ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Акушский, Д. И. Юдицкий. Машинная арифметика в остаточных классах. — М. : Советское радио. 1968. — 440 с.
2. Ю. Д. Полисский. Формирование позиционных характеристик при табличной реализации алгоритмов системы остаточных классов // Сборник трудов конференции «Моделирование-2008, SIMULATION-2008». — Т. 2. — 14-16 мая 2008. — Киев. — С. 489—495.
3. Ю. Д. Поліський. Методи порівняння чисел у системі залишкових класів // Науковий вісник НГУ. — 2007. — №1. — С. 63—66.
4. Ю. Д. Полисский. Определение в системе остаточных классов принадлежности числа данной половине диапазона // Науковий вісник НГУ. — 2007. — № 2. — С. 66—69.
5. Ю. Д. Полисский Алгоритм выполнения сложных операций в системе остаточных классов с помощью представления чисел в обратных кодах // Электронное моделирование. — 2014. — Т. 36. — №4. — С. 117—122.

пост.09.10.2014

Про дискретність спектру диференціального оператора, породженого граничною задачею в прямокутній області зі спектральним параметром в граничних умовах

Л. О. ОЛІЙНИК

Дніпродзержинський державний технічний університет

Для лінійного оператора, що є розширенням симетричного оператора з виходом в більш широкий гільбертовий простір, досліджуються умови дискретності спектру. Наведено модельний приклад диференціального оператора, що породжується граничною задачею для рівняння Лапласа у прямокутній області з спектральним параметром як в рівнянні та к і в граничних умовах.

Для линейного оператора, являющегося расширением симметрического оператора с выходом в более широкое гильбертово пространство, исследуются условия дискретности спектра. Приведен модельный пример дифференциального оператора, порожденного граничной задачей для уравнения Лапласа в прямоугольной области со спектральным параметром, как в уравнении, так и в граничных условиях.

For the linear operator which is expansion of a symmetrical operator with an exit into wider Hilbert space, conditions of discreteness of a spectrum are investigated. The pattern example of the differential operator generated by a boundary problem for the equation of Laplace in rectangular area with spectral parametre, both in the equation, and in boundary conditions is exemplified.

Наявність дискретного спектру у оператора породжуваного граничною задачею дає змогу побудувати її розв'зок у вигляді розкладу по базису, що складається з власних функції. Тому дослідження структури спектру таких операторів є актуальною задачею. В даній роботі досліджено умови існування дискретного спектру оператора породжуваного граничною задачею для оператора Лапласа у прямокутній області з граничними умовами, що містять спектральний параметр. На модельному прикладі доведено, що при порушенні знайдених умов спектр оператора не може бути дискретним.

I. Нехай $\wp$-сепарабельний гільбертовий простір. T лінійний, замкнений, симетричний оператор з щільною областю визначення та рівними скінченими або нескінченими дефектними числами.

Нагадаємо, що трійка ([2]) $\{H,\Gamma_1,\Gamma_2\}$, де H – гільбертовий простір, а Γ_j ($i=1,2$) лінійні відображення з $D(T^*)$ в H, називається простором граничних значень оператора T, якщо:

а) для довільних f та g з $D(T^*)$ є справедливою рівність

$$\left(T^*f,g\right)_\wp-\left(f,T^*g\right)_\wp=\left(\Gamma_1 f,\Gamma_2 g\right)_H-\left(\Gamma_2 f,\Gamma_1 g\right)_H;$$

б) для довільних F_1 та F_2 з H існує $f\in D(T^*)$ такий, що $\Gamma_1 f=F_1$, $\Gamma_2 f=F_2$.

Нехай $D\subset D(T^*)$ підмножина області визначення спряженого до T оператора така, що $\overline{D}=\wp$, $\overline{T^*}\Big|_D=T^*$, $\overline{T}\Big|_{D\cap D(T)}=T$.

Позначимо $H_0=\Gamma_1 D\cup\Gamma_2 D$,

де $\Gamma_i D=\{\Gamma_i D, f\in D\}$, $i=1,2$, і $H_0\subset H$ ($\{H,\Gamma_1,\Gamma_2\}$ - простір граничних значень оператора T). Неважко переконатися у тому, що $\overline{H_0}=H$.

Нехай B_{ik} ($i,k=1,2$)–лінійні обмежені оператори, що діють в H. Позначимо B операторну матрицю, що діє в прямій сумі $H\oplus H$ і породжується операторами B_{ik}.

У прямій сумі гільбертових просторів $\wp\oplus H$, елементи якої позначатимемо $\widetilde{F}=\{f,F\}$, $f\in\wp$, $F\in H$, розглянемо оператор T'_B:

$$D(T'_B)=\left\{\widetilde{F}\in\wp\oplus H, f\in D, F=B_{11}\Gamma_1 f+B_{12}\Gamma_2 f\right\},$$

$$T'_B\widetilde{F}=\left\{T^*f,\ B_{21}\Gamma_1 f+B_{22}\Gamma_2 f\right\}.$$

Цей оператор допускає замикання T_B, яке є розширенням оператора T з виходом у гільбертовий простір $\wp\oplus H$ ([2]).

Позначимо $J=\begin{pmatrix}0 & -iI\\ iI & 0\end{pmatrix}$. Цей оператор діє в прямій сумі $H\oplus H$ і задовольняє умовам $J^2=I_{H\oplus H}$, $J^*=J$, а, отже, визначає у просторі $H\oplus H$ індефінітну метрику. $\hat{N}=\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}$ – обмежений додатній оператор.

Має місце теорема ([1]).

Т е о р е м а 1. Оператор T_B, що є замиканням оператора T'_B, самоспряжений у просторі $\wp\oplus H$, тоді й тільки тоді, коли у прямій сумі $H\oplus H$

$$BNJNB^*=J=B^*NJNB.$$

Розглянемо задачу на власні значення

$$-y''+Ay=\lambda y, \qquad (1)$$

$$-\left[\beta_1 y(0)+\beta_2 y'(0)\right]_{t=0}=\lambda\left[Q_1 y(0)+Q_2 y'(0)\right]_{t=0}, \qquad (2)$$

$$y(b)=0 \qquad (3)$$

де оператори Q_k - лінійні самоспряжені додатновизначені оператори в гільбертовому просторі H, що задовольняють умовам

1. $Q_k H_\infty\subseteq H_\infty$, $\overline{Q_k\big|_{H_\infty}}=Q_k$ $\left(H_\infty=\bigcap\limits_n D\left(A^n\right)\right)$

2. $Q_k A=AQ_k$

Позначимо $L_{0,b}$ - замикання в $L_2(H,[0,b])$ ($L_2(H,[0,b])$ - гільбертовий простір вектор-функцій із значеннями в гільбертовому просторі H, інтегрованих з квадратом модуля на відрізку $[0,b]$) оператора $L'_{0,b}$, породжуваного диференціальним виразом $l(x)=-y''+Ay$ з областю визначення $D\left(L'_{0,b}\right)=\left\{x(\xi)\in C_0^\infty(H,[0,b]),\ y(b)=0\right\}$.

L_0 є мінімальним оператором, породженим диференціальним виразом $l(x)=-y''+Ay$ в просторі $L_2(H,[0,b])$.

Простір граничних значень оператора $L_{0,b}$ має вигляд $\{H,\Gamma_1,\Gamma_2\}$, де $\Gamma_1 y=-y_0$, $\Gamma_2 y=y'_0$, і $y_0=A^{-\frac{1}{4}}y(0)$, $y'_0=A^{\frac{1}{4}}\left(y'(0)+A^{\frac{1}{2}}y(0)\right)$.

Нехай $T=L_0$, $H_0=H_\infty\oplus H_\infty$, $\widetilde{T}=L_D$, $D=C_0^\infty(H_\infty,[0,b])$, L_D - розширення Діріхле оператора L_0.

У разі, коли $\beta_1=0$, $Q_2=0$, $\beta_2=1$

$$B_{11}=QA^{\frac{1}{4}},\quad B_{12}=0,\quad B_{21}=A^{\frac{3}{4}},\quad B_{22}=A^{-\frac{1}{4}}$$

задача (1)-(3) набере вигляду

$$-y''+Ay=\lambda y, \qquad (4)$$

$$-y'(0)\big|_{t=0}=\lambda Q_1 y(0)\big|_{t=0}, \qquad (5)$$

$$y(b)=0 \qquad (6)$$

Для цієї задачі має місце наступний факт.

Теорема1. Якщо оператор A^{-1} компактний, то задача (4)-(6) має дійсний дискретний спектр тоді і лише тоді коли оператор $QA^{-\frac{1}{2}}$ компактний.

У разі, коли $\beta_1=1$, $Q_1=0$, $\beta_2=0$

$$B_{11}=QA^{\frac{3}{4}},\quad B_{12}=QA^{-\frac{1}{4}},\quad B_{21}=A^{-\frac{1}{4}},\quad B_{22}=0,$$

задача (1)-(3) набере вигляду

$$-y''+Ay=\lambda y, \qquad (7)$$

$$-y(0)\big|_{t=0}=\lambda Q_1 y'(0)\big|_{t=0}, \qquad (8)$$

$$y(b)=0 \qquad (9)$$

Для цієї задачі має місце наступний факт.

Теорема2. Задача (7)-(9) має дійсний спектр, який не може бути дискретним.

Наведені теореми ілюструються наступними модельними граничними задачами.

Нехай A - самоспряжений додатній оператор у просторі $H=L_2[0,a]$, породжений виразом $-x''$ и граничними умовами: $x(0)=x(a)=0$ і оператор $Q_k=I$.

1. Задача (4)-(6) у прямокутній області $\Omega=\{(x,y):0\le x\le a;\ 0\le y\le b\}$ набере вигляду

$$-\Delta U(x,y)=\lambda U(x,y) \qquad (10)$$

$$\left[\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}+\lambda U(x,y)\right]\Bigg|_{y=0}=0 \qquad (11)$$

$$U(x,y)\big|_{y=b}=U(x,y)\big|_{x=0}=U(x,y)\big|_{x=a}=0 \qquad (12)$$

де Δ - оператор Лапласа, $U(x,y)\in L_2([0,a]\times[0,b])$.

З теореми 1 випливає, що ця задача має злічену кількість дійсних власних значень $\lambda_{kn}=k^2\pi^2-\mu_{kn}^2$, де μ_{kn} – розв'язки рівняння $\operatorname{tg}\mu=\dfrac{\mu}{k^2\pi^2-\mu^2}$, яке при кожному фіксованому k має злічену кількість коренів. Власні функції цієї задачі мають вигляд:

$$Y_{kn}(y)=-\operatorname{tg}\sqrt{k^2\pi^2-\mu_{kn}}\cos\sqrt{k^2\pi^2-\mu_{kn}}\,y+ +\sin\sqrt{k^2\pi^2-\mu_{kn}}\,y$$

Необхідно відмітити, що λ_{kn} не зростаюча обмежена послідовність, яка прямує до нуля. Це означає, що оператор обернений до початкового, є компактним оператором, тобто початковий оператор, що відповідає досліджуваній задачі має дискретний спектр.

2. Задача (7)-(9) у прямокутній області $\Omega=\{(x,y):0\le x\le a;\ 0\le y\le b\}$ набере вигляду

$$-\Delta U(x,y)=\lambda U(x,y) \qquad (13)$$

$$\left[U(x,y) + \lambda \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right]\Bigg|_{y=0} = 0 \qquad (14)$$

$$U(x,y)\big|_{y=b} = U(x,y)\big|_{x=0} = U(x,y)\big|_{x=a} = 0 \qquad (15)$$

де Δ - оператор Лапласа, $U(x,y) \in L_2([0,a] \times [0,b])$.

З теореми 2 випливає, що ця задача має дійсні власні значення, але не може мати дискретного спектру. Задача має злічену кількість дійсних власних значень $\lambda_{kn} = k^2\pi^2 - \mu_{kn}^2$, де μ_{kn} – розв'язки рівняння $tg\mu = k^2\pi^2\mu - \mu^3$, яке при кожному фіксованому *к* має злічену кількість коренів. Власні функції цієї задачі мають вигляд:

$$Y_{kn}(y) = -tg\sqrt{k^2\pi^2 - \mu_{kn}} \cos\sqrt{k^2\pi^2 - \mu_{kn}}\, y + \\ + \sin\sqrt{k^2\pi^2 - \mu_{kn}}\, y$$

Неважко переконатись, послідовність власних значень λ_{kn} є зростаючою необмеженою, отже спектр оператора не є обмеженою множиною дійсних чисел, тому обернений оператор, що дає розв'язок задачі не є обмеженим, а, отже, не може бути компактним.

Висновок

Отримані результати, підтверджені модельними прикладами, показують,що для нестандартних граничних задач, до яких відносяться задачі зі спектральними параметром як в рівнянні так і в граничних умовах, спектр не може бути дискретним, якщо спектральний параметр в граничних умовах входить до доданку з частинною похідною (14).

ЛІТЕРАТУРА

1. Олійник Л. О. Узагальнені розширення симетричного оператора та граничні задачі з спектральним параметром для диференціально-операторних рівнянь. Київ : Препр.Київ НМКВО. 1991.
2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев : Наук. думка. 1984. — 284 с.

пост. 04.11.2014