Об условиях самовозбуждения автоколебаний при переменном запаздывании сгорания топлива

В. В ГОЦУЛЕНКО, В. Н. ГОЦУЛЕНКО

Институт предпринимательства "Стратегия"

В данной работе рассмотрена математическая модель с сосредоточенными параметрами автоколебаний возбуждающихся в камере сгорания жидкостного реактивного двигателя при переменном запаздывании сгорания топлива. Аналитически определено критическое время запаздывания сгорания топлива, при превышении которого стационарное горение становится неустойчивым и самовозбуждаются автоколебания.

У даній роботі розглянута математична модель з зосередженими параметрами автоколивань, що збуджуються в камері згорання рідинного реактивного двигуна при змінному запізненні згорання палива. Аналітично визначено критичний час запізнення згорання палива, при перевищенні якого стаціонарне горіння стає нестійким і самозбуджуються автоколивання.

In this paper we consider the mathematical model with lumped parameters of self-oscillations excited in the combustion chamber of a liquid jet engine combustion variable lag. Analytically determined critical time delay combustion, above which a stationary combustion becomes unstable and self-excited oscillations.

Введение. Основой теоретического описания неустойчивости горения [1] является феноменологическое запаздывание сгорания топлива, предложенное Л. Крокко, которое составляет известный механизм возбуждения автоколебаний. В [1], с учетом данного механизма неустойчивости, была получена вырожденная математическая модель с сосредоточенными параметрами [2] внутрикамерной неустойчивости в камере сгорания ЖРД (жидкостного реактивного двигателя). В монографиях различных авторов данная модель рассматривается, как основная при описании неустойчивого горения.

Механизмы возбуждения автоколебаний, обусловленные теплотой сгорания, как и механизмы термоакустических автоколебаний феномена Рийке [3], оставались невыясненными.

При постоянном давлении $p = \text{const}$ внутри камеры сгорания, из-за теплоты сгорания, в потоке газа снижается его плотность ρ, что приводит к возрастанию напора p/ρ и скорости потока w. Это способствует возникновению отрицательного теплового сопротивления $h_\text{т}$ [4]. Нисходящая ветвь на зависимости $h_\text{т}(G)$ является причиной образования восходящей ветви на напорной характеристике $H(G)$ камеры сгорания [5]. Формальная аналогия с теорией помпажа лопастного нагнетателя [6], позволяет сформулировать следующее необходимое условие возбуждения автоколебаний теплоподводом. Для неустойчивости стационарного режима горения и возможности возбуждения автоколебаний необходимо, чтобы напорная характеристика камеры сгорания имела восходящую (неустойчивую) ветвь $dH(G)/dG > 0$. В противном случае, т.е. когда характеристика $H(G)$ является монотонно убывающей функцией массового расхода G, любой допустимый стационарный режим горения является абсолютно устойчивым, если нейтрализовать механизм неустойчивости Л. Крокко.

В монографии [7] отмечается, что введение феноменологического запаздывания процесса горения сыграло выдающуюся роль в развитии теории вибрационного горения. Л. Крокко ввел в рассмотрение также переменное время запаздывания (чувствительное к колебаниям давления) и на его основе разработал механизм внутрикамерной и высокочастотной неустойчивости горения в ЖРД [1].

В [8] были построены периодические автоколебательные решения вырожденной системы уравнений динамики камеры сгорания при постоянном времени запаздывания сгорания топлива. В [9] была рассмотрена полная система уравнений внутрикамерной неустойчивости и теоретически построены формы автоколебаний при переменном, зависящем от внутрикамерного давления, времени запаздывания сгорания. В [10] были получены периодические решения вырожденной системы уравнений нестационарного движения продуктов сгорания в ЖРД, с помощью которых обоснована возможность снижения амплитуды продольных автоколебаний вибрационного горения или их полного устранения. Также в данной работе была исследована интенсивность квазиупругой силы постоянного феноменологического запаздывания $\tau = \text{const}$ и ее влияние на устойчивость течения в камере сгорания ЖРД.

Отметим, что не при каждом положительном запаздывании $\tau > 0$ система уравнений динамики камеры сгорания имеет периодические автоколебательные решения. Ввиду этого, естественно возникает задача определения критического запаздывания, лишь при превышении которого, механизм Л. Крокко порождает автоколебания.

Постановка задачи и анализ полученных результатов. В данной работе рассматривается задача определения критического времени запаздывания сгорания и построение границы области устойчивости, когда запаздывание является переменным, зависящим от давления внутри камеры сгорания. На рис.1 приведена схема рассматриваемой камеры сгорания ЖРД.

Рис.1. Схема камеры сгорания ЖРД

В [5] была получена система уравнений, описывающая нестационарные движения продуктов сгорания, рассматривая данную камеру сгорания как динамическую систему с сосредоточенными параметрами. С учетом переменного времени запаздывания сгорания $\tau = \tau(p_c)$, данная система уравнений может быть записана в следующем виде [9]:

$$\begin{cases} L_a \dfrac{dG}{dt} = H(G) - p_c, \\ C_a \dfrac{dp_c}{dt} = G(t - \tau(p_c)) - G_c, \end{cases} \tag{1}$$

где $L_a = \ell / S$ – акустическая масса камеры горения, $C_a = V / c^2$ – ее акустическая гибкость, ℓ – длина камеры сгорания, S – ее площадь поперечного сечения, $V = \ell S$ – ее объем, $c = c(T_c)$ – скорость распространения звука на входе в сопло. Система дифференциально - разностных уравнений (1) дополняется уравнением характеристики сопла

$$G_c = \varphi(p_c), \tag{2}$$

где $\varphi(p_c) = S_{кр} \cdot \beta \dfrac{p_c}{c(T_c)}$, G_c – массовый расход продуктов сгорания на выходе из сопла (рис.1), $S_{кр}$ – критическое сечение сопла, $c(T_c) = \sqrt{kRT}$, $\beta = k \cdot \left(\dfrac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$,

k – показатель адиабаты, R – газовая постоянная.
Проведенные экспериментальные исследования [1] показали, что зависимость $\tau = \tau(p_c)$ является монотонно убывающей. На рис.2. приведены экспериментальные точки [1] и их аппроксимация с помощью соотношения $\tau(p_c) = b \exp(-a p_c) / \sqrt{p_c}$ [9], где $a = 0.12$, $b = 0.006$.

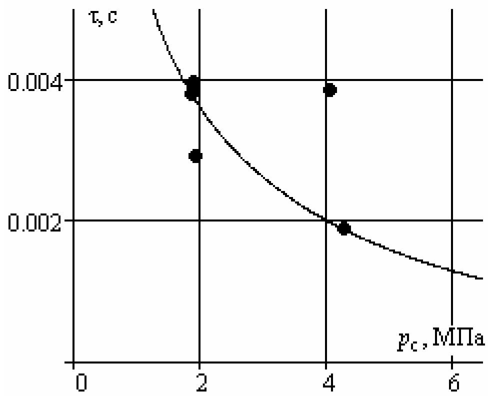

Рис.2. Зависимость $\tau(p_c)$ времени запаздывания от внутрикамерного давления

Параметры стационарного режима горения определяются из системы уравнений (1) – (2), полагая в ней

$$\left.\frac{dG}{dt}\right|_{G=G^*} = 0 \text{ и } \left.\frac{dp_c}{dt}\right|_{p_c = p_c^*} = 0 . \tag{3}$$

Из условий (3) следует, что $p_c^* = H(G^*)$ и $G^* = \varphi(p_c^*)$. Воспользовавшись разложением Тейлора

$$G(t - \tau) = G(t) - \tau \frac{dG}{dt} + O(\tau^2),$$

система уравнений (1)-(2), с точностью до величин порядка $O(\tau^2)$, запишется в следующей форме:

$$\begin{cases} L_a \dfrac{dG}{dt} = H(G) - p_c, \\ C_a \dfrac{dp_c}{dt} = G - \dfrac{\tau(p_c)}{L_a}(H(G) - p_c) - \varphi(p_c). \end{cases} \tag{4}$$

Далее более удобно перейти к безразмерным переменным:

$$x = \frac{G - G^*}{G^*}, \quad y = \frac{p_c - p_c^*}{p_c^*}. \tag{5}$$

В переменных (5) система уравнений (4) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} G^* L_a \dfrac{dx}{dt} = H(G^* + G^* x) - p_c^*(y+1), \\ p_c^* C_a \dfrac{dy}{dt} = (x+1) G^* - \\ -\tau(p_c^*(y+1)) \left(\dfrac{H(G^* + G^* x) - p_c^*(y+1)}{L_a} \right) - \varphi(p_c^*(y+1)) \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, характер устойчивости стационарного режима горения, в рассматриваемой задаче, окончательно сводится к исследованию устойчивости нулевого положения равновесия динамической системы (6). Согласно первому методу Ляпунова исследования устойчивости рассмотрим матрицу Якоби системы (6), вычисленной в ее нулевом положении равновесия.

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{H'(G^*)}{L_a} & -\dfrac{p_c^*}{G^* L_a} \\ \dfrac{G^*}{p_c^* C_a}\left(1 - \dfrac{\tau(p_c^*)}{L_a} H'(G^*)\right) & \dfrac{1}{C_a}\left(\dfrac{\tau(p_c^*)}{L_a} - \varphi'(p_c^*)\right) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

где положено

$$H'(G^*) = \left.\frac{dH(G^* + G^* x)}{dx}\right|_{x=0}, \quad \varphi'(p_c^*) = \left.\frac{d\varphi(p_c^* + p_c^* y)}{dy}\right|_{y=0}.$$

Для определения критического времени запаздывания сгорания $\tau_{кр}$ необходимо предварительно вычислить корни характеристического уравнения:

$$\det(J - \lambda E) = 0 . \tag{8}$$

Раскрывая определитель (8), получаем

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(J) \pm i\sqrt{4\det(J) - \mathrm{tr}^2(J)}}{2},$$

где $\mathrm{tr}(J)$ и $\det(J)$ соответственно след, и определитель матрицы Якоби J . Причем, согласно (6), получаются следующие представления для данных характеристик:

$$\mathrm{tr}(J) = \frac{H'(G^*)}{L_a} + \frac{1}{C_a}\left(\frac{\tau(p_c^*)}{L_a} - \varphi'(p_c^*)\right),$$

$$\det(J) = \frac{1}{L_a C_a}\left(1 - H'(G^*)\varphi'(p_c^*)\right).$$

Таким образом, критическое время запаздывания сгорания определяется из условия:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}\}=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathrm{tr}(J)=0, \\ \det(J)>0. \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{H'(G^*)}{L_{\text{а}}}+\dfrac{1}{C_{\text{а}}}\left(\dfrac{\tau_{\text{кр}}}{L_{\text{а}}}-\varphi'(p_{\text{c}}^*)\right)=0, \\ H'(G^*)\varphi'(p_{\text{c}}^*)<1. \end{cases}$$

откуда окончательно получаем, что

$$\tau_{\text{кр}}=L_{\text{а}}\varphi'(p_{\text{c}}^*)-C_{\text{а}}H'(G^*). \tag{9}$$

Таким образом, положение равновесия динамической системы (6), определяющее параметры стационарного режима горения, становится неустойчивым при выполнении неравенства

$$\tau(p_{\text{c}}^*)>\tau_{\text{кр}}\,.$$

Отметим также, что условие $H'(G^*)\varphi'(p_{\text{c}}^*)<1.$ автоматически выполняется, когда напорная характеристика $H(G)$ камеры сгорания является монотонно убывающей функцией. Для дальнейшего анализа полученной формулы (9) аппроксимируем напорную характеристику камеры сгорания полиномом третей степени, полагая $H(G)=H_0-k_{\text{Н}}G^3$. Тогда из (9) получается следующая зависимость критического времени запаздывания сгорания от внутрикамерного давления p_{c}^*:

$$\tau_{\text{кр}}(p_{\text{c}}^*)=\frac{L_{\text{а}}}{p_{\text{c}}^*}\left(\frac{H_0-p_{\text{c}}^*}{k_{\text{Н}}}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{3k_{\text{Н}}V}{c^2}\left(\frac{H_0-p_{\text{c}}^*}{k_{\text{Н}}}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{10}$$

На рис. 3 приведен график зависимости (10) для камеры сгорания длиной $\ell=0.15$ м и диаметром $d=0.1$ м, когда в качестве окислителя использовался жидкий кислород, а горючее – водород.

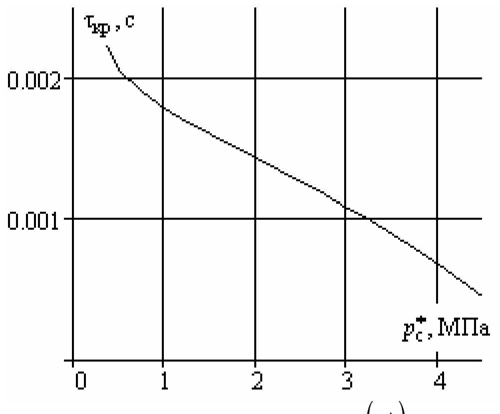

Рис. 3. График зависимости $\tau_{\text{кр}}(p_{\text{c}}^*)$

Выводы

Аналитически получено соотношение, определяющее критическое время запаздывания сгорания топлива, при превышении которого в камере сгорания ЖРД стационарный режим горения теряет устойчивость и самовозбуждаются автоколебания вибрационного горения. Также для камеры сгорания ЖРД с монотонно убывающей напорной характеристикой теоретически определена зависимость критического времени запаздывания сгорания от внутрикамерного давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крокко Л. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях / Л. Крокко, Чжен Синь-и. — М. : Изд-во ин. лит., 1958. — 351 с.
2. Мищенко Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. — М. : Наука, 1975. — 247 с.
3. Беляев Н. М. Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок / Беляев Н. М., Белик Н. П., Польшин А. В. — К. : Высшая школа, 1985. — 160 с.
4. Гоцуленко В. В. Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний / В.В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Сборник научн. трудов Днепродзержинского гос. техн. ун-та. — Д., 2009. — Вып. 1(11). — С. 95—100.
5. Гоцуленко В. В. Автоколебания внутрикамерной неустойчивости вибрационного горения в ЖРД, обусловленные нестационарностью истечения из реактивного сопла / В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Математическое моделирование. — 2007. — № 2 (17). — С. 55—58.
6. Казакевич В. В. Автоколебания (помпаж) в компрессорах: моногр. / В. В. Казакевич. М. : Машиностроение, 1974. — 264 с.
7. Ларинов В. М. Автоколебания газа в установках с горением / В. М. Ларинов, Р. Г. Зарипов. — Казань. : Изд-во казан. гос. техн. ун-та, 2003. — 327 с.
8. Гоцуленко В. В. Автоколебания в модели ЖРД, определяемые вырожденной системой уравнений с запаздывающим аргументом / В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Математическое моделирование. — 2008. — № 2 (19). — С. 44—46.
9. Гоцуленко В. В. Автоколивання в моделі РРД з дискретними параметрами при змінній величині феноменологічного запізнення згорання / В. В. Гоцуленко, В. М. Гоцуленко // Математичне моделювання. — 2009. — № 1 (20). — С. 44—47.
10. Гоцуленко В. В. Управление амплитудой автоколебаний вибрационного горения в жидкостном реактивном двигателе, путем решения системы уравнений, описывающих этот режим горения / В. В. Гоцуленко // Инженерно-физический журнал. — 2010. — Т. 83, № 3. — С. 496—501.

пост.13.03.14