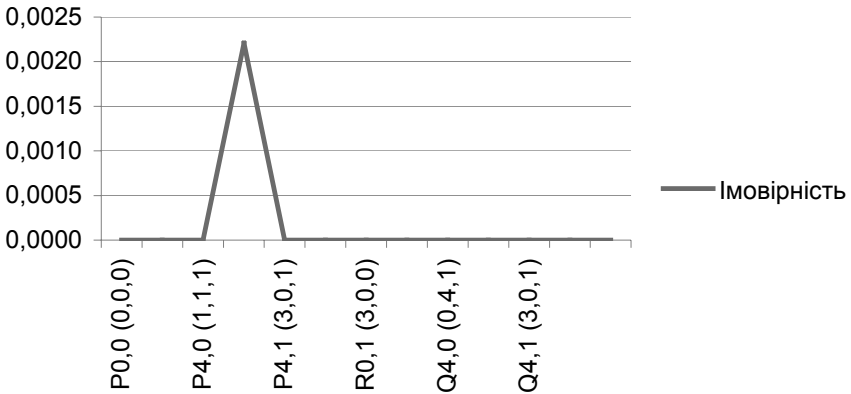


Рис. 2. Розподіл ймовірностей в залежності від стану системи

Тоді, розглянемо основні системні характеристики роботи елеватора.

Так в момент часу  $t$  на елеваторі знаходиться  $M_1 = 1,841$  т зернових першого потоку та  $M_2 = 0,806$  т зернових другого потоку. Причому  $D_1 = 2,057$ ,  $D_2 = 2,143$ , тобто в момент часу  $t$  на елеваторі знаходиться  $M_1$  та  $M_2$  тонн зернових з відхиленням  $\sigma_1 = 1,434$  т для пріоритетного потоку та  $\sigma_2 = 1,464$  т зернових для непраіоритетного.

Варіація зернових, що знаходяться на елеваторі в момент часу  $t$  становить  $CV_1 = 0,779$  та  $CV_2 = 1,816$ .

**Висновки.** Серед моделей що використовуються для прогнозування процесів діяльності агропромислового сектора найбільш привабливими є СМО. Їх особливістю є те, що в кожному випадку необхідно розробляти окрему унікальну модель для конкретного підприємства. В даній статті було запропоновано модель,



яка дозволяє дослідити вузькі місця роботи сільськогосподарського підприємства (елеватора). Враховуючи отримані результати можна оцінити основні характеристики бізнес-процесів системи. Показники ефективності діяльності сільськогосподарського підприємства можна розрахувати різноманітними методами, які мають статичний і динамічний характер. Найбільш привабливими є динамічні показники, адже вони характеризують діяльність підприємства в часі. Запропонована вище модель дозволяє розрахувати основні показники роботи системи в часі у вигляді математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення, на базі яких можна легко отримати будь-які показники ефективності роботи підприємства. А отже використовуючи запропоновану вище модель роботи елеватора можна здійснити ймовірнісний прогноз ефективності роботи елеватора (кількість обробленої продукції та її вартість). На підставі здобутих операційних характеристик досліджуваних систем можна спрогнозувати їх поведіння в разі зміни основних параметрів  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ , а також оптимально організувати обслуговування вимог потоків, що надходять до системи. Використовуючи відповідні економічні критерії, можна також визначити економічну ефективність роботи цих систем протягом певного відрізка часу  $i$  в межах дозволеного керувати цією ефективністю.

### **Література**

1. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. 2-е изд., доп.— М.:Наука. Физматлит, 1996. — 400 с.
2. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С.* Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2002. — 226 с.
3. *Жлуктенко В.І., Бєгун А.В.* Стохастичні моделі в економіці: Монографія. — К.: КНЕУ, 2005. — 352 с.
4. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Советское радио; 1965. — 510 с.
5. *Савенко І.І.* Логістичний підхід в управлінні потоками зернозберігаючих підприємств. Теоретико-правовий та методологічний аспекти / І.І.Савенко: Наукове видання. — Одеса: Євротойз, 2008. — 272 с.

Стаття надійшла до редакції 21.11.2013 р.