Висновки

В даній роботі отримано точне рішення задач аналізу та синтезу для кулачкових механізмів з важелем, що качається. Визначено аналітичне представлення контуру кулачка з важелем, що качається.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин: [Учеб. для втузов. — 4-е изд., перераб. и доп.] — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 640 с.
2. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: Учеб. пособие. — М. : Наука, Физматлит., 1990. — 672 с.
3. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. К. : Издательство института матем. НАН Украины, 1997. — 358 с.

пост.10.06.13

Метод варьирования неузловых параметров финитных функций

*И. А. АСТИОНЕНКО, Е. И. ЛИТВИНЕНКО, А. Н. ХОМЧЕНКО**

Украина, Херсонский национальный технический университет

*Украина, Черноморского государственного университета им. П. Могилы (г. Николаев)

Показано, как путем варьирования неузловых параметров конечных элементов высших порядков устранить физическую неадекватность в спектре узловых нагрузок.

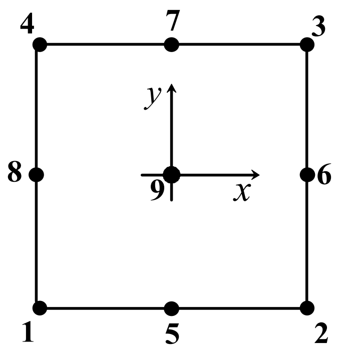
Показано, як шляхом зміни позавузлових параметрів скінченних елементів вищих порядків позбутися фізичної неадекватності у спектрі вузлових навантажень.

It is shown how by means of variation of out-of-node parameters of higher order finite elements to eliminate irregularity in the spectrum of nodal loads.

Постановка проблемы. Новая волна повышенного интереса к финитным функциям вызвана появлением и стремительным развитием метода конечных элементов (МКЭ). Финитными называют функции с конечным носителем. Как правило, конечный носитель – это треугольник или прямоугольник (квадрат). А в роли финитных функций чаще всего выступают полиномы, которые, как известно, занимают привилегированное положение в математике и её приложениях. Проще всего построить полином лагранжева типа. Однако на конечных элементах высших порядков наряду с граничными узлами интерполяции приходится использовать внутренние узлы. Так возникают внутренние (дутые) моды. По известным причинам внутренние узлы нежелательны, поэтому в МКЭ появилась процедура исключения внутренних узлов (конденсация, редукция). Опыт предшественников показывает, что даже математически безупречная конденсация не гарантирует физической адекватности интегральных характеристик финитных функций**Анализ предшествующих публикаций.** Конденсация - взвешенное распределение информации, принадлежащей внутреннему узлу, между граничными узлами КЭ. Задача сводится к правильному выбору весовых коэффициентов. О неединственности решения этой задачи Галлагер [1] писал еще в 1975 г. Однако не все специалисты отреагировали на замечание Галлагера. Так, в 1977 г. вышла книга Митчелла и Уэйта [2] с примерами неудачного применения конденсации. Похоже,

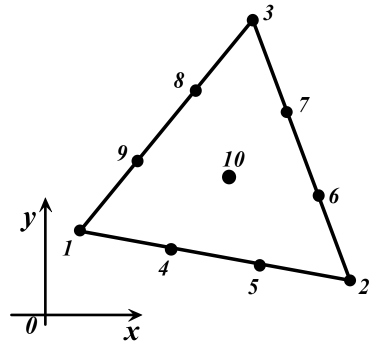
Цель работы – критически проанализировать “рецепты” конденсации (редукции) по Джордану и Сьярле-Равьяру, предложить математически обоснованные и физически адекватные “рецепты”, дать интерпретацию коэффициентов редукции (неузловых параметров) в геометрических и физических терминах.

Основная часть. На *рис. 1* изображены объекты нашего исследования: квадратный элемент 2-го порядка и треугольный элемент 3-го порядка. Это, так называемые, центрированные элементы. Они относятся к элементам лагранжевого типа. Нас интересуют поузловые распределения единичной нагрузки и их модификация как результат исключения внутреннего узла (на квадрате узел 9, на треугольнике -10).



$|\,x\,|\le 1;\,|\,y\,|\le 1$

Рис. 1. Конечные элементы лагранжева типа



По Ньютону-Котесу узловые нагрузки (локализация) определяются по правилу интегрального среднего:

$$\gamma_i = \frac{1}{S}\iint\limits_D N_i(x,y)dS\,, \tag{1}$$

где S - площадь области интегрирования D; i - номер узла; $N_i(x,y)$ финитная функция, отвечающая узлу i.

Чтобы составить первоначальный спектр узловых нагрузок достаточно на квадрате взять функции $N_1(x,y)$, $N_5(x,y)$ и $N_9(x,y)$, а на треугольнике - $N_1(x,y)$, $N_4(x,y)$ и $N_{10}(x,y)$.

На квадрате имеем:

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y)x\,y\,, \\ N_5(x,y) &= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)(y-1)y\,, \\ N_9(x,y) &= \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Остальные функции базиса биквадратичной интерполяции легко определяются из (2).

На треугольнике имеем:

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{2}\,L_1(3L_1-1)(3L_1-2)\,, \\ N_4(x,y) &= \frac{9}{2}\,L_1\,L_2(3L_1-1)\,, \\ N_{10}(x,y) &= 27\,L_1\,L_2\,L_3\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где $L_i(x,y)$ - барицентрические координаты симплекса ($i=1,2,3$).

Остальные функции базиса треугольника 3-го порядка легко определить из (3).

Узловые нагрузки на квадрате (*рис. 1*):

$$\gamma_i = \begin{cases} 1/36, & i=1,\dots 4, \\ 4/36, & i=5,\dots 8, \\ 16/36, & i=9. \end{cases}$$

Узловые нагрузки на треугольнике (*рис. 1*):

$$\gamma_i = \begin{cases} 1/30, & i=1,.2,3, \\ 3/40, & i=4,\dots 9, \\ 9/20, & i=10. \end{cases}$$

Исключение внутреннего узла выполняется по правилу [2]:

$$\overline{N}_i(x,y) = N_i(x,y) + \alpha_i\,N_c(x,y)\,, \tag{4}$$

где $N_c(x,y)$ - функция, отвечающая узлу в центре тяжести элемента. Для квадрата это $N_9(x,y)$, для треугольника - $N_{10}(x,y)$.

Как видим, результат модификации элемента и спектр узловых нагрузок существенно зависят от α_i.

Джордан [2] использовал следующую схему для квадрата:

$$\alpha_i = \begin{cases} -1/4, & i=1,\dots,4, \\ 1/2, & i=5,\dots,8. \end{cases} \tag{5}$$

При этом

$$\gamma_i = \begin{cases} -1/12, & i=1,\dots,4, \\ 1/3, & i=5,\dots,8. \end{cases} \tag{6}$$

Именно эту модель с отрицательными нагрузками в вершинах квадрата неожиданно нашли подбором Эргатудис, Айронс и Зенкевич в 1968 г., решая задачу изопараметрических преобразований КЭ.

На треугольнике Сьярле и Равьяр использовали следующую схему [2]:

$$\alpha_i = \begin{cases} -1/6, & i=1,2,3, \\ 1/4, & i=4,\dots,9. \end{cases} \tag{7}$$

При этом

$$\gamma_i = \begin{cases} -1/24, & i=1,2,3, \\ 3/16, & i=4,\dots,9. \end{cases} \tag{8}$$

И снова в вершинах элемента нагрузки отрицательны.

Ниже мы покажем, как этот недостаток устранить. А пока попытаемся найти подходящую интерпретацию для описанных схем конденсации по формуле (4). Качество модификации определяет корректирующая добавка $\alpha_i\,N_c(x,y)$. Поскольку внутренний узел элемента исключается, Зенкевич назвал α_i неузловым параметром элемента. В своей книге [3] Зенкевич замечает, что интерпретировать внутренний параметр трудно, особенно, в физических терминах. Именно поэтому мы начнем с физической интерпретации. Напомним, что конденсация – это сгущение, уплотнение, добавление. Иными словами, нагрузка внутреннего узла распределяется между граничными узлами. Таким образом,

α_i определяет долю нагрузки, которую центральный узел отдаёт граничному узлу i. Легко заметить, что в схемах (5) и (7) донорами (против обыкновения) являются узлы в вершинах элемента, причем отдают они больше возможного. На элементах более высокого порядка механизм перезагрузки еще сложнее. Неудивительно, что Зенкевич столкнулся с трудностями интерпретации. В самом деле, замысловатые схемы (5) и (7) настолько противоестественны, что понять их трудно. Если вместо (5) и (7) рассмотреть физически адекватные схемы (непонятно, что помешало Зенкевичу сделать это в 1968 г.), "негативизм" легко устранить. С геометрической точки зрения внутренний параметр α_i численно равен аппликате поверхности $\overline{N}_i(x,y)$ в центре тяжести элемента. Понятно, что, варьируя параметр α_i, мы управляем интегральной характеристикой γ_i. Ниже приведены примеры адекватных распределений, полученных путем варьирования неузлового параметра.

Первый вариант, подсказанный интуицией, – это равномерное распределение внутренней доли нагрузки по граничным узлам квадрата:

$$\alpha_i = \frac{1}{8}, \quad i = 1,\ldots,8; \quad \gamma_i = \begin{cases} 1/12, & i = 1,\ldots,4, \\ 1/6, & i = 5,\ldots,8. \end{cases} \tag{9}$$

Модель 4-х сочлененных стержней приводит к такому же распределению.

Если по сравнению с (9) уменьшить нагрузку в вершине квадрата на $\frac{1}{36}$, получим следующий вариант:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1/16, & i = 1,\ldots,4, \\ 3/36, & i = 5,\ldots,8; \end{cases} \qquad \gamma_i = \begin{cases} 2/36, & i = 1,\ldots,4, \\ 7/36, & i = 5,\ldots,8. \end{cases}$$

Теперь увеличим угловую нагрузку (9) на $\frac{1}{36}$. Тогда

$$\alpha_i = \begin{cases} 3/16, & i = 1,\ldots,4, \\ 1/36, & i = 5,\ldots,8; \end{cases} \qquad \gamma_i = \begin{cases} 4/36, & i = 1,\ldots,4, \\ 5/36, & i = 5,\ldots,8. \end{cases}$$

Равномерное распределение внутренней доли нагрузки по граничным узлам треугольника выполняется по правилу:

$$\alpha_i = \frac{1}{9}, \quad i = 1,\ldots,9; \quad \gamma_i = \begin{cases} 1/12, & i = 1,2,3, \\ 1/8, & i = 4,\ldots,9. \end{cases}$$

Модель 3-х сочлененных стержней приводит к такому распределению.

Приведем еще один вариант физически адекватного поузлового распределения единичной нагрузки в нецентрированном треугольнике:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1/18, & i = 1,2,3, \\ 5/36, & i = 4,\ldots,9. \end{cases} \qquad \gamma_i = \begin{cases} 7/120, & i = 1,2,3, \\ 11/80, & i = 4,\ldots,9. \end{cases}$$

Понятно, что формула (4) является генератором множества альтернативных базисов, среди которых легко найти физически адекватные. Заметим, что на 9-узловом треугольнике альтернативные базисы получены впервые. В этой связи открывается интересная возможность сопоставления теоретического спектра узловых нагрузок с эмпирическим спектром, полученным из компьютерных экспериментов со случайными блужданиями и поглощающими граничными узлами. На основании закона больших чисел Я. Бернулли можно предположить, что для частиц, стартующих из центра треугольника, относительная частота поглощений в граничном узле с увеличением числа блуждающих частиц будет стремиться к переходной вероятности из центра в указанный узел. На этом свойстве основаны несеточные схемы одношаговых "блужданий". Кавычки означают, что вместо многократных многошаговых зигзагоподобных блужданий можно моделировать скачок частицы из центра непосредственно в граничный узел. Так устроены эффективные варианты метода Монте-Карло. Легко заметить, что модели Джордана и Сьярле-Равьяра непригодны для компьютерного тестирования.

Выводы

Финитные функции с узлами внутри носителя при неудачном исключении внутренних параметров могут стать источником неадекватных поузловых распределений единичной массовой силы. Существует множество способов аккуратного и правильного решения задачи локализации нагрузки. Конструирование моделей серендипова типа (без внутренних узлов) лучше всего начинать именно с задачи локализации нагрузки, соблюдая при этом условия интерполяционной гипотезы Лагранжа на границе носителя.

Метод варьирования внутренних параметров – убедительный пример "мягкого" математического моделирования в духе академика В.И. Арнольда [6]. Представляет интерес применение метода варьируемых неузловых параметров к элементам более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М. : Мир, 1981. — 216 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М. : Мир, 1984. — 428 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
4. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. — Ивано-Франковск, 1982. — 9 с. — Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, № 1213.
5. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости. Серия: математика, физика. — № 5(60). — Вып. 16. — Белгород : БелГУ, 2009. — С. 15—31.
6. Арнольд В. И. "Жесткие" и "мягкие" математические модели. / В.И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2008. —32 с.

пост.01.07.13