

## Постановка нестационарной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде

В. Ф. МОЛЧАНОВ

Днепродзержинский государственный технический университет

В работе рассмотрены вопросы исследования закономерности процесса фильтрации технологических жидкостей через пористые материалы. При фильтрации жидкости с твердыми частицами пористая среда фильтрующей перегородки деформируется с изменением ее пористости. Проведенные исследования позволили выявить и изучить закономерности процесса фильтрации и установить закон изменения пористости пористой среды. На основании установленного закона выведено дифференциальное уравнение, которое позволяет при заданных начальных и граничных условиях сформулировать постановку задачи фильтрации жидкости через слой твердых частиц деформируемой пористой среды фильтрующей перегородки.

У роботі розглянуті питання дослідження закономірності процесу фільтрації технологічних рідин через пористі матеріали. При фільтрації рідини із твердими частками пористе середовище фільтруючої перегородки деформується зі зміною її пористості. Проведені дослідження дозволили виявити й вивчити закономірності процесу фільтрації й установити закон зміни пористості пористого середовища. На підставі встановленого закону виведено диференціальне рівняння, що дозволяє при заданих початкових і граничних умовах сформулювати постановку задачі фільтрації рідини через шар твердих часток деформованого пористого середовища фільтруючої перегородки.

The questions of research of conformity to the law of process of filtration of technological liquids are in-process considered through porous materials. During filtration of liquid with particulate matters the porous environment of filter partition is deformed with a change its porosity. The conducted researches allowed to expose and study conformities to the law of process of filtration and set the law of change porosity of porous environment. On the basis of the set law differential equalization which allows at the set initial and scope conditions to formulate raising of task of filtration of liquid through the layer of particulate matters of the deformed porous environment of filter partition is shown out.

**Введение.** В современном машиностроении при механической обработке деталей машин технический прогресс предусматривает совершенствование технологий с целью повышения качества и понижения себестоимости продукции. На финишных операциях металлообработки важное значение приобретает широкое применение смазочно-охлаждающих жидкостей (СОЖ). На предприятиях машиностроения используются высокопроизводительные агрегаты и станки, в которых основным технологическим элементом является жидкость. В процессе их работы технологические жидкости непрерывно и интенсивно загрязняются твердыми частицами металлообработки.

Исследованию механизма образования шероховатости поверхностей при окончательной финишной обработке шлифованием посвящено значительное число работ. Однако механизм образования микропрофиля поверхности с учетом влияния твердых частиц, содержащихся в смазочно-охлаждающей жидкости, исследован недостаточно. Известно, что металлические частицы шлама, попавшие вместе с жидкостью в зону контакта абразивных зерен шлифовального круга с поверхностью заготовки, деформируются сами и оказывают определенное влияние на деформацию материала обрабатываемой поверхности, что приводит к образованию прижогов. Абразивные частицы шлама практически не деформируются, а, вступая в силовой контакт при шлифовании, как бы «удлиняя» абразивные зерна на поверхности круга и участвуя в единичных актах резания, внедряются в обрабатываемую поверхность, оставляя следы воздействия на поверхностном слое детали, которые приводят к росту шероховатости [1,2]. Для исключения прижогообразования при шлифовании, уменьшения шероховатости поверхности и поддержание в соответствующем рабочем состоянии загрязненные жидкости необходимо очищать от твердых частиц металлооб-

работки [3,4,5]. С увеличением разнообразия СОЖ, которые используют в машиностроении, соответственно возрастают и требования к технологии и аппаратному оснащению систем очистки. Для восстановления первоначальных свойств технологические жидкости очищают от механических примесей. Наиболее широкое применение получают способы очистки технологических жидкостей фильтрацией.

Использование фильтрации для очистки и осветления технологических жидкостей наиболее эффективно, так как при фильтрации через слой пористых материалов можно достигнуть полного извлечения твердых частиц из жидкостей [6]. Однако особенности строения порового пространства обуславливают ряд специфических явлений, возникающих при движении жидкостей в каналах пористой среды.

**Постановка задачи.** Целью исследования является изучение и установления закономерности процесса фильтрации технологических жидкостей через пористые материалы. При фильтрации технологических жидкостей через слой пористых материалов пористая среда фильтрующей перегородки деформируется с изменением ее пористости. Изменение пористости происходит за счет уменьшения объема порового пространства, так как твердые частицы вместе с жидкостью проникают в поры каналов порового пространства и застревают в них.

**Результаты работы.** В рассматриваемой модели, процесс фильтрации шламовой суспензии протекает с постоянным закупориванием пор фильтрующей перегородки. При фильтрации с постепенным закупориванием пор на фильтрующую перегородку объемом  $W_{\phi}$ ,  $\text{м}^3$ , в которой содержится слой сыпучего пористого материала пористостью  $\Pi$ , непрерывно поступает технологическая жидкость со скоростью  $W_{\text{ж}}$ ,  $\text{м}^3$  в минуту, в

которой содержатся твердые частицы массой  $\kappa_3$ , кг. Поступающие с жидкостью в поры каналов фильтрующей перегородки твердые частицы задерживаются в ней, а отфильтрованная жидкость продолжает двигаться с той же скоростью. Твердые частицы, зашедшие в поры каналов фильтрующей перегородки, изменяют ее пористость и оказывают влияние на длительность процесса фильтрации [7].

Для определения пористости фильтрующей перегородки в любой момент времени и длительности процесса фильтрации жидкости через фильтрующий слой необходимо знать количество твердых частиц, зависших в порах сыпучего пористого материала фильтрующей перегородки. Для этого за независимое переменное примем время  $t$ , а за искомую функцию  $y(t)$  – количество твердых частиц, зависших в порах каналов фильтрующей перегородки через  $t$  минут после начала процесса фильтрации. Определим, насколько изменится количество твердых частиц примесей в фильтрующей перегородке за промежуток времени  $t$  до момента  $(t+\Delta t)$ . В одну минуту на фильтрующую перегородку поступает  $W_{ж}$ ,  $m^3$  загрязненной жидкости, а в  $\Delta t$  минут –  $W_{ж} \cdot \Delta t$ ,  $m^3$  и в этих  $W_{ж} \cdot \Delta t$ ,  $m^3$  жидкости содержится  $\kappa_0 \cdot W_{ж} \cdot \Delta t$ , кг твердых частиц примесей. С другой стороны, за время  $\Delta t$  через фильтрующую перегородку протекает  $W_{ж} \cdot \Delta t$ ,  $m^3$  отфильтрованной жидкости.

В момент времени  $t$  во всей фильтрующей перегородке объемом  $W_{\phi}$ ,  $m^3$  содержится  $y(t)$ , кг твердых частиц примесей. Следовательно, в объеме  $W_{\phi} \cdot \Delta t$ ,  $m^3$  содержалось бы  $W_{\phi} \cdot \Delta t \cdot y(t)$ , кг твердых частиц примесей, если бы за время  $\Delta t$  количество твердых частиц в фильтрующей перегородке не прибавлялось. Но так как количество твердых частиц примесей за это время увеличивается на величину, бесконечно малую при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то и в объеме  $W_{ж} \cdot \Delta t$ ,  $m^3$  жидкости будет содержаться  $W_{ж} \cdot \Delta t [y(t) + a]$ , кг твердых частиц примесей, где  $a \rightarrow 0$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Итак в жидкости, поступающей на фильтрующую перегородку, за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$ , содержится  $\kappa_0 \cdot W_{ж} \cdot \Delta t$ , кг твердых частиц примесей, а в объеме пористого слоя фильтрующей перегородки, занимаемой жидкостью, содержится  $W_{ж} \cdot \Delta t [y(t) + a]$ , кг твердых частиц примесей.

Приращение твердых частиц примесей за время  $[y(t + \Delta t) - y(t)]$  равно разности найденных величин, то есть

$$[y(t + \Delta t) - y(t)] = \kappa_0 W_{ж} \cdot \Delta t - W_{ж} \cdot \Delta t [y(t) + a]$$

Полученное уравнение разделим на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . В левой части уравнения получим производную  $y'(t)$ , а в правой –  $\kappa_0 W_{ж} - W_{ж} y(t)$ , так как  $a \rightarrow 0$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Итак, имеем дифференциальное уравнение

$$y'(t) = \kappa_0 W_{ж} - W_{ж} y(t) \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) относится к линейным однородным уравнениям с разделяющимися переменными [8]. Для решения уравнения (1) приведем его к виду

$$\frac{dy}{dt} = \kappa_0 W_{ж} - W_{ж} y$$

Проинтегрировав обе части этого уравнения, после соответствующих преобразований, получим

$$y(t) = c \cdot e^{-W_{ж} \cdot t} + \kappa_0 \quad (2)$$

Так как, в начальный момент фильтрации, при  $t = 0$ , твердые частицы примесей в фильтрующей перегородке отсутствовали, то их количество  $y(0) = 0$ . Полагая в уравнении (2)  $t = 0$  найдем постоянную интегрирования  $c$

$$y(0) = c \cdot e^{-W_{ж} \cdot 0} + \kappa_0$$

Откуда  $c = -\kappa_0$ .

Подставляя значение  $c$  в уравнение (2), получим

$$y(t) = \kappa_0 (1 - e^{-W_{ж} \cdot t})$$

При  $t = t_k$ , в пористом слое фильтрующей перегородки задержится

$$m_T = \kappa_0 (1 - e^{-W_{ж} \cdot t_k}), \text{ кг} \quad (3)$$

где  $m_T$  – масса твердых частиц, кг.

Выведенная формула (3) позволяет определить массу твердых частиц, зависших и осевших в порах каналов сыпучего пористого материала фильтрующей перегородки в любой момент времени процесса фильтрации смазочно-охлаждающей жидкости с твердыми частицами металлообработки и вывести закон изменения пористости пористой среды.

Предполагая, что изменение пористости пропорционально приросту массы твердых частиц в пористом слое фильтрующей перегородки объемом  $W_{\phi}$ ,  $m^3$ , получим

$$d\Pi = \frac{dm_T}{\rho_T \cdot W_{\phi}} \quad (4)$$

где  $\rho_T$  – плотность твердых частиц,  $kg/m^3$ .

Так как при фильтрации шламовых суспензий через слой твердых частиц шлама пористая среда непрерывно деформируется, то уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Подставляя в уравнение неразрывности значения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{d\Pi}{dm_T} \cdot \frac{\partial m_T}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dP} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

получаем

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \Pi \frac{d\rho}{dP} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \frac{d\Pi}{dm_T} \frac{\partial m_T}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Реальная жидкость слабо сжимаема, поэтому с достаточной степенью точности можно записать

$$\rho - \rho_0 = \frac{\rho_0}{\alpha} (P - P_0) \quad (7)$$

где  $\alpha$  – модуль упругости жидкости,  $kg/m^2$ .

Определяя по приведенным выше формулам значения величин

$$\frac{\partial m_T}{\partial t} = W_{ж} \cdot \kappa_3 \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}; \quad (8)$$

$$\frac{d\Pi}{dm_T} = \frac{1}{\rho_T \cdot W_\Phi}; \quad (9)$$

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{\alpha}, \quad (10)$$

уравнение неразрывности для деформируемой пористой среды окончательно принимает следующий вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\rho_T}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho \kappa_3 W_{ж} e^{-W_{ж} \cdot t}}{\rho_T W_\Phi} = 0. \quad (11)$$

Из уравнения неразрывности выводим уравнение движения жидкости в деформируемой среде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\Pi \mu}{\kappa \alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\mu \cdot \kappa_3 \cdot W_{ж} \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}}{k \cdot \rho_T \cdot W_\Phi}. \quad (12)$$

Так как при фильтрации суспензии через слой твердых частиц движение протекает в одном направлении, то уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\Pi \mu}{\kappa \alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\mu \cdot \kappa_3 \cdot W_{ж} \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}}{k \cdot \rho_T \cdot W_\Phi}. \quad (13)$$

Это уравнение позволяет при заданных начальных и граничных условиях получить решение задачи фильтрации жидкости через слой твердых частиц деформируемой пористой среды фильтрующей перегородки. На основании закона изменения пористости фильтрующей перегородки выведено дифференциальное уравнение движения жидкости в деформируемой пористой среде с начальными и граничными условиями в области значений

$$0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq z \leq L.$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\Pi \mu}{\kappa \alpha} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\mu \cdot \kappa_3 \cdot W_{ж} \cdot e^{-W_{ж} \cdot t}}{k \cdot \rho_T \cdot W_\Phi}. \quad (14)$$

$$P(z, 0) = P_1; \quad P(0, t) = P_1; \quad P(L, t) = P_2. \quad (15)$$

На поверхности фильтрующей перегородки распределение давления задается как функция координат и времени  $P(z, t)$ .

Распределение давления на поверхности фильтрующей перегородки в начальный момент времени фильтрации

$$\text{при } t = 0, \quad P(z, 0) = P_1.$$

Так как давление на поверхности фильтрующей перегородки во время фильтрации поддерживают постоянным, то

$$\begin{aligned} \text{при } z=0, & \quad P(0, t) = P_1 \\ \text{при } z=L, & \quad P(L, t) = P_2. \end{aligned}$$

В итоге приходим к постановке нестационарной граничной задачи фильтрации шламовых жидкостей в деформируемой пористой среде.

## Выводы

1. Проведенные исследования позволили выявить и изучить закономерности процесса фильтрации технологических жидкостей через пористые материалы.
2. Выявленные закономерности позволили установить закон изменения пористости фильтрующей перегородки.
3. На основании закона изменения пористости выведено дифференциальное уравнение движения, которое позволяет при заданных начальных и граничных условиях решить нестационарную задачу фильтрации жидкостей через деформируемый слой пористой среды фильтрующей перегородки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов В. Ф. Исследование процесса образования частиц при шлифовании. // Міжнародна наукова конференція (матеріали конференції) «Математичні проблеми технічної механіки-2008». Дніпропетровськ, 2008. — С. 166—167.
2. Молчанов В. Ф., Володько И. Ю., Погребняк А. В. Исследование процесса образования твердых частиц при шлифовании. // Міжнародна наукова конференція (матеріали конференції - том 2) «Математичні проблеми технічної механіки-2012». Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 2012. — С. 49—53.
3. Худобин Л. В., Гульнов Е. П. Влияние загрязнения СОЖ отходами шлифования на прижогообразование, // Вестник машиностроения, 1978. — №1. — С. 67—68.
4. Степанов М. С., Шумакова Н. С. Влияние механических примесей, содержащихся в СОЖ, на структуру и микротвердость поверхностного слоя шлифованных деталей. // Смазочно-охлаждающие технологические средства в процессе абразивной обработки. - Ульяновск, 1988. — С. 78—84.
5. Полянсков Ю. В., Карев Е. А. К методике исследования эффективной очистки СОЖ от механических примесей при абразивной обработке. // Труды института. Ульяновский политехнический институт. - Куйбышев, 1976. — Вып.1. — С. 46—54.
6. Молчанов В. Ф. Постановка нестационарной граничной задачи фильтрации жидкостей в деформируемой пористой среде. // «Математичні проблеми технічної механіки». Четверта Всеукраїнська наукова конференція (матеріали конференції). Дніпропетровськ, 2004. — 88 с.
7. Молчанов В. Ф. Исследование фильтрации жидкостей через пористые материалы. // Третя Всеукраїнська наукова конференція (матеріали конференції) «Математичні проблеми технічної механіки». Дніпродзержинськ, 2003. — С. 71—72.
8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. Наука, 1977. — 664 с.