

**Дербенцев В. Д. (V. Derbentsev),**  
канд. екон. наук, проф.  
**Овчаренко А. А. (A. Ovcharenko),**  
ст. викладач,  
ДВНЗ «Київський національний  
економічний університет імені Вадима Гетьмана»

## **МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДОВГОХВИЛЬОВИХ ЦИКЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ**

### **METHODOLOGICAL APPROACH OF THE RESEARCHING LONG-TERM ECONOMIC CYCLES**

**АНОТАЦІЯ.** Робота присвячена питанням дослідження та моделювання довгих хвиль Кондрат'єва. Побудовано компактну математичну модель циклічної динаміки, що описує траєкторію ВВП залежно від динаміки інвестицій, споживчого попиту та прибутку. Модель дозволяє сумісно описувати довгострокові циклічні коливання, накладені на трендову складову, оцінювати тривалість циклів.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** модель довгострокових економічних циклів, довгі хвилі в економіці, цикли Кондрат'єва.

**ANNOTATION.** Paper is devoted to researching and modeling of the long Kondratieff waves. Compact mathematical model of cyclical GDP dynamics which depends on the investment, consumer demand and income is constructed. The model allows for a coherent description of long-term cyclical fluctuations imposed on the trend, to evaluate the duration of cycles.

**KEYWORDS:** long-term economic cycles model, long Kondratieff waves, Kondratieff cycles.

**Вступ.** Довгі хвилі в економіці або «великі цикли кон'юнктури» почали аналізуватися економістами з середини XIX ст. Але найглибша системна концепція довгоперіодичних циклічних коливань економіки була запропонована М. Кондрат'євим у 20-х роках XX ст., який на підставі статистичного аналізу широкої емпіричної бази економічних індикаторів розвинених країн пов'язав механізм утворення довгих хвиль (тривалістю близько 50 років) не тільки з динамікою цін, але і з процесом накопичення капіталу, темпами зростання виробництва, динамікою інновацій, з постійною еволюцією економіки тощо. М. Кондрат'єв обґрунтував на цій основі концепцію ендегенного механізму довгих хвиль.

Необхідно зауважити, що й досі серед економістів немає однозначної позиції щодо самого факту існування довгих хвиль в

економіці. Так, зокрема, противники цієї теорії висувають тезу про те, що довгохвильові коливання не мають регулярного характеру та строгої періодичності, на відміну від середньострокових циклів Жугляра (або бізнес циклів), а зумовлені впливом деяких випадкових факторів, зовнішніх шоків, військових конфліктів тощо.

Серед прихильників теорії довгих циклів, у свою чергу, існують різні погляди щодо головних чинників, що їх спричиняють. Так, М. Кондрат'єв пояснював довгі хвилі на основі динаміки капітальних інвестицій [1], Й. Шумпертер пов'язував їх з хвилями технологічних інновацій [2], були спроби об'єднати інвестиційне та інноваційне пояснення *K*-хвильової динаміки в рамках єдиного теоретичного підходу [3].

Методологія дослідження довгих хвиль в економіці, прогнозування циклів і криз, що ґрунтується на ідеях Кондрат'єва, не отримала великого поширення у світовій економічній науці, що, зокрема, зумовлено значною тривалістю досліджуваних процесів. Наукові дослідження циклічного розвитку економіки були зосереджені переважно на аналізі та прогнозуванні коливань ділової активності на коротших часових інтервалах — як правило, від кількох років до десятиліть.

Тому, на відміну від середньострокових економічних циклів, проблемам моделювання та прогнозування довгих хвиль в економіці приділено значно менше уваги. До найважливіших у робіт у цьому напрямку можна віднести модель Меншикова-Клименко [4], модель Дубовського [5], модель Акаєва [6].

**Головною метою** цієї роботи є аналіз методологічних підходів дослідження довгих хвиль і розробка на цій основі компактної математичної моделі довгих економічних циклів.

**Основні результати.** Методологічна складність дослідження довгохвильових коливань обумовлена, зокрема, тим, що регулярні статистичні спостереження за обсягами виробництва, інвестицій, капіталу в порівнянні зі спостереженнями за рівнем цін та інших фінансових індикаторів було організовано із запізненням у кілька десятиліть або навіть століть. Навіть у найрозвиненіших країнах, за винятком Великобританії та Франції, початок наявних статистичних рядів відноситься до XIX ст.

Інша особливість дослідження довгих циклів в економіці полягає в тому, що наявність середньострокових і довгих хвиль у суспільно-економічному розвитку не скасовує його поступального, прогресивного характеру: йдеться про наявність двох складових цього процесу — поступальної та коливальної (хвилеподіб-

ної), які в результаті взаємодії описують реальну картину соціально-політичної та економічної динаміки.

Основною довгостроковою тенденцією є саме прогрес у галузі технологій, що має постійний характер і сприяє еволюції світової господарської системи. До інших довгострокових тенденцій можна віднести:

- збільшення загального обсягу виробництва (світового ВВП);
- зростання кількості населення;
- зростання антропогенного навантаження;
- виснаження природних ресурсів.

Тому, основним методом емпіричних досліджень динаміки такого типу є виділення трендів. За допомогою стандартних статистичних процедур підбираються параметри відповідної трендової функції, в якості якої використовують експоненційні, лінійні, поліноміальні, логістичні залежності тощо.

Аналіз літературних джерел свідчить, що з методологічної точки зору можна виділити два підходи щодо дослідження довгих хвиль [3–9].

**Перший** полягає у *статистичному аналізі наявної емпіричної бази з метою ідентифікації довгих хвиль*. Методи обробки статистичної інформації, що використовуються різними авторами для дослідження довгохвильових коливань, переважно ґрунтуються на застосуванні регресійного аналізу; спектрального аналізу; методу головних компонент.

При цьому, статистичні проблеми ідентифікації довгохвильових коливань можуть бути зведені в три групи:

– **проблема «тренду»**. Оскільки переважна більшість економічних показників має підвищувальну динаміку, необхідно відокремити довгохвильові коливання від тренда, точніше, від часової складової, що перевищує певну задану величину (наприклад, 60 років);

– **проблема «шуму»**. Для виділення довгих хвиль необхідно виключити вплив короткострокових змін досліджуваного показника, тобто коливань, пов'язаних з кон'юнктурними, випадковими чинниками, а також з циклами меншої тривалості;

– **проблема «існування»**. Після очищення часового ряду від «тренду» і «шуму» отриманий «очищений» показник повинен мати наочну коливальну динаміку з періодом близько 50 років (згідно з гіпотезою Кондрат'єва).

Таким чином, результати статистичного аналізу довгих хвиль знаходяться у сильній залежності від вибору статистичних показників, методів вилучення шуму та формування тренду.

**Інший підхід** базується на побудові економіко-математичної моделі в рамках певної теоретичної концепції, що пояснює механізм виникнення довгих хвиль. До найвідоміших теорій довгих хвиль можна віднести:

- інвестиційну теорію (М. Кондрат'єв, С. Кузнець);
- теорію економічного росту (модель Р. Солоу);
- інноваційну концепцію довгого циклу (Й. Шумпетер, Г. Менш);
- синтетичні теорії довгих хвиль (А. Акаєв).

Грунтовний аналіз класичних і сучасних теорій довгих хвиль проведено в роботах [7, 8].

В якості математичного інструментарію реалізації цього підходу переважно використовуються системи диференційних рівнянь. Так, циклічний характер економічної динаміки можна змодельовувати нелінійними моделями типу Лоткі-Вольтерра (наприклад, модель Гудвіна), або системою звичайних диференційних рівнянь із запізненням.

Розроблені математичні моделі в рамках цього підходу спрямовані на якісний аналіз циклічних коливань, на визначення їх ключових параметрів — тривалості циклу, характерних точок.

Одна з перших математичних моделей довгої хвилі Кондрат'єва була запропонована в роботі С. Меншикова і Л. Клименко [4]. Ця модель ґрунтується на інвестиційній теорії та описує пристосування запасів капіталу до обсягів виробництва і навпаки, а також їх реакції на зрушення в макроекономічних співвідношеннях, тобто критеріях ефективності, таких, як норма прибутку, фондовіддача тощо. Але ця модель є лінійною і тому не може описувати принципово нелінійний характер взаємодії основних макроекономічних факторів.

У роботі С. Дубовського [5] запропоновано досконалішу модель, у якій циклічний розвиток вбудовано в модель економічного зростання, яка доповнена інвестиційним рівнянням технологічних циклів. Модель С. Дубовського поєднує опис нерівноважного економічного зростання та нерівномірного технічного прогресу. Модель містить три диференційних рівняння: для ВВП, капіталу, середнього технологічного рівня, а також формальні описи двох гіпотез щодо поведінки темпу зростання зайнятості та коефіцієнту вибуття виробничих фондів.

Модель дозволяє проводити якісний аналіз розв'язків диференційного рівняння і точніше визначати періоди довгих хвиль, що відповідають циклам Кондрат'єва, а також ідентифікувати характерні точки, пов'язані з фазами підйому та спаду. При цьому в

моделі темпи середнього технологічного рівня залежать від змінної, що характеризує ефективність нових технологій, проте не обґрунтовано вибір адекватного вимірюваного показника цієї ефективності та виду цієї залежності.

У роботі А. Акаєва [6] наведено математичну модель, що описує механізм інноваційно-циклічного економічного розвитку Шумпетера–Кондрат'єва, яка, крім якісного аналізу впливу циклічних коливань на довгострокове зростання, дозволяє описати траєкторію руху ВВП. Особливістю моделі є використання як ендеогенних, так і екзогенних змінних.

Але запропонована модель ґрунтується на нелінійному диференційному рівнянні 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами та містить близько 10 параметрів, що значно ускладнює одержання аналітичних розв'язків та аналіз результатів.

### ***Побудова моделі***

Проведений аналіз свідчить, що при побудові моделі довгих хвиль необхідно враховувати, що основними особливостями економічних процесів є:

- прагнення ринкової економіки до рівноваги (це обумовлює хвилеподібні коливання біля тренду);
- наявність часових лагів (затримок) у реакції економіки на зміну зовнішніх і внутрішніх умов (що є причиною наявності циклів різного періоду);
- наявність позитивних зворотних зв'язків в економічних процесах (що в певних випадках призводить до нестійкості та розгортання лавиноподібних процесів).

Таким чином, суспільно-економічний розвиток являє собою складний рух, що містить у собі як тренди, так і різноперіодичні коливання та випадкові складові.

Отже, можна подати динаміку загального випуску в економіці у вигляді суперпозиції траєкторії результуючого руху випуску в традиційних галузях економіки (трендова складова) та траєкторії випуску інноваційних продуктів у нових галузях економіки (яка має хвилеподібний характер).

Трендову складову можна апроксимувати кривою логістичного типу, оскільки вона є результатом масової дифузії інноваційних технологій у старі традиційні галузі економіки. Друга складова, що має циклічний характер, є результатом зміни домінуючих технологій.

Враховуючи переваги та недоліки розглянутих моделей, ми взяли за основу запропоновану в роботі [10] компактну модель економічної динаміки, яка складається із моделі динаміки ВВП,

що описується нелінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку, яке було одержано із неокласичної моделі росту Солоу та модифікованої ВФ типу Кобба–Дугласа із урахуванням часових лагів.

Аналітично, блок моделі, що описує динаміку випуску має вигляд:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = A[K(t)]^\alpha [wL(t)]^\beta, \quad (1)$$

$$\theta_1 \frac{dY}{dt} + Y(t) = A[K(t)]^\alpha [wL(t)]^\beta, \quad (2)$$

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K}(t) = I(t) - \varepsilon K(t), \quad (3)$$

$$\theta_1 \frac{d^2 Y}{dt^2} + (1 - \beta) \frac{dY}{dt} - \alpha [f(t) - \varepsilon] Y(t) = 0. \quad (4)$$

Тут  $Y(t), C(t), I(t)$  — обсяги ВВП, споживання та інвестицій відповідно;  $(\theta_1)$  — часовий лаг впливу інвестицій на обсяг ВВП;  $A$  — показник, що враховує технічний прогрес;  $\alpha, \beta$  — коефіцієнти еластичності ВФ;  $K(t), wL(t)$  — вартість основних фондів та повна вартість праці відповідно.

Параметр  $(\varepsilon)$  характеризує норму амортизації основного капіталу,  $\delta$  характеризує питому вагу автономних інвестицій у ВВП;  $f(t)$  — функція питомої ваги інвестицій у обсягу основних фондів.

Якщо вважати в першому наближенні співвідношення між інвестиціями та капіталом постійним, то залежно від коренів характеристичного рівняння для (4) одержимо або експоненційні, або синусоїдальні траєкторії.

Розглянемо спосіб введення в модель економічного росту додаткового блоку, що дозволяє генерувати хвилеподібні коливання обсягів виробництва. В основі циклічного механізму розвитку економіки є процес накопичення основного капіталу (середньострокові цикли Жугляра тривалістю 7–10 років), який є нерівномірним і зміни технологічних укладів, пов'язаних із зміною домінуючих технологій (довгі хвилі Кондрат'єва з періодом близько 50 років).

Рушійною силою розширення виробництва є інвестиції в основний капітал, а їх джерелом — прибуток. Рішення щодо обсягу

інвестицій приймаються залежно від величини одержаного прибутку, або точніше швидкості її зміни. З одного боку, чим швидше зростає прибуток, тим більший стимул є інвестувати, а з іншого — надмірний обсяг інвестицій призведе до надмірного накопичення основного капіталу, перевиробництва, зниження попиту та цін, та як наслідок неповного завантаження виробничих потужностей.

Зменшення обсягу інвестицій сприяє зниженню сукупного попиту та прибутку. Зниження норми прибутку в свою чергу сприяє подальшому скороченню інвестицій, що ще більше загострює кризу, яка триває до тих пір, поки співвідношення між прибутком і капіталом не досягне такого рівня, коли знову з'явиться мотив до інвестування.

Тому будемо вважати, що інвестиції (індуковані інвестиції, обсяг яких зростає із збільшенням сукупного доходу або попиту) є лінійною функцією від прибутку та капіталу:

$$I(t) = aInc(t) - bK(t), \quad (5)$$

де  $I(t)$ ,  $Inc(t)$  та  $K(t)$  інвестиції, прибуток та основні фонди в році  $t$ ,  $a$  та  $b$  — параметри, при цьому зростання прибутку сприяє зростанню обсягу інвестицій, а зростання вартості основних фондів — навпаки.

Після диференціювання (5) по  $t$  з урахуванням (3) одержимо:

$$\frac{dI}{dt} = -b \left( I - \rho \frac{dInc}{dt} \right), \quad (6)$$

що є аналогічним до інвестиційного рівняння з акселератором для індукованих інвестицій, які визначаються динамікою ВВП.

Величина  $\bar{I} = -\rho \frac{dInc}{dt}$  є очікуваними інвестиціями, які пропор-

ційні швидкості зростання прибутку,  $\rho = \frac{a_i}{b_i}$  є коефіцієнтом акселерації.

Зміст акселератора полягає в тому, що зростаючий потік випуску  $\frac{dY}{dt} \geq 0$  (або прибутку  $\frac{dInc}{dt} \geq 0$ ) вимагає більшого обсягу капіталу, чим зумовлює додаткові «індуковані» інвестиції.

Розглянемо більш детально механізм побудови інвестиційної функції. Будемо вважати, що очікувані інвестиції є пропорційни-

ми поточному та лаговому значенню прибутку та лаговому значенню капіталу:

$$\bar{I}(t) = a_0 + a_1 Inc(t) + a_2 Inc(t-1) + a_3 K(t-1). \quad (7)$$

Якщо до правої частини цього рівняння додати та відняти доданки  $a_1 Inc(t)$  та  $a_3 K(t)$ , то після перетворень та заміни змінних одержимо неперервний аналог рівняння (7)

$$\bar{I}(t) = b_0 + b_1 Inc(t) + b_2 \frac{dInc}{dt} + b_3 K(t) + b_4 \frac{dK}{dt}. \quad (8)$$

Тепер якщо ввести запізнення між очікуваними та реальними інвестиціями, з урахуванням (3) одержимо:

$$\frac{dI}{dt} = -b (I - \bar{I}) = -\bar{b} \left( I - \left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 Inc + \bar{b}_2 \frac{dInc}{dt} + \bar{b}_3 K(t) \right) \right). \quad (9)$$

Будемо вважати також, що інвестиції залежать також від рівня завантаження виробничих потужностей:

$$\delta = \frac{Y(t)}{\bar{Y}(t)},$$

де  $\bar{Y}(t)$  — потенційний рівень ВВП, що визначається ВФ (1).

Тоді рівняння (9) буде мати вигляд:

$$\frac{dI}{dt} = -b (I - \bar{I}) = -\bar{b} \left( I - \left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 Inc + \bar{b}_2 \frac{dInc}{dt} + \bar{b}_3 K(t) \right) \right) + b_4 (\delta - \bar{\delta}). \quad (10)$$

Тут  $\bar{\delta}$  відповідає рівню завантаження виробничих потужностей, за яким очікувані інвестиції дорівнюють реальному.

Оскільки ми вважаємо, що прибуток є головною рушійною силою процесу інвестування та саме його зміна відіграє вирішальну роль у формуванні циклічного механізму, то модель має також містити в якості ендогенних змінних окрім складових ВВП за сферами кінцевого використання (ми виділяємо інвестиції та споживання), також розподіл ВВП за сферами утворення доходу:

$$Y(t) = T(t) + wL(t) + Inc(t). \quad (11)$$

Тут  $T(t)$ ,  $wL(t)$ ,  $Inc(t)$  податки та фонд оплати праці та прибуток відповідно.



Розглянемо тепер динаміку попиту. Будемо вважати, що очікуваний споживчий попит залежить від обсягу поточних доходів (прибутку та фонду заробітної плати) та швидкості зміни заробітної плати:

$$\bar{C}(t) = c_0 + c_1 Inc(t) + c_2 wL(t) + c_3 \frac{d(wL)}{dt}. \quad (12)$$

Реальний споживчий попит запізнюється від очікуваного зі швидкістю реакції  $c$  :

$$\frac{dC}{dt} = -c(C - \bar{C}) = -c \left( C - \left( c_0 + c_1 Inc(t) + c_2 wL(t) + c_3 \frac{d(wL)}{dt} \right) \right). \quad (13)$$

Щодо заробітної плати, то будемо вважати, що очікуваний фонд заробітної плати визначається поточним рівнем виробництва та швидкістю його зміни:

$$\bar{W}(t) = d_0 + d_1 Y(t) + d_2 \frac{dY}{dt}. \quad (14)$$

Тоді реальний обсяг заробітної плати, що постійно запізнюється щодо очікуваної буде дорівнювати:

$$\frac{d(wL)}{dt} = -g(wL - \bar{wL}) = -g \left( wL - \left( d_0 + d_1 Y(t) + d_2 \frac{dY}{dt} \right) \right). \quad (15)$$

Таким чином, модель циклу складається з рівнянь (1)–(4), що описують динаміку виробництва, інвестиційного рівняння (10), функції попиту (13) та рівняння для заробітної плати (15).

Для комп'ютерної реалізації моделі необхідно одержання аналітичних розв'язків рівняння (4), які можна знайти за допомогою методу Боголюбова–Мітропольського [11, 12]. Параметри рівнянь (7), (12) і (14) оцінюються МНК шляхом побудови відповідних функцій регресії.

**Висновки.** Побудована модель, окрім якісного аналізу впливу довгих хвиль на довгострокове зростання, дозволяє сумісно описувати довгострокові циклічні коливання, накладені на трендову складову, оцінювати тривалість циклів тощо. Модель також має невелику розмірність і піддається якісному та кількісному аналізу; що зумовлює «прозору» змістовну економічну інтерпретацію.

Сумісне застосування статистичних методів із нелінійними динамічними моделями та виробничими функціями окрім якісного аналізу довгострокових економічних циклів, дозволяє аналізувати вплив циклічних коливань на економічну динаміку у довгостроковій перспективі. Одним із шляхів вдосконалення цієї моделі, на наш погляд, може бути її інтеграція із моделями середньострокових циклів Жугляра.

Підсумовуючи, зауважимо, що подальше вдосконалення методології моделювання та прогнозування довгих економічних циклів і розробка на підставі модельних розрахунків заходів антициклічного регулювання дозволяє пом'якшувати кризові явища, проходити через несприятливі періоди зі значно меншими втратами, запобігати атракції економічної системи до критичних точок з непередбачуваною траєкторією розвитку.

### **Література**

1. Кондратьев Н. Д. Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения: избранные труды. — М.: Экономика, 2002.
2. Шумпетер Й. Теория экономического развития. — М.: Прогресс, 1982.
3. Акаев А.А., Садовничий В.А. О новой методологии долгосрочного циклического прогнозирования динамики развития мировой системы и России / Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики. — М.: ЛКИ, 2010 — С. 5–69.
4. Меньшиков С., Клименко Л. Длинные волны в экономике. Когда общество меняет кожу. — М.: Международные отношения, 1989. — 274 с.
5. Дубовский С.В. Объект моделирования — цикл Кондратьева // Математическое моделирование. — 1995. — № 7/6. — С. 65–74.
6. Акаев А.А. Вывод общего уравнения макроэкономической динамики, описывающего совместное взаимодействие долгосрочного роста и деловых циклов // Доклады РАН. — 2007. — № 417/4. — С. 439–441.
7. Mandel E., Long waves of capitalist development, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1980.
8. Фомина А. В. Циклы Кондратьева в экономике России: Монография / Международный фонд Н. Д. Кондратьева. — М., 2005. — 146 с.
9. Korotayev A., Tsirel S. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // *Structure and Dynamics* 4(1), 2010.

10.Дербенцев В. Д. Моделивання середньострокових економічних циклів // Моделивання та інформаційні системи в економіці: зб. наук. праць. — К.: КНЕУ, 2013. — № 88. — С. 234–243.

11.Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 501 с.

12.Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1985. — 377 с.

## **References**

1. Kondrat'ev N. D.. Bol'shye tsykly kon'iunktury y teoriya predvydeniya: yzbrannye trudy. — M., «Ekonomyka», 2002.

2. Shumpeter J. Teoriya ekonomicheskogo razvitiya. — M.: Prohress, 1982.

3. Akaev A.A., Sadovnychiy V.A. O novoy metodolohy dolhosrochnoho tsyklycheskoho prohnozyrovaniya dynamiky razvitiya mirovoj systemy y Rossyy / Prohnoz y modelyrovanye kryzysov y mirovoj dynamiky. — M.: LKY, 2010 — S. 5–69.

4. Men'shykov S., Klymenko L. Dlynnnye volny v ekonomyke. Kohda obschestvo meniaet kozhu. — M.: Mezhdunarodnye otnosheniya, 1989. — 274 s.

5. Dubovskiy S.V. Ob'ekt modelyrovaniya — tsykl Kondrat'eva // Matematicheskoe modelyrovanye. — 1995. — № 7/6. — S. 65–74.

6. Akaev A.A. Vyvod obsheho uravneniya makroekonomicheskoy dynamiky, opisyvaiuscheho sovmestnoe vzaymodejstviye dolhosrochnoho rosta y delovykh tsyklov // Doklady RAN. — 2007. — № 417/4. — S. 439–441.

7. Mandel E., Long waves of capitalist development, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1980.

8. Fomyna A. V. Tsykly Kondrat'eva v ekonomyke Rossyy: Monohrafiya / Mezhdunarodnyj fond N. D. Kondrat'eva. — M., 2005. — 146 s.

9. Korotayev A., Tsirel S. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008-2009 Economic Crisis // Structure and Dynamics 4(1), 2010.

10.Derbentsev V. D. Modeliuvannia seredn'ostrokovykh ekonomichnykh tsykliiv // Modeliuvannia ta informatsijni systemy v ekonomitsi: zb. nauk. prats'. — К.: КНЕУ, 2013. — № 88. — С. 234–243.

11.Boholiubov N.N., Mytropol'skiy Yu.A. Asymptoticheskiye metody v teoryi nelynejnykh kolebaniy. — M.: Nauka, 1974. — 501 s.

12.Moyseev N.N. Asymptoticheskiye metody nelynejnoj mekhanyky. — M.: Nauka, 1985. — 377 s.