

- пласта / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярошак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40) С. 32–36.
8. Бомба А. Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2012. – Вип.6. – С. 11 – 26.
9. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечкий – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.

пост.13.11.12

Адаптивный способ решения обратной задачи гравиразведки для двухкомпонентной среды

Т. П. КОЗИКОВА., П. С. СМОЛЯНСКИЙ

Криворожский национальный университет

Предложен способ решения некоторых типов обратных задач гравиразведки для среды, состоящей из двух компонентов, на основе адаптивного параллельного алгоритма.

Запропоновано спосіб вирішення деяких типів обернених задач гравиразведки для середовища, що складається з двох компонентів, на основі адаптивного параллельного алгоритму.

We propose a method for solving certain types of inverse problems of gravity for a medium consisting of two components, an adaptive parallel algorithm.

Проблема и ее связь с научными и практическими задачами. Гравиразведка является одним из старейших методов геофизики, предназначенных для обнаружения аномалий геологического строения, поиска полезных ископаемых, интерпретации геологических данных. Математические задачи гравиразведки относятся к теории обратных некорректных задач математической физики, методы решения которых бурно развиваются в настоящее время.

В математической физике (МФ) принято различать прямую и обратную задачу [1], хотя эти понятия еще не вполне формализованы. Обратными задачами обычно называют задачи восстановления структуры объектов по косвенным данным. Такие задачи возникают в тех случаях, когда внутреннее строение физического объекта недоступно прямому исследованию, в то время как косвенная информация о структуре объекта может быть получена, например, в виде измеренных физических полей, собственных или представляющих собой отклик объекта на заданное внешнее воздействие. На физическом уровне прямая задача МФ состоит в определении параметров физического поля по заданным первичным источникам этого поля. Примером прямой задачи может служить расчет электромагнитного поля в среде с известными характеристиками, расчет гравитационного поля по известному распределению плотностей и т.п. Для задач гравиразведки источниками являются аномалии плотности – рудное тело, пустоты и т.д. Обратная задача, чаще всего, состоит в определении первичных источников по известным физическим параметрам поля. Для геофизики более характерны именно обратные задачи, например, задача магниторазведки, то есть задача определения геометрии и глубины залегания рудного магнитного тела по известным значениям

напряженности магнитного поля. Важным примером является близкая к ней задача определения геометрии рудного тела по изменению силы тяжести вблизи него.

Обратные задачи почти всегда являются некорректно поставленными задачами. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах наиболее часто нарушается условие устойчивости решения. Как правило, решение обратных задач сводится к решению целого ряда прямых задач с изменяющимися параметрами.

Анализ предыдущих исследований. На современном этапе математического моделирования прямые задачи МФ получили удовлетворительное алгоритмическое и программное решение, хотя нельзя считать эту область исчерпанной [2, 8]. На этом основана возможность систематического решения обратных задач.

Потенциал современной вычислительной техники позволяет говорить о возможности все более глубокой обработки результатов измерений в рамках усложняющихся физических и математических моделей и извлечении принципиально качественно новой информации [3]. Это относится, прежде всего, к исследованиям структуры и состояния объектов по косвенной (измеряемой) информации. Проблема обработки данных с такой целью математически формулируется в виде обратных задач МФ, которые ставятся в рамках той или иной физической модели. В рамках функционального анализа эти задачи сводятся к решению операторных уравнений первого рода. Решение таких задач требует преодоления значительных математических и вычислительных трудностей [4]. Например, существование, единственность и устойчивость решения ряда конкретных физических задач не исследованы

[1]. Особенность обратных задач состоит в том, что они, как правило, некорректно поставлены в естественных классах. Вместе с тем, в ряде случаев для таких задач удается найти более узкие классы единственности и устойчивости, определяемые некоторыми условиями. Существование таких классов позволяет отнести некорректную задачу к числу условно корректных. Конструктивный учет дополнительных условий в применении к решению таких задач приводит к получению регуляризирующих алгоритмов их решения, не выводящих решения за пределы указанных классов.

Наиболее общий подход к задаче гравиразведки [2] приводит к уравнениям относительно пространственно распределенных источников во всей области гравитационных аномалий. Уравнения в таком случае наиболее естественно формулируются относительно плотности источников поля или расчетных векторов, по которым можно просто определить вектора поля. В общем виде решение прямой задачи гравиметрии в трехмерном случае [2] в точке наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от заданного материального тела D дается интегральным представлением потенциала:

$$V(x_0, y_0, z_0) = G \iiint_D \rho(x, y, z) \cdot dV / R \quad (1)$$

и его первых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} &= G \iiint_D (x - x_0) \cdot dV / R^3, \\ \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} &= G \iiint_D (y - y_0) \cdot dV / R^3, \\ \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} &= G \iiint_D (z - z_0) \cdot dV / R^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, G - гравитационная постоянная, $\rho(x, y, z)$ - известная плотность среды, D - область локализации источников гравитационных аномалий. Физический (2) - это проекция силы тяжести в точке наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от области D . Иногда ищутся значение и вторых производных гравитационного потенциала. В некоторых случаях рассматриваются двумерные задачи гравиметрии. Очевидно, в силу принципа суперпозиции, прямая задача гравиметрии может быть решена путем численного интегрирования для всех источников поля области D . Для простейших тел правильной формы получены аналитические выражения в элементарных функциях при условии постоянной или линейно меняющейся плотности $\rho(x, y, z)$ объема D [2, 5]. Поэтому для прямой задачи гравиразведки наиболее актуальным является вопрос эффективных алгоритмов вычисления (1) и (2), прежде всего, с помощью параллельных алгоритмов.

Однако, обратная задача гравиразведки отличается гораздо большей сложностью решения [2]. Наиболее простыми задачами гравиметрии являются задачи определения локализации рудных тел.

Обратные задачи гравиразведки типа рудных - это задачи [2], в которых носитель масс D , вносящих аномалии в гравитационное поле - совокупность конечных односвязных, попарно не пересекающихся объемов

$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, ограниченных жордановыми поверхностями.

По каждому из объемов D_i массы могут быть распределены с постоянной либо переменной плотностью.

В некоторых случаях рассматривается двумерное гравитационное поле, не зависящее от одной из координат, например, поле, создаваемое длинным цилиндром с плотностью масс, не меняющейся в направлении образующей цилиндра. Такие носители масс являются удобными абстракциями, приближенно описывающими поле реальных трехмерных гравитационных аномалий. В этом случае решение прямой задачи гравиметрии в точке наблюдения $M_0(x_0, z_0)$ от заданного материального тела S может быть получено с помощью интегрального представления потенциала:

$$V(x_0, z_0) = 2G \iint_S \rho(x, z) \cdot \ln(1/R) \cdot dS \quad (3)$$

и его первых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0, z_0)}{\partial x_0} &= 2G \iint_S \rho(x, z) \cdot (x - x_0) / R^2 \cdot dS, \\ \frac{\partial V(x_0, z_0)}{\partial z_0} &= 2G \iint_S \rho(x, z) \cdot (z - z_0) / R^2 \cdot dS. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - расстояние между текущей точкой $M(x, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, z_0)$, $\rho(x, z)$ - известная плотность среды, S - плоская область локализации источников гравитационных аномалий.

Обратная задача гравиразведки в наиболее важной для практики формулировке состоит в нахождении распределения плотностей масс по всему объему по гравитационному полю этих масс. Наиболее часто используются результаты измерений аномалий силы тяжести F_z в некоторой области T на достаточно густой сетке точек вне объема D в трехмерном или вне S в двумерном случае. Обычно эти измерения проводятся на поверхности земли. Такую задачу называют внешней обратной задачей гравиразведки. В дальнейшем будет рассмотрена именно внешняя задача.

Постановка задачи. Будем считать известными значения F_z в каждой точке области T за счет построения достаточно точных интерполяционных приближений. Требуется в этих условиях определить неизвестное распределение плотностей ρ во всей области D или S . Для этого следует решить многомерное, в общем случае, сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} &= G \cdot \int_V (z - z_0) \cdot \rho(x, y, z) / R^3 \cdot dV = \\ &= F_z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \quad (5)$$

для трехмерного случая и для двумерного случая -

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0, z_0)}{\partial z_0} &= 2G \cdot \int_S (z - z_0) \cdot \rho(x, z) / R^2 \cdot dS = \\ &= F_z(x_0, z_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь обозначения совпадают с обозначениями прямой задачи. В случае области, лежащей вне зоны распределения аномальных масс, интегральные

уравнения (5) и (6) уже не могут быть отнесены к сингулярным.

Изложение материала и результатов. Как правило, аналитическое решение уравнений (5) или (6) затруднительно. Поэтому будем решать их численно. Далее будем рассматривать только двухмерные поля и решать уравнение (6).

Для этого выделим зону расположения аномальных масс – множество $S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq z \leq d\}$, ось Z направлена вверх, уровень, на котором производятся измерения - $z = d$. Будем считать, что в каждой точке отрезка $[a, b]$ заданы $F_z(x, d) = P(x)$ – значения силы тяжести от аномальных масс. Эта функция аппроксимируется с помощью интерполяционного кубического сплайна, построенного на основании сглаженных результатов измерений. Считаем, что среда бинарна, то есть плотности среды могут принимать только два известных значения: ρ_1 и ρ_2 . Но определяющее значение имеет только величина $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, так как бинарная среда легко приводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно новых неизвестных ρ'_1 и ρ'_2 , где $\rho'_2 = 0$ и $\rho'_1 = \Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. Для этого достаточно из правой части (6) вычлечь

$$2 \cdot G \cdot \rho_2 \cdot \iint_S (z - z_0) / R_i^2 \cdot dS,$$

где $R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$. В дальнейшем будем считать эту операцию выполненной, и величины ρ'_1 и ρ'_2 будем употреблять без штрихов. Таким образом, бинарная среда свелась к среде, где одной из плотностей блоков будет нулевая, эта задача эквивалентна предыдущей.

Произведем дискретизацию области S на конечные элементы (КЭ), в простейшем случае это будут прямоугольники или треугольники, число таких КЭ обозначим через N . В пределах каждого КЭ плотность среды полагаем однородной, равной либо ρ_1 либо $\rho_2 = 0$. Выберем N несовпадающих точек наблюдения $M_i(x_i, z_i)$ на отрезке $[a, b]$. Теперь уравнение (6) может быть записано в виде:

$$2G \cdot \sum_{k=1}^N \rho_k \iint_{S_k} (z - z_0) / R^2 \cdot dS = F_z(x_i, z_i)$$

в силу того, что плотность $\rho(x, z)$ постоянна в пределах КЭ S_i , здесь она обозначена ρ_i . Обозначим приведенную силу тяжести в точке наблюдения $M_i(x_i, z_i)$ как $w_i = F_z(x_i, z_i) / (2 \cdot G)$. Очевидно, что приведенная сила тяжести в точке наблюдения $M_i(x_i, z_i)$ от всей области S будет равна

$$\sum_{j=1}^N \rho_j \cdot T_{ij} = w_i, \quad (7)$$

где

$$T_{ij} = \iint_{S_j} (z - z_i) / R_i^2 \cdot dS. \quad (8)$$

Здесь обозначено: S_j - КЭ (прямоугольник) с номером j ,

$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$ - расстояние от текущей

$M(x, z)$ точки КЭ S_j до точки наблюдения $M_i(x_i, z_i)$.

Для случая, когда S_j - прямоугольник или треугольник, интеграл (8) можно вычислить аналитически, он выражается через элементарные функции. Например, в случае прямоугольной области:

$$I = \int_{a_j}^{b_j} \int_{c_j}^{d_j} (z - z_0) / R^2 \cdot dx dz = (I_2 - I_1) / 2,$$

здесь

$$I_2 = \int_{a_j}^{b_j} \text{Ln}[(x - x_0) + (d_j - z_i)^2] \cdot dx,$$

$$I_1 = \int_{a_j}^{b_j} \text{Ln}[(x - x_0)^2 + (c_j - z_i)^2] \cdot dx.$$

Интегралы I_2, I_1 берутся однократно, для этого найдем первообразную:

$$\begin{aligned} Q(u, p) &= \int \text{Ln}(u^2 + p^2) \cdot du = \\ &= u \cdot \text{Ln}(u^2 + p^2) - 2u + 2p \cdot \arctg(u/p). \end{aligned}$$

Здесь полагаем, что $p \neq 0$ - константа. Заметим, что для внешних задач обязательно выполняется условие $p \neq 0$, так как в этом случае измерение производится в условиях, когда будет выполнено $z_i > d_j > c_j$. Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= Q(b_j - x_i, d - z_i) - Q(a_j - x_i, d_j - z_i) - \\ &- Q(b_j - x_i, c_j - z_i) + Q(a_j - x_i, c_j - z_i). \end{aligned}$$

Для случая треугольной области (8) берется также аналитически, только результат будет более громоздким. В результате получаем СЛАУ относительно плотности ρ_i (7). Решая СЛАУ (7), теоретически можно получить истинные значения плотностей области аномалий S . Однако СЛАУ (7) плохо определена и устойчивого решения получить не удастся.

В случае не очень большого числа КЭ N для двумерной задачи работоспособным оказывается адаптивный параллельный алгоритм, который определяет плотности блоков не обязательно одновременно, а последовательно, пытаясь распознать принадлежность к области аномалий хотя бы некоторых блоков.

Алгоритм решения обратной задачи гравиразведки состоит из инициализации, внешних и внутренних итераций.

На стадии инициализации решения обратной задачи гравиразведки:

- 1) Область S разбиваем на N КЭ – прямоугольных или треугольных блоков.
- 2) Зарезервируем массив *Poroda* длины N для накопления “статистики” по каждому блоку. Здесь будет храниться информация относительно того, идентифицирован ли данный блок или нет. От этого зависит, входит ли этот блок в формирование СЛАУ (7). Первоначально все блоки считаются неидентифицированными.
- 3) Строим кубический интерполяционный сплайн на отрезке $[a, b]$ по сглаженным результатам измерений силы тяжести $F_z(x, d) = g(x)$ области аномальных масс. В дальнейшем эта функция будет корректироваться в связи с определением плотности части блоков. Будем считать, что региональный фон уже учтен в процессе сглаживания результатов измерений.

4) Задаем значения ρ_1 - значения плотности руды и ρ_2 - значения плотности породы. Для определения пустот следует положить $\rho_2 = 0$.

Теперь опишем алгоритм внешней и внутренней итераций.

1) Выберем на отрезке $[a, b]$ случайным образом N точек наблюдения $M_i(x_i, z_i)$. Число точек наблюдения должно совпадать с числом КЭ. Для устойчивости решения СЛАУ (7) введем условие – точки должны располагаться друг от друга не ближе, чем величина R_0 (заданная величина), таким образом, мы исключаем очень близкие точки наблюдения. Очевидно, что при определенных значениях $[a, b]$, N и R_0 подобрать нужное распределение не удастся, в этом случае следует уменьшить R_0 .

2) Рассчитаем матрицу системы (7) и ее правые части для еще неидентифицированных блоков.

3) Решаем систему (7), в результате определены плотности всех неидентифицированных блоков.

Пункты 1)-3) выполнялись заданное число K раз (4-6), это необходимо для регуляризации уравнения (6) за счет выбора случайных точек наблюдения. В результате получаем K решений уравнения (6), что позволяет идентифицировать часть блоков на предмет принадлежности руде или породе.

4) Анализируем совокупность полученных K решений уравнения (6) по эвристическому алгоритму. Для этого можно выбирать различные стратегии, в программе была выбрана такая - если плотность блока в большинстве случаев отличается по модулю от ρ_1 или ρ_2 на величину меньше заданной, то его плотность считается определенной и этот блок исключается из рассмотрения. В результате решения (7) часть плотностей блоков оказываются наиболее близкими к ρ_1 или ρ_2 . Таким образом, в каждой внешней итерации M блоков устойчиво идентифицируются либо как руда, либо как порода, остальные $N_1 = N - M$ не могут быть достоверно отнесены ни к одной из категорий.

Пункты 1)-4) можно назвать внутренней итерацией.

5) Отметим в массиве *Poroda* номера тех M блоков, которые уже идентифицированы и их плотности.

6) Исключим влияние M идентифицированных блоков на значение поля силы тяжести $F_z(x, d)$ области аномальных масс. Для этого вычтем из функции $F_z(x, d)$ поле тяжести идентифицированных M блоков. Строим кубический интерполяционный сплайн на отрезке $[a, b]$ по скорректированным результатам измерений силы тяжести $F_z(x, d)$ области аномальных масс.

7) Полагаем $N = N - M$. Если $N = 0$, то алгоритм закончен. Он также будет закончен, если новое поле $F_z(x, d)$ будет равно нулю, то есть не осталось блоков с плотностью $\rho'_1 = \Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, а только с плотностью $\rho'_2 = 0$. Если эти условия не выполнены, то переходим на пункт 1) и выполняем новую внешнюю итерацию.

Пункты 1)-7) можно назвать внешней итерацией.

Повторяя 1)-7) несколько раз, практически всегда приходим к полностью идентифицированной области аномалий.

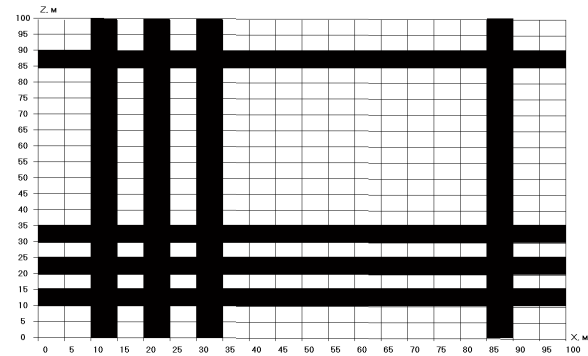


Рис. 1. Геометрия области аномалий примера 1

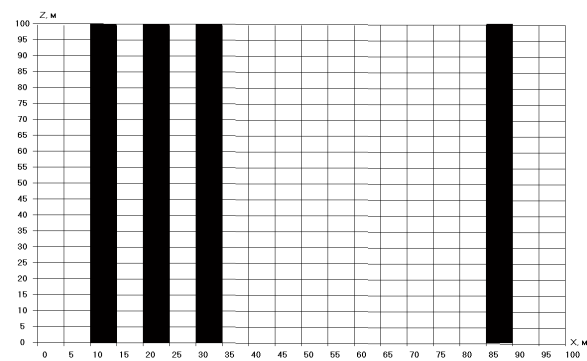


Рис. 2. Геометрия области аномалий примера 2

К достоинству этого алгоритма следует отнести то, что он является принципиально параллельным по своей сути. Пункты 1)-4) можно выполнять параллельно, на нескольких процессорах.

Другим достоинством алгоритма является естественная регуляризация за счет случайного выбора точек наблюдения.

Таблица 1

A	B	C	D	E
1	16	64	8	400
2	26	29	5	320
3	32	124	3	265
4	6	103	3	109
Итого	80	320	19	-

Для выяснения степени эффективности алгоритма были проведены численные эксперименты с большим количеством различных областей аномалий. Выбрана была некоторая конфигурация руды и породы, задавались значения плотности руды ρ_1 и значения плотности породы ρ_2 . Рассматривалась область 100×100 м, разбивка области производилась с числом делений N_x по горизонтали и с числом делений N_z по вертикали.

На рисунках приведены два примера рассматриваемой геометрии области аномалий, черным цветом обозначены области с плотностью ρ_1 , белым - ρ_2 .

Результаты решения задачи гравиметрии для этих примеров при дискретизации области $S - 20 \times 20$ приведены в таблицах 1 и 2 соответственно. В примере

1 из 400 блоков - 144 блока руды и 256 породы, в примере 2 - 80 блоков руды и 320 породы. В заголовках таблиц буквами обозначены следующие параметры расчета: А – номер внешней итерации; В – количество верно определенных блоков руды; С – количество верно определенных блоков породы; D – время решения в секундах; E – размерность системы.

Выводы

Предложенный метод позволяет эффективно находить решение обратной задачи гравиразведки двумерной задачи при среднем числе конечных элементов для случая бинарной среды. Путем случайного выбора точек наблюдения и решения СЛАН (7) метод позволяет последовательно идентифицировать наиболее достоверные блоки среды на данной внешней итерации. Процесс случайного выбора точек наблюдения для интегрального уравнения (6) играет роль естественной регуляризации этого уравнения. Алгоритм метода является параллельным по существу, реализация внутренних итераций может быть выполнена совершенно независимо друг от друга.

Литература

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: URSS, 2009. — 480 с.
2. Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Мудрецов Е. А. — М.: Недра, 1990. — 608 с.

Таблица 2

A	B	C	D	E
1	28	32	9	400
2	4	18	6	340
3	59	12	5	318
4	48	166	3	247
5	5	28	1	33
Итого	144	256	23	-

3. Тихонов А. Н.,

Самарский А. А. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. К.: Наукова думка, 1986. — 544 с.
5. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — К.: Наукова думка, 1978. — 228 с.
6. Старостенко В. И., Заворотько А. Н. Методика и Алгол (Фортран) — программы устойчивого решения обратных линейных и нелинейных задач гравиметрии. — К.: Наукова думка, 1980. — 104 с.
7. Алексидзе М. А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
8. Любимов Г. А., Любимов А. А. Методика гравимагнитных исследований с использованием ЭВМ. — М.: Недра, 1988. — 304 с.

пост.29.11.12

Разработка программного обеспечения процесса выплавки стали в дуговых печах

К. В. ЯШИНА

Днепродзержинский государственный технический университет

В статье приводится описание разработанного программного обеспечения, позволяющего вести полноценное наблюдение за процессом выплавки стали в дуговых печах. Созданное программное обеспечение основано на комплексной модели электрических, тепловых и химических процессов, происходящих в дуговых печах.

В статті наведено опис розробленого програмного забезпечення, яке дозволяє вести спостереження за процесом виплавки сталі у дугових печах. Створене програмне забезпечення базується на комплексній моделі електричних, теплових та хімічних процесів, що відбуваються у дугових печах.

The article describes the developed software that allows for a meaningful observation of the processes of steel production in electric arc furnaces. Software is based on a complex model of the electrical, thermal, and chemical processes that occur in arc furnaces.

Введение. Одной из особенностей современного мирового рынка стали является рост объемов продукции, выплавляемой в дуговых сталеплавильных печах (ДСП) переменного тока. В настоящее время доля выплавляемой электростали в мире приближается к 40% и этот показатель постоянно растет. В мире работает около 1500 дуговых печей и в среднем еженедельно вводится в работу одна новая печь. При сохранении существующего темпа роста объем выплавки стали в

дуговых печах в скором времени может достичь объема выплавки в кислородных конвертерах. Улучшаются и технико-экономические показатели работы дуговых печей [1 - 4].

Постановка задачи. Следовательно, актуальной является задача разработки программного обеспечения (ПО), позволяющего вести наблюдение за процессом выплавки стали в ДСП.