

Математическая модель тепло- и массопереноса при нагреве “массивного” плоского слоя жидкости

А. Ф. РЫЖОВ, Н. С. МИЛАШЕНКО

Днепродзержинский государственный технический университет

Представлена аналитическая методика расчета температурного поля и кинетики испарения при нагреве термически “массивного” плоского слоя жидкости.

Представлена аналітична методика розрахунку температурного поля і кінетики випару при нагріві термічно “масивного” плоского шару рідини.

The analytical method of calculation of the temperature field and kinetics of evaporation is presented at heating thermally of “massive” flat layer of liquid.

Введение. При нагреве “массивного” слоя жидкости ($Bi > 0,1$), когда существует значительный перепад температур по его толщине, происходят сложные процессы тепло- и массообмена, которые взаимно влияют на энthalпию нагреваемой жидкости и интенсивность испарения. Нахождение поля температуры и массы испаряющейся жидкости связано с решением системы нелинейных уравнений тепло и массопереноса с подвижной границей.

Применяемые в настоящее время термографические методы исследования процессов тепломассопереноса при нагреве влажных тел [1] дают возможность получения большой информации из одного опыта (термограмма, кривая испаряемой массы, кривая скорости изменения массы). Вместе с тем, отсутствие разработанной теории этих методов не позволяет использовать весь объем информации, который содержат кинетические кривые, регистрируемые в опыте.

Целью работы является получение удобных для инженерных расчетов аналитических зависимостей, определяющих температурное поле слоя жидкости и интенсивность испарения, используя данные термографического метода исследования.

Постановка задачи. Рассматривается процесс нагрева неподвижного плоского слоя воды толщиной R_0 при постоянной температуре греющего воздуха t_c .

При проведении экспериментальных исследований процессов нагрева и испарения плоского слоя воды были использованы два “сосуда – близнеца” с теплоизолированными боковыми и донными поверхностями, которые одновременно нагревали в сушильном шкафу: в первом производили замеры температур, а во втором определяли убыль массы. Эксперимент проведен для следующих условий: масса нагреваемой воды $M_0 = 0,337$ кг; начальная толщина слоя $R_0 = 0,043$ м; начальная температура воды $t_0 = 15$ °С; температура греющей среды $t_c = 80$ °С; температура мокрого термометра $t_m = 33$ °С; диаметр сосуда с водой $d_c = 0,100$ м; поверхность нагрева $F_H = 0,00785$ м².

В результате проведенного эксперимента и анализа параметров внешнего теплообмена построены диаграммы (рис. 1а и 1б), характеризующие процесс нагрева плоского слоя воды в режиме $t_c = \text{const}$.

На рис. 1а представлены функции, определяющие температуру свободной $t_n(\tau)$, и противоположной

теплоизолированной $t_t(\tau)$ поверхности слоя, а также функцию массы испарившейся воды $M_{исп}(\tau)$ в процессе нагрева. На рис. 1б представлена тепловая диаграмма, определяющая функции тепловых потоков, проходящих через свободную поверхность слоя воды: теплового потока испарения $q_{исп}(\tau)$; теплового потока, затрачиваемого на нагрев воды $q_n(\tau)$ и суммарного теплового потока $q(\tau)$.

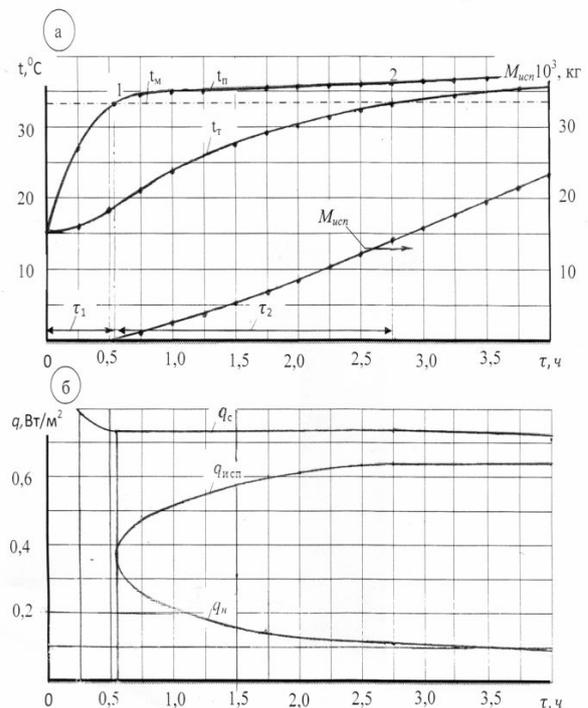


Рис. 1. Температурная (а) и тепловая (б) диаграммы процесса нагрева плоского слоя воды в режиме $t_c = \text{const}$

Из приведенных графиков следует, что процесс нагрева можно условно разделить на три этапа: - первый этап ($0 \leq \tau < \tau_1$) проходит при неизменной массе воды ($q_{исп} = 0$) и заканчивается, когда температура свободной поверхности равна температуре мокрого термометра t_m (точка 1 на рис. 1а);

- второй этап ($\tau_1 \leq \tau \leq \tau_1 + \tau_2$) проходит при возрастающей скорости испарения до максимальной, когда температура нижней теплоизолированной поверхности становится равной t_m (точка 2);

- третий этап ($\tau_1 + \tau_2 \leq \tau \leq \tau_k$) проходит при постоянном потоке испарения ($q_{\text{исп}}^{\text{max}} = \text{const}$) до конца процесса нагрева.

В результате проведенных экспериментальных исследований процесса нагрева плоского слоя воды при различных условиях теплообмена установлено, что во втором этапе:

- температура свободной поверхности слоя жидкости изменяется по закону $t_n(\tau) = t_m + b\sqrt{\tau}$, где b — постоянная;

- суммарный тепловой поток, проходящий через свободную поверхность слоя, постоянен ($q_2 = \text{const}$);

- отношение поверхностных тепловых потоков в конце второго этапа $f_q = q_2/q_{n,2} = \text{const}$ для любого режима нагрева (для воды $f_q = 7,0$).

Математическая постановка задачи в обобщенных переменных для первого этапа нагрева включает в себя:

- дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial X^2}, \quad 0 \leq X \leq 1; \quad 0 \leq Fo < Fo_1 \quad (1)$$

- граничные условия

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial X} \right)_{X=0} = 0; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial X} \right)_{X=1} = Bi_1 [1 - \vartheta_1(1, Fo)]; \quad (3)$$

- начальное условие

$$\vartheta_1(x, 0) = \vartheta_0, \quad (4)$$

где $\vartheta_1 = \frac{t_1(x, \tau)}{t_c}$; $X = \frac{x}{R_0}$; $Fo = \frac{a_1 \cdot \tau}{R_0^2}$;

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 \cdot R_0}{\lambda_1}; \quad \vartheta_0 = \frac{t_0}{t_c};$$

где $t_1(x, \tau)$ — температурная функция; x — координата; τ — время; t_0 — начальная температура воды; λ_1 , a_1 — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; t_c — температура греющей среды, α_1 — коэффициент теплообмена.

Постановка задачи для второго этапа нагрева:

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial X^2}, \quad 0 \leq X \leq 1 - H(Fo); \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial X} \right)_{X=0} = 0; \quad (6)$$

$$\vartheta_2(1, Fo) = \vartheta_m + B\sqrt{Fo}; \quad (7)$$

$$Ki_2 - \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial X} \right)_{X=1-H(Fo)} = \frac{dKo(Fo)}{dFo} = Ki_{\text{исп}}(Fo) = L \frac{dH(Fo)}{dFo}; \quad (8)$$

$$\vartheta_2(X, 0) = \vartheta_{t,1} + \Delta \vartheta_1 \cdot X^2; \quad H(Fo)_{Fo=0} = 0, \quad (9)$$

где $\vartheta_2 = \frac{t_2(\tau)}{t_c}$; $X = \frac{x}{R_0}$; $Fo = \frac{a_2 \cdot \tau}{R_0^2}$; $\vartheta_m = \frac{t_m}{t_c}$;

$$\vartheta_{t,1} = \frac{t_{t,1}}{t_c}; \quad \Delta \vartheta_1 = \frac{\Delta t_1}{t_c}; \quad Ki_{\text{исп}}(Fo) = \frac{q_{\text{исп}}(\tau) R_0}{\lambda_2 \cdot t_c};$$

B — постоянная; $Ki_2 = \frac{q_2 \cdot R_0}{\lambda_2 \cdot t_c}$ — критерий Кирпичева;

$Ko(Fo) = \frac{r \cdot M_{\text{исп}}(\tau)}{M_0 \cdot c_2 \cdot t_2}$ — критерий Коссовича;

$H(Fo) = \frac{h(\tau)}{R_0} = \frac{M_{\text{исп}}(\tau)}{M_0}$; $L = \frac{r}{c_2 \cdot t_c}$ — критерий фазового превращения;

$t_{t,1}$, Δt_1 — температура теплоизолированной поверхности и перепад температур по толщине слоя в конце первого этапа нагрева; c_2 — удельная массовая теплоемкость жидкости; λ_2 и a_2 — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности; r — удельная теплота парообразования; M_0 — начальная масса жидкости; $h(\tau)$ — функция толщины слоя испарившейся жидкости; q_2 — тепловой поток через свободную поверхность слоя; $q_{\text{исп}}(\tau)$ — тепловой поток испарения.

$$q_{\text{исп}}(\tau) = \frac{r}{F_n} \frac{dM_{\text{исп}}(\tau)}{d\tau} = R_0 \rho_2 r \frac{1}{M_0} \frac{dM_{\text{исп}}(\tau)}{d\tau} = \rho_2 \cdot r \frac{d}{d\tau} h(\tau). \quad (10)$$

Математическая постановка задачи для третьего этапа нагрева, проходящего при постоянной скорости испарения

$$\frac{\partial \vartheta_3}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial X^2}, \quad 0 \leq X \leq [1 - H_3(Fo)]; \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial X} \right)_{X=0} = 0; \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial X} \right)_{X=0-H_3(Fo)} = Bi_3 [1 - \vartheta_3(1, Fo)] - Ki_{\text{исп}}^{\text{max}}; \quad (13)$$

$$\vartheta_3(X, 0) = \vartheta_m + \Delta \vartheta_2 X^2; \quad H_3(0) = 0, \quad (14)$$

где $X = \frac{x}{R_2}$; $Fo = \frac{a_3 \cdot \tau}{R_2^2}$; $Bi_3 = \frac{a_3 \cdot R_2}{\lambda_3}$; $\Delta \vartheta_2 = \frac{\Delta t_2}{t_c}$;

$$\vartheta_m = \frac{t_m}{t_c}; \quad H = \frac{h_3(\tau)}{R_2}; \quad Ki_{\text{исп}}^{\text{max}} = \frac{q_{\text{исп}}^{\text{max}} \cdot R_2}{\lambda_3 \cdot t_c}.$$

Решение задачи. Решение поставленной задачи для первого этапа нагрева, когда отсутствует поток испарения со свободной поверхности слоя, представлено в [1]:

$$\frac{\vartheta(X, Fo) - \vartheta_0}{1 - \vartheta_0} = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\mu_m \cdot X) \exp(-\mu_m^2 Fo), \quad (15)$$

где μ_m — корни уравнения: $\text{ctg} \mu = \mu / \text{Bi}$;

$$A_m = \frac{2 \sin \mu_m}{\sin \mu_m \cdot \cos \mu_m + \mu_m^2}.$$

Распределение температуры по толщине слоя жидкости в конце первого этапа используется в качестве начального условия в последующем этапе нагрева.

Для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (5)—(9) второго этапа нагрева используется метод редукции и параметрического возмущения РПВ [2].

В соответствии с процедурой метода РПВ общее решение дифференциального уравнения (5) представляем в следующем виде:

$$\vartheta_2(X, Fo) = \psi(Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo), \quad (16)$$

где $\psi(Fo)$ — температурная функция нижней теплоизолированной поверхности слоя жидкости.

Решение (16) удовлетворяет начальному условию задачи, когда:

$$\psi(0) = \vartheta_{\tau,1}; \quad \frac{d}{dFo} \psi(0) = 2\Delta\vartheta_1; \quad \frac{d}{dFo} \psi(0)_{n \geq 2} = 0.$$

Удовлетворяя (16) граничным условиям (7)—(8), получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\psi(Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - H(Fo)]^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo) = \vartheta_M + B\sqrt{Fo}; \quad (17)$$

$$Ki_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-H)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo) = Ki_{исп.0}(Fo) = \frac{d}{dFo} Ko(Fo) = L \frac{d}{dFo} H(Fo); \quad (18)$$

Искомые функции $\psi(Fo)$, $H(Fo)$, $Ki_{исп.}(Fo)$, $Ko(Fo)$ представим в виде следующих рядов:

$$\begin{cases} \psi(Fo) = \psi_0(Fo) + \xi \psi_1(Fo) + \xi^2 \psi_2(Fo) + \dots; \\ H(Fo) = H_0(Fo) + \xi H_1(Fo) + \xi^2 H_2(Fo) + \dots; \\ Ki_{исп.}(Fo) = Ki_{исп.0}(Fo) + \xi Ki_{исп.1}(Fo) + \dots; \\ Ko(Fo) = Ko_0(Fo) + \xi Ko_1(Fo) + \xi^2 Ko_2(Fo) + \dots, \end{cases} \quad (19)$$

где ξ — условный (малый) параметр.

В уравнения (17)—(18) вводим малый параметр ξ :

$$\psi(Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \xi H)^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo) = \vartheta_M + \xi B\sqrt{Fo}; \quad (20)$$

$$Ki_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \xi H)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo) = Ki_{исп.}(Fo) = \frac{d}{dFo} Ko(Fo). \quad (21)$$

Сравнивая коэффициенты с одинаковыми показателями степени параметра ξ , находим последовательность линейных уравнений, определяющих искомые функции.

Нулевое приближение (ξ^0):

$$\psi_1(Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi_0(Fo) = \vartheta_M; \quad (22)$$

$$Ki_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi_0(Fo) = Ki_{исп.0}(Fo) = \frac{d}{dFo} Ko_0(Fo) = L \frac{d}{dFo} H_0(Fo), \quad (23)$$

с начальными условиями

$$\psi_0(0) = \vartheta_{\tau,1}; \quad \frac{d}{dFo} \psi_0(0) = 2\Delta\vartheta_1; \quad \frac{d^n}{dFo^n} \psi_0(0)_{n \geq 2} = 0. \quad (24)$$

Первое приближение (ξ^1):

$$\psi_1(Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi_1(Fo) - \quad (25)$$

$$- H_0(Fo) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi_0(Fo) = B\sqrt{Fo};$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n}{dFo^n} \psi_1(Fo) = Ki_{исп.1}(Fo) = \quad (26)$$

$$= \frac{d}{dFo} Ko_1(Fo) = L \frac{d}{dFo} H_1(Fo),$$

с начальными условиями:

$$\frac{d^n}{dFo^n} \psi_1(0) = 0,$$

где функции $\psi_1(Fo)$, $Ki_{исп.1}(Fo)$, $Ko_1(Fo)$, $H_1(Fo)$ определяют первую добавку к искомым функциям, найденных в нулевом приближении.

В результате решения системы (22)—(26) найдены зависимости, характеризующие тепловое состояние слоя жидкости и кинетику испарения, обеспечивающие достаточную точность для инженерных расчетов:

- температурная функция теплоизолированной поверхности

$$\psi(Fo) = \vartheta_{\tau,1} + 2\Delta\vartheta_1 \cdot G_1(Fo) + \int_0^{Fo} G_3(Fo - \omega) B\sqrt{\omega} d\omega, \quad (27)$$

$$\text{где } G_1(Fo) = \frac{1}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k^3} \exp(-\mu_k^2 Fo);$$

$$G_3(Fo) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \mu_k \exp(-\mu_k^2 Fo);$$

$$\mu_k = (2k-1)\pi/2;$$

- функция поверхностного теплового потока, затраченного на нагрев жидкости

$$Ki_n(Fo) = 2\Delta\vartheta_1 [1 - G_2(Fo)] + \frac{d}{dFo} \int_0^{Fo} G_4(Fo - \omega) B\sqrt{\omega} d\omega; \quad (28)$$

$$\text{где } G_2(Fo) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} \exp(-\mu_k^2 Fo);$$

$$G_4(Fo) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\mu_k^2 Fo);$$

- функция теплового потока испарения

$$Ki_{исп.}(Fo) = Ki_2 - Ki_n(Fo); \quad (29)$$

- величина максимального потока испарения

$$Ki_{исп.}^{\max} = Ki_2 \left(1 - \frac{1}{f_q} \right); \quad (30)$$

- функция, определяющая массу испарившейся жидкости

$$Ko(Fo) = \int_0^{Fo} Ki_{исп}(\omega) d\omega; \quad (31)$$

- функция толщины слоя испарившейся жидкости

$$H(Fo) = \frac{1}{L} Ko(Fo). \quad (32)$$

Аналогичным образом получено решение системы уравнений (11)—(14) для третьего этапа нагрева:

- температурная функция теплоизолированной поверхности

$$\vartheta_3(0, Fo) = \vartheta_m + 2\Delta\vartheta_2 Fo - 2\Delta\vartheta_0 \cdot F_3(Fo); \quad (33)$$

- температурная функция свободной поверхности

$$\vartheta_3(1, Fo) = \vartheta_{n,2} + 2\Delta\vartheta_2 Fo - 2\Delta\vartheta_2 \cdot F_4(Fo); \quad (34)$$

где $F_3(Fo) = Fo - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\mu_m^2} [1 - \exp(-\mu_m^2 Fo)]$;

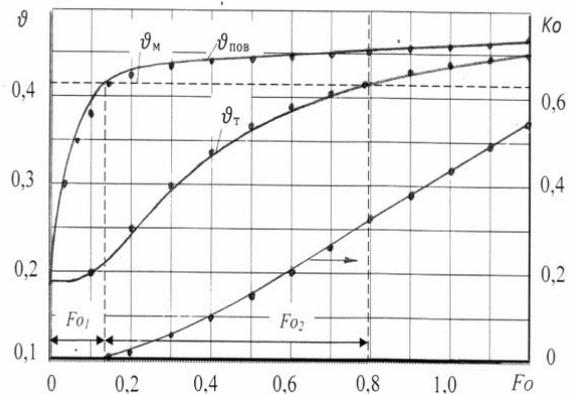
$$F_4(Fo) = Fo - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \cdot \cos \mu_m}{\mu_m^2} [1 - \exp(-\mu_m^2 Fo)];$$

μ_m — корни уравнения: $\text{ctg} \mu = \mu / Bi_3$;

$$A_m = \frac{2 \sin \mu_m}{\sin \mu_m \cdot \cos \mu_m + \mu_m^2}.$$

По приведенной аналитической методике выполнены расчеты процесса нагрева плоского слоя воды с исходными данными, соответствующим условиям проведенного эксперимента.

Сравнение расчетных данных, полученных в первом приближении, с экспериментальными (рис.2) показывает их достаточно хорошее совпадение.



● ● — экспериментальные данные

Рис.2. Сравнение расчетных и экспериментальных данных процесса нагрева плоского слоя воды

Выводы

Используя данные термографического метода исследования, получены удобные для инженерных расчетов аналитические зависимости, определяющие температурное поле плоского слоя воды и интенсивность испарения при радиационно-конвективном нагреве.

Приведенную методику можно использовать для анализа теплового состояния и кинетики испарения различных “чистых” жидкостей при их нагреве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория сушки. — М.: Энергия. 1968. — 472 с.
2. Любов Б. Я., Яловой Н. И. Математический анализ плавления тел // Изв. АН СССР. Металлы. — 1970. № 2. — С. 152—162.

пост.07.07.14

Математическое моделирование гашения вибраций грузоподъемных машин

А. М. КАБАКОВ, В. В. ЛИХЕНКО

Днепродзержинский государственный технический университет

Выполнены теоретические исследования динамических гасителей колебаний, разработаны системы автоматического регулирования коэффициента затухания.

Виконані теоретичні дослідження динамічних гасників коливань, розроблені системи автоматичного регулювання коефіцієнту загасання.

Theoretical investigation of dynamic vibration absorbers are designed automatic control system damping factor.

Повышение уровня колебаний на рабочем месте человека — оператор обусловлено увеличением рабочих и транспортных скоростей агрегатов. Поэтому одним из

условий, забезпечуючих комфортність на робочому місці людини-оператора, являється применение