МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

О взаимосвязи немодульных операций в системе остаточных классов

Ю. Д. ПОЛИССКИЙ

НИИ автоматизации черной металлургии

Рассмотрены методы выполнения немодульных операций над числами в системе остаточных классов. Приведенные методы основаны на едином подходе, благодаря чему обеспечивается реализация взаимосвязи немодульных операций.

Розглянуті методи виконання немодульних операцій над числами в системі залишкових класів. Приведені методи грунтовані на єдиному підході, завдяки чому забезпечується реалізація взаємозв'язку немодульних операцій.

The methods of implementation of unmodule operations are considered above numbers in the system of residual classes. The brought methods over are based on single approach, what realization of intercommunication is provided due to unmodule operations.

Введение. Одним из перспективных путей повышения быстродействия вычислительных структур является применение параллельной обработки данных с использованием новых принципов на основе представления данных в системе остаточных классов (СОК) [1]. СОК называется система счисления, в которой произвольное число N представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям $m_1, m_2, \dots, m_n$

$$N = \left[N(\bmod m_1), \dots, N(\bmod m_n) \right] \quad \text{или}$$

$N = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Здесь $\alpha_i = N(\bmod m_i)$ При этом, если все целые числа N принадлежат диапазону $[0, M)$, объем которого равен

$M = \prod_{i=1}^{n} m_i$, а модули m_i взаимно простые, то каждому набору $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ соответствует только одно число N из этого диапазона.

Пусть системой оснований полиадического кода также является система $m_1, m_2, \dots, m_n = 2$. Тогда число N в полиадическом коде представляется в виде

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \dots + \pi_i m_1 m_2 \dots m_{i-1} + \\ + \dots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \dots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \dots m_{n-1},$$

где $0 < \pi_i \le m_i - 1$.

Состояние вопроса. Основные арифметические операции в СОК делятся на две группы:

- модульные операции, которые выполняются параллельно и независимо над отдельными цифрами чисел,

- немодульные, или сложные, операции, для выполнения которых необходимо знание цифр операндов по всем разрядам. Естественно, такие операции являются медленными. К ним, в частности, относятся:

1. определение принадлежности числа данной половине диапазона,
2. деление на 2,
3. определение принадлежности числа данному интервалу,
4. деление на число, кратное одному из модулей,
5. сравнение чисел,
6. переполнение диапазона при сложении пары чисел,
7. переполнение диапазона и определение ранга числа при умножении пары чисел,
8. расширение диапазона представления чисел.

Между немодульными операциями существуют определенные взаимосвязи [2]. Поэтому, получив решение одной из них, можно найти решения остальных. Выбор базовой операции зависит от результатов исследований быстродействия и сложности немодульных операций СОК.

Основная часть. В предыдущих работах [3,4] в качестве базового рассмотрен наиболее эффективный на тот момент алгоритм, использовавший итеративное формирование приведенных остатков, представляющих собой результат вычитания из текущего остатка некоторых констант при табличной реализации алгоритмов. Однако в последнее время получено более эффективное решение по определению принадлежности числа данной половине либо данному интервалу диапазона [5], которые представляется целесообразным принять в качестве базового алгоритма.

1.Определение принадлежности числа данной половине диапазона

Суть полученного решения состоит в следующем. Будем отличать числа первой $R1$ и второй $R2$ половины диапазона

$$N \in \begin{cases} R1, 0 \le N < \dfrac{M}{2}, \\ R2, \dfrac{M}{2} \le N < M. \end{cases}$$

Доказано, что $\pi_n = 0 \to N \in R1$. Таким образом, процесс определения принадлежности числа данной половине диапазона сводится к определению π_n.

Известный подход состоит в следующем.

$$\alpha_1 = N(\mathrm{mod}\, m_1) = (\pi_1 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + $$
$$+ \cdots + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1})(\mathrm{mod}\, m_1) = \pi_1$$
$$N_1 = N - \alpha_1 = \left(0, \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \alpha_n - \alpha_1\right) = \pi_2 m_1 +$$
$$+ \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \cdots + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$$

т.е. число N_1 кратно m_1. При этом значения остатков по некоторым другим n_1 модулям также может оказаться равным нулю. Разделив N_1 на произведение модулей, для которых значения остатков равны нулю, уменьшаем на n_1+1 количество разрядов. После выполнения аналогичных действий получаем π_n.

Обратным кодом $\bar{\alpha}_i$ остатка α_i называется число $\bar{\alpha}_i = (m_i - 1) - \alpha_i$, и $N_1 = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ является представлением числа $N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$ в обратном коде, т.е. $\bar{N} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$.

Обратным кодом $\bar{\pi}_i$ позиционной характеристики π_i называется число $\bar{\pi}_i = (m_i - 1) - \pi_i$, и

$$N_1 = \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 m_1 + \ldots + \bar{\pi}_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} +$$
$$+ \cdots + \bar{\pi}_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \bar{\pi}_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$$

является представлением числа

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} +$$
$$+ \cdots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$$

в обратном коде, т.е.

$$\bar{N} = \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 m_1 + \ldots + \bar{\pi}_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} +$$
$$+ \cdots + \bar{\pi}_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \bar{\pi}_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1}$$

По новому алгоритму осуществляется одновременное представление чисел в прямом и обратном кодах с выбором в качестве активного того из них, в котором один или несколько остатков равны нулю. При этом при равновероятном распределении чисел диапазона M возможность того, что хотя бы один разряд числа N равен нулю,

$$p^1{}_0 = 1 - ((1 - \frac{1}{m_1}) \times (1 - \frac{1}{m_2}) \times \ldots \times (1 - \frac{1}{m_{n-1}}))^2,$$

Например, для системы модулей

$17,13,11,7,5,3,2$ $p^1{}_0 = 0,87$.

2.Деление на 2

Решение задачи деления на два на основе определения принадлежности числа данной половине диапазона сводится к следующему. Принимаем $\varepsilon_n = 0$, где $E = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\right)$ - частное от деления N_1 на N_2, и выполняем процесс определения π_n по изложенному алгоритму. Так как $E \in R1$, то, если $\pi_n = 0$, результат $E = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, 0\right)$. Если же $\pi_n = 1$, результат $E = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, 1\right)$.

3.Определение принадлежности числа данному интервалу.

Разобьем диапазон M на m_n интервалов длины $m_1 m_2 \ldots m_{n-2} m_{n-1}$ каждый.

$$N \in \begin{cases} P_0, 0 \le N < \dfrac{M}{m_n}, \\ P_1, \dfrac{M}{m_n} \le N < \dfrac{2M}{m_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_t, \dfrac{tM}{m_n} \le N < \dfrac{(t+1)M}{m_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{m_n - 1}, \dfrac{(m_n - 1)M}{m_n} \le N < M. \end{cases}$$

Здесь P_t - t-й интервал, $t = 0,1,2,\ldots,m_n - 1$. Доказано: значение π_n совпадает с номером интервала.

4. Деление на число, кратное одному из модулей.

Пусть в системе с основаниями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ даны два числа $N_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $N_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, и пусть $E = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\right)$ – частное от деления N_1 на N_2. Тогда, если деление точно выполнимо, $\varepsilon_i = (\dfrac{\alpha_i}{\beta_i})(\mathrm{mod}\, m_i)$.

Пусть число N_2 кратно модулю m_r. Тогда все остатки частного, кроме остатка по модулю m_r, определяются формальным делением остатков α_i на остатки β_i, $i \ne r$. Для модуля m_r имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$, которую требуется раскрыть.

Пусть системой оснований полиадического кода также является система $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Тогда число E в полиадическом коде представляется в виде

$$E = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} +$$
$$+ \cdots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1},$$

где $0 < \pi_i \le m_i - 1$.

Результат E деления N_1 на N_2, находится в нулевом интервале, т.е. $\pi_n = 0$.

Сущность алгоритма состоит в следующем. Формируем регистр из $n-1$ разрядов для записи остатков $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ и m_n разрядов для записи остатков $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_n = 1, \varepsilon_n = 2, \ldots, \varepsilon_n = m_n - 1$. Определяем π_n и выбираем то из значений $\varepsilon_n = 0, \varepsilon_n = 1, \varepsilon_n = 2, \ldots, \varepsilon_n = m_n - 1$, для которого $\pi_n = 0$.

5.Сравнение чисел.

При сравнении, если числа N_1 и N_2 принадлежат к разным половинам, результат $N_1 < N_2$ очевиден. Если же N_1 и N_2 числа одной половины, то составляется разность $\Delta = N_1 - N_2$ и определяется принадлежность Δ к данной половине. В том случае, если Δ принадлежит к первой половине, $N_1 > N_2$. При этом определение принадлежности данной половине диапазона для чисел N_1, N_2, Δ может выполняться одновременно.

6. Переполнение диапазона при сложении пары чисел.

Определение выхода результатов операции сложения пары чисел за пределы диапазона $\left[0, M\right)$ состоит в следующем.

Пусть $S = N_1 + N_2$.

$$S \in \begin{cases} D1, S < M, \\ D2, S \geq M \end{cases}.$$

Если $(N_1 \in R1) \cap (N_2 \in R1) \Rightarrow D1$, если $(N_1 \in R2) \cap (N_2 \in R2) \Rightarrow D2$. Наконец, рассмотрим случай $(N_1 \in R1) \cap (N_2 \in R2)$.

$$N_1 \in R1 \Rightarrow 0 \leq N_1 < \frac{M}{2}.$$

$$N_2 \in R2 \Rightarrow \frac{M}{2} \leq N_2 < M.$$

Тогда $\dfrac{M}{2} \leq S < M + \dfrac{M}{2}$.

Отсюда результат сложения не выходит за пределы диапазона $\left[0, M\right)$, если $\dfrac{M}{2} \leq S < M$, т.е., если $S \in R2$, и результат сложения выходит за пределы диапазона $\left[0, M\right)$, если $\dfrac{M}{2} \leq S < M + \dfrac{M}{2}$ или $0 \leq S < \dfrac{M}{2}$, т.е., если $S \in R1$, где $R1$ и $R2$ - первая и вторая половины диапазона чисел.

7. Переполнение диапазона и определение ранга числа при умножении пары чисел.

Диапазон $\left[0, M\right)$ будем называть рабочим диапазоном $M_{ð}$. Введем дополнительные модули $m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots, m_r$, определяющие контрольный диапазон $M_{\hat{e}}$, объем которого равен $M_{\hat{e}} = m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_r$.

Будем рассматривать числа рабочего диапазона на всем диапазоне $M = M_{ð} * M_{\hat{e}}$, $M = m_1 m_2 \ldots m_n m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_r$. В этом случае $N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_r\right)$. Разобьем диапазон M на $M_{\hat{e}}$ интервалов длины $M_{ð}$ каждый.

$$N \in \begin{cases} P_0, 0 \leq N < \dfrac{M}{m_{n+1} \ldots m_r}, \\ R_N = (\tilde{\alpha}_{n+1} = 0, \tilde{\alpha}_{n=2} = 0, \ldots, \tilde{\alpha}_r = 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_t, \dfrac{tM}{m_{n+1} \ldots m_r} \leq N < \dfrac{(t+1)M}{m_{n+1} \ldots m_r}, \\ R_N = ((t) \bmod (m_{n+1}), \ldots, (t) \bmod (m_r)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{m_{n+1} \ldots m_r - 1}, \dfrac{(m_{n+1} \ldots m_r - 1)M}{m_{n+1} \ldots m_r} \leq N < M, \\ R_N = ((m_{n+1} \ldots m_r - 1) \bmod (m_{n+1}), \\ \ldots, (m_{n+1} \ldots m_r - 1) \bmod (m_r)). \end{cases}$$

Здесь P_t - t --й интервал, $t = 0, 1, 2, \ldots, m_r - 1$. R_N - ранг числа N, т.е. целое положительное число, показывающее, во сколько раз был превзойден рабочий диапазон $\left[0, M_{ð}\right)$. Как следует из определения ранга числа, последний совпадает с номером интервала.

Таким образом, задача определение выхода результатов операций умножения за пределы диапазона $\left[0, M_{ð}\right)$ может быть сведена к задаче определения принадлежности числа данному интервалу.

8. Расширение диапазона представления чисел.

Диапазон $\left[0, M\right)$ будем называть рабочим диапазоном $M_{ð}$. Введем дополнительные модули $m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots, m_r$ и будем рассматривать числа рабочего диапазона на всем диапазоне $M = m_1 m_2 \ldots m_n m_{n+1} m_{n+2} \ldots m_r$. В этом случае $N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_r\right)$.

Сущность алгоритма состоит в следующем.

Формируем регистр из n разрядов для записи остатков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и m_{n+1} разрядов для записи остатков $\alpha_{n+1} = 0, \alpha_{n+1} = 1, \alpha_{n+1} = m_{n+1} - 1$, …, m_r разрядов для записи остатков $\alpha_r = 0, \alpha_r = 1, \alpha_r = m_r - 1$.

Определяем $\pi_{n+1}, \pi_{n+2}, \ldots, \pi_r$ и выбираем те из значений $\alpha_{n+1} = 0, \alpha_{n+1} = 1, \alpha_{n+1} = m_{n+1} - 1$, …, $\alpha_r = 0, \alpha_r = 1, \alpha_r = m_r - 1$, для которых $\pi_{n+1} = 0, \pi_{n+2} = 0, \ldots, \pi_r = 0$.

Выводы

Рассмотрены немодульные операции над числами в системе остаточных классов. Реализация каждой из этих операций основана на определении принадлежности числа данной половине либо данному интервалу диапазона чисел. Показана взаимосвязь немодульных операций, благодаря которой решение одной из них приводит к решению остальных операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Акушский, Д. И. Юдицкий. Машинная арифметика в остаточных классах. — М. : Советское радио. 1968. — 440 с.
2. Ю. Д. Полисский. Формирование позиционных характеристик при табличной реализации алгоритмов системы остаточных классов // Сборник трудов конференции «Моделирование-2008, SIMULATION-2008». — Т. 2. — 14-16 мая 2008. — Киев. — С. 489—495.
3. Ю. Д. Поліський. Методи порівняння чисел у системі залишкових класів // Науковий вісник НГУ. — 2007. — №1. — С. 63—66.
4. Ю. Д. Полисский. Определение в системе остаточных классов принадлежности числа данной половине диапазона // Науковий вісник НГУ. — 2007. — № 2. — С. 66—69.
5. Ю. Д. Полисский Алгоритм выполнения сложных операций в системе остаточных классов с помощью представления чисел в обратных кодах // Электронное моделирование. — 2014. — Т. 36. — №4. — С. 117—122.

пост.09.10.2014

Про дискретність спектру диференціального оператора, породженого граничною задачею в прямокутній області зі спектральним параметром в граничних умовах

Л. О. ОЛІЙНИК

Дніпродзержинський державний технічний університет

Для лінійного оператора, що є розширенням симетричного оператора з виходом в більш широкий гільбертовий простір, досліджуються умови дискретності спектру. Наведено модельний приклад диференціального оператора, що породжується граничною задачею для рівняння Лапласа у прямокутній області з спектральним параметром як в рівнянні та к і в граничних умовах.

Для линейного оператора, являющегося расширением симметрического оператора с выходом в более широкое гильбертово пространство, исследуются условия дискретности спектра. Приведен модельный пример дифференциального оператора, порожденного граничной задачей для уравнения Лапласа в прямоугольной области со спектральным параметром, как в уравнении, так и в граничных условиях.

For the linear operator which is expansion of a symmetrical operator with an exit into wider Hilbert space, conditions of discreteness of a spectrum are investigated. The pattern example of the differential operator generated by a boundary problem for the equation of Laplace in rectangular area with spectral parametre, both in the equation, and in boundary conditions is exemplified.

Наявність дискретного спектру у оператора породжуваного граничною задачею дає змогу побудувати її розв'зок у вигляді розкладу по базису, що складається з власних функції. Тому дослідження структури спектру таких операторів є актуальною задачею. В даній роботі досліджено умови існування дискретного спектру оператора породжуваного граничною задачею для оператора Лапласа у прямокутній області з граничними умовами, що містять спектральний параметр. На модельному прикладі доведено, що при порушенні знайдених умов спектр оператора не може бути дискретним.

I. Нехай $\wp$-сепарабельний гільбертовий простір. T лінійний, замкнений, симетричний оператор з щільною областю визначення та рівними скінченими або нескінченими дефектними числами.

Нагадаємо, що трійка ([2]) $\{H, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, де H – гільбертовий простір, а Γ_j ($i = 1,2$) лінійні відображення з $D(T^*)$ в H, називається простором граничних значень оператора T, якщо:

а) для довільних f та g з $D(T^*)$ є справедливою рівність

$$\left(T^* f, g\right)_{\wp} - \left(f, T^* g\right)_{\wp} = \left(\Gamma_1 f, \Gamma_2 g\right)_H - \left(\Gamma_2 f, \Gamma_1 g\right)_H;$$

б) для довільних F_1 та F_2 з H існує $f \in D(T^*)$ такий, що $\Gamma_1 f = F_1$, $\Gamma_2 f = F_2$.

Нехай $D \subset D(T^*)$ підмножина області визначення спряженого до T оператора така, що $\overline{D} = \wp$, $\overline{T^*\big|_D} = T^*$, $\overline{T\big|_{D \cap D(T)}} = T$.

Позначимо $H_0 = \Gamma_1 D \cup \Gamma_2 D$, де $\Gamma_i D = \{\Gamma_i D, f \in D\}$, $i = 1,2$, і $H_0 \subset H$ ($\{H, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ - простір граничних значень оператора T). Неважко переконатися у тому, що $\overline{H_0} = H$.

Нехай B_{ik} ($i,k = 1,2$)–лінійні обмежені оператори, що діють в H. Позначимо B операторну матрицю, що діє в прямій сумі $H \oplus H$ і породжується операторами B_{ik}.

У прямій сумі гільбертових просторів $\wp \oplus H$,