

$$\left[ U(x, y) + \lambda \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (14)$$

$$U(x, y)_{y=b} = U(x, y)_{x=0} = U(x, y)_{x=a} = 0 \quad (15)$$

де  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $U(x, y) \in L_2([0, a] \times [0, b])$ .

З теореми 2 випливає, що ця задача має дійсні власні значення, але не може мати дискретного спектру. Задача має злічену кількість дійсних власних значень  $\lambda_{kn} = k^2 \pi^2 - \mu_{kn}^2$ , де  $\mu_{kn}$  - розв'язки рівняння  $\operatorname{tg} \mu = k^2 \pi^2 \mu - \mu^3$ , яке при кожному фіксованому  $k$  має злічену кількість коренів. Власні функції цієї задачі мають вигляд:

$$Y_{kn}(y) = -\operatorname{tg} \sqrt{k^2 \pi^2 - \mu_{kn}} \cos \sqrt{k^2 \pi^2 - \mu_{kn}} y + \sin \sqrt{k^2 \pi^2 - \mu_{kn}} y$$

Неважно переконатись, послідовність власних значень  $\lambda_{kn}$  є зростаючою необмеженою, отже спектр оператора не є обмеженою множиною дійсних чисел, тому обернений оператор, що дає розв'язок задачі не є обмеженим, а, отже, не може бути компактним.

## Висновок

Отримані результати, підтвержені модельними прикладами, показують, що для нестандартних граничних задач, до яких відносяться задачі зі спектральними параметром як в рівнянні так і в граничних умовах, спектр не може бути дискретним, якщо спектральний параметр в граничних умовах входить до доданку з частинною похідною (14).

## ЛІТЕРАТУРА

1. Олійник Л. О. Узагальнені розширення симетричного оператора та граничні задачі з спектральним параметром для диференціально-операторних рівнянь. Київ : Препр.Київ НМКВО. 1991.
2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев : Наук. думка. 1984. — 284 с.

пост.04.11.2014

## Аналитический расчет температур и термических напряжений при граничных условиях I рода

А. Д. ГОРБУНОВ, С. В. УКЛЕИНА

Днепропетровский государственный технический университет

Разработана инженерная методика аналитического расчета времени инерционного периода в линейных задачах нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при граничных условиях I рода. Получены достаточно простые, точные и приближенные формулы для расчетов полей температур и термических напряжений на начальной и квазистационарной стадиях.

Розроблена інженерна методика аналітичного розрахунку інерційного періоду в лінійних задачах нагріву (охолодження) тіл правильної геометричної форми при граничних умовах I рода. Отримані прості, точні і наближені формули для розрахунку полів температур і термічних напруг на початковій і квазістаціонарній стадіях.

The engineering technique of the inertial period analytic calculation in linear problems of regular geometric shape solids heating (cooling) under the boundary conditions of I type was developed. The simplest precise and approximate expressions for temperature fields and thermal tensions calculations at initial and quasistationary stages were obtained.

**Анализ публикаций.** К настоящему времени существует достаточно много точных [1] и приближенных методик [2—4] расчета процессов нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии, однако, например, в [1, 2] нет формул по определению времени инерционного периода, а в [3, 4] — по расчету среднemasсовых температур, без знания которых невозможно определить термические напряжения.

Получим решения, свободные от указанных недостатков.

**Постановка задачи.** Математическая постановка задачи симметричного нагрева (охлаждения) тел простой геометрической формы от начальной температуры  $T_0$  до  $T_c$  имеет вид (см. рис. 1).

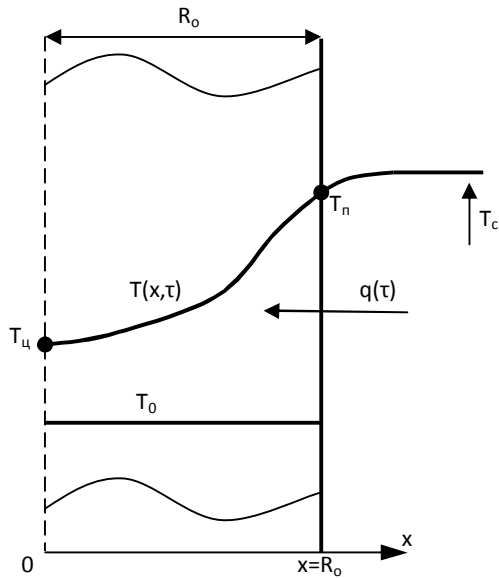


Рис.1. К постановке задачи теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \vartheta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\vartheta(X, 0) = \vartheta_0 = 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\vartheta(1, Fo) = \vartheta_n(Fo) = 0, \quad (4)$$

где  $\vartheta = (T(x, \tau) - T_c) / \Delta T_0$ ;  $\Delta T_0 = (T_0 - T_c)$  — максимально возможный перепад температур, °C;  $\vartheta_n(Fo) = \vartheta(1, Fo)$  — относительная температура на поверхности;  $X = x/R_0$ ;  $R_0$  — характерный размер тела, м;  $Fo = a\tau/R_0^2$  — число Фурье;  $k$  — фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара.

При рассмотрении инерционной (начальной) стадии, когда процессу нагрева (охлаждения) подвержены только тонкие поверхностные слои массивного тела, последнее можно считать полубесконечным плоским телом, перенеся начало координат на поверхность (см. рис.2) и ввести известное [3] понятие о толщине термического (прогретого) слоя переменной толщины  $\delta(\tau)$ . Считается, что при  $x \geq \delta(\tau)$  температура в этих точках отличается не более, чем на  $\varepsilon_n = 5\%$  от первоначальной  $T_0$ , где  $\varepsilon_n$  можно трактовать как степень прогрева центра тела.

Чаще всего, для большинства задач реализуется так называемый «корневой» закон изменения термического слоя во времени  $\delta(\tau) = 2u_0\sqrt{a\tau}$  или в безразмерном виде:

$$S(Fo) = \frac{\delta(\tau)}{R_0} = 2u_0\sqrt{Fo}, \quad (5)$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ ,  $u_0$  — постоянная величина, существенно зависящая от геометрии тел и вида граничного условия (4).

**Решение задачи.** Получим решение несколькими способами.

1) Приближенный метод Ю.С. Постольника.

Следуя [3], задаемся параболическим распределением температуры в пределах термического слоя

$$\theta(X, Fo) = \theta_n(Fo) \cdot (1 - U)^2, \quad 0 \leq x \leq \delta(\tau), \quad (6)$$

где  $U(X, Fo) = \frac{X}{S(Fo)} = \frac{x}{\delta(\tau)}$ ;  $0 \leq U \leq 1$ ;  $\theta = T(x, \tau) / T_M$ ;

$T_M$  — масштабная (характерная) температура.

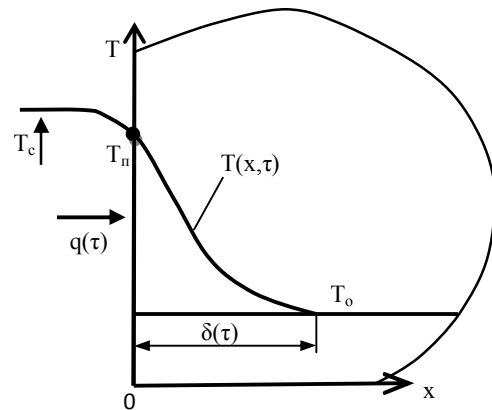


Рис.2. Схема начальной стадии нагрева

Введем согласно интегральному методу Гудмена [5] интеграл теплового баланса:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} \cdot dx = \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \cdot dx. \quad (7)$$

Взяв производные  $\partial \theta / \partial Fo$  и  $\partial^2 \theta / \partial X^2$  из соотношения (6), подставив их в уравнение (7) и произведя операцию интегрирования, получим

$$S(Fo) = \sqrt{12k\tilde{Fo}}, \quad (8)$$

где  $\tilde{Fo} = \frac{1}{\theta_n^2(Fo)} \int_0^{Fo} \theta_n^2(\eta) d\eta$  — модифицированное число Фурье, при постоянной температуре поверхности оно превращается (переходит) в обычное число  $Fo$ .

Время инерционного периода  $Fo_1$  находится из условия достижения теплового возмущения центральных точек тела, т.е. из условия  $\delta(\tau_1) = R_0$  или  $S(Fo_1) = 1$ . Тогда из (8) будем иметь

$$\tilde{Fo}_1 = \frac{1}{\theta_n^2(Fo_1)} \int_0^{Fo_1} \theta_n^2(\eta) d\eta = \frac{1}{12k}. \quad (9)$$

В случае неизменной во времени температуре поверхности:

$$Fo_1 = 1/(12k). \quad (10)$$

При известном времени инерционного периода из уравнения (5) можно найти постоянную

$$u_0 = 1/\sqrt{2\sqrt{Fo_1}}. \quad (11)$$

2) Методика А.Д. Горбунова.

Решая систему уравнений (1)...(4) методом разделения переменных, в [1] было получено: Температура в любой точке тела

$$\vartheta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot U_n(X) \cdot e^{-a_n^2 Fo}, \quad (12)$$

среднемассовая температура

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-a_n^2 Fo}, \quad (13)$$

температура в центре тела из (12) при  $X=0$

$$\vartheta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-a_n^2 Fo}, \quad (14)$$

и поверхностная из (12) при  $X=1$ :  $\vartheta_n(Fo) = 0$  (смотри рис. 3).

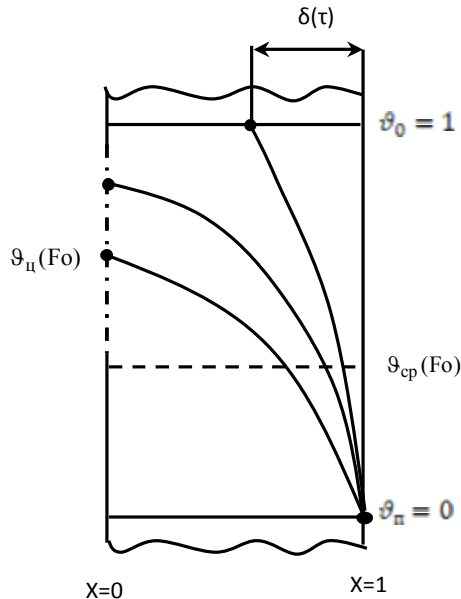


Рис.3. Кривые распределения относительных температур в теле

Здесь  $a_n$  — корни характеристического уравнения;  $U_n(X)$  — координатная функция;  $A_n$  и  $B_n$  — центральная и средняя амплитуды, зависящие от формы тела, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения  $a_n$ ,  $U_n(X)$ ,  $A_n$  и  $B_n$  в зависимости от формы тела

Форма тел	Уравнение корней	$a_n$	$U_n(X)$	$A_n$	$B_n$
$k=1$	$\cos(a_n) = 0$	$(2n-1) \cdot \pi/2$	$\cos(a_n X)$	$\frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{a_n}$	$\frac{2}{a_n^2}$
$k=2$	$J_0(a_n) = 0$	2,4048 и т.д.	$J_0(a_n X)$	$\frac{2}{a_n J_1(a_n)}$	$\frac{4}{a_n^2}$
$k=3$	$\sin(a_n) = 0$	$n\pi, n=1,2,\dots$	$\frac{\sin(a_n X)}{(a_n X)}$	$(-1)^{n+1} \cdot 2$	$\frac{6}{a_n^2}$

$J_0, J_1$  — функции Бесселя первого рода.

Условно можно считать, что инерционный период нагрева закончится в момент времени  $Fo_1$ , когда заданная температура в центре станет равной  $\vartheta_{ц,з} = (1 - \varepsilon_n) = 0,95$  и свидетельствующей о том, что уже все тело начинает прогреваться.

Используя два члена ряда (14), после логарифмирования, получим:

$$Fo_1 = \frac{1}{a_1^2} \ln \frac{A_1 \cdot (1 - \varepsilon_1)}{\vartheta_{ц,з}}, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_1(Fo_1) = (A_2/A_1) \cdot \exp(-a \cdot Fo_1)$ ;  $a = a_2^2 - a_1^2$ .

Ввиду зависимости  $\varepsilon_1(Fo_1)$ , уравнение (15) должно решаться методом последовательных приближений. Использование метода последовательных приближений для пластины на шестой итерации привело к точному значению  $Fo_1 = 0,099$ , однако для шара этот метод оказался расходящимся. В этом случае следует применить другой, более мощный метод решения трансцендентного уравнения, например метод касательных Ньютона.

Используя инженерную методику [6] расчета корней, время инерционного периода можно записать в виде:

$$Fo_1 = \frac{\gamma_{\infty}}{D_{\infty}} \cdot \ln \frac{A_1}{0,95}, \quad (16)$$

где  $A_1 \cong 0,4(k+2)$ ;  $D_{\infty} = k(k+2)$ ;  $\gamma_{\infty} = (1 + \sqrt{1+4\rho_{\infty}})/2$ ;  $\rho_{\infty} = k/(k+4)$ .

Из анализа решений (15) и (16) следует, что зависимость  $Fo_1$  от формы тела имеет гораздо более сложный характер, чем в простом уравнении (10).

Третий способ определения  $Fo_1$ . Для полубесконечного плоского тела (см. рис. 2) при постоянной температуре поверхности  $T_n = T_c = \text{const}$  в [1] было получено:

$$\vartheta(X, Fo) = \frac{T(x, \tau) - T_c}{\Delta T_0} = \text{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{Fo}}\right), \quad (17)$$

где  $\text{erf}(z) = p \int_0^z e^{-z^2} dz$  — функция ошибок Гаусса (специальная функция);  $p = 2/\sqrt{\pi} = 1,128379$ .

Если в уравнении (17) положить  $\vartheta = \vartheta_{ц,з} = 1 - \varepsilon_n$ , а  $X = S(Fo) = 2u_0\sqrt{Fo}$ , то можно получить формулу для расчета постоянной  $u_0$ :

$$\varepsilon_n = 1 - \text{erf } u_0 \equiv \text{erfc } u_0. \quad (18)$$

В табл. 2 приведены результаты численного расчета на ПЭВМ уравнения (18) при различных степенях прогрева. Там же представлены данные о величине времени прогрева, которое получим из (11), разрешенного относительно

$$Fo_1 = 1/(4u_0^2). \quad (19)$$

Таблица 2. Зависимость постоянной  $u_0$  и времени инерционного периода  $Fo_1$  от степени прогрева  $\varepsilon_n$  центральных точек тела при  $T_n = \text{const}$

$\varepsilon_n, \%$	0,5	1,0	5,0	10	15	20
$u_0$	1,99	1,82	1,39	1,16	1,02	0,91
$Fo_1$	0,063	0,075	0,129	0,186	0,240	0,302

Следует отметить, что приближенно графически решать трансцендентное уравнение (18) можно с помо-

щью рисунка 4.4 [1] из которого при заданной температуре  $\vartheta_{ц,3}$ , сразу получаем время  $Fo_1$ .

Дифференцируя уравнение (17) по координате  $x$  и используя закон Фурье, можно получить выражение для теплового потока (число Кирпичева), обеспечивающего постоянство температуры на поверхности полубесконечного тела:

$$Ki(Fo) = \frac{q(\tau) \cdot R_0}{\lambda \Delta T_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \quad (20)$$

3) точные решения А.В. Лыкова.

Точные значения времени  $Fo_1$  были определены по таблицам 4.2 (с. 95), 4.5 и 4.6 [1] из условия наступления температуры  $\vartheta_{ц,3} = 0,95$  в центре пластины, цилиндра и шара соответственно.

Для сравнения и анализа в табл.3 приведено время инерционного периода  $Fo_1$ , рассчитанное по разным формулам.

Таблица 3. Время инерционного периода при граничных условиях I рода

Форма тела	Точное из [1]	По уравнению (10)	По (15)	По (16)	Точное $u_0$ по (11)
Пластина	0,099	0,0833	0,1187	0,0912	1,589
Цилиндр	0,068	0,0417	0,0904	0,0823	1,917
Шар	0,055	0,0278	0,0754	0,0657	2,132

На рис.4 представлена графическая зависимость времени инерционного периода от фактора геометрической формы  $k$ , рассчитанная по разным методикам. Кривые на рис. 4 аппроксимировали с помощью программы Origin Pro 8.5.1.

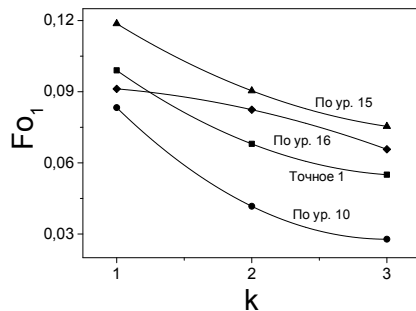


Рис.4. Зависимость времени инерционного периода от формы тела

Из анализа рис.4 вытекает, что наиболее близко к точному решению подходит расчет по простой приближенной формуле (16).

В решениях (12)...(14) при больших числах Фурье (обычно  $Fo \geq 0,3$ ), когда наступает так называемый квазистационарный или регулярный режим нагрева (РРН), достаточно ограничиться всего одним членом ряда, однако при малых временах ( $Fo \leq 0,1$ ) ряды очень плохо сходятся. В этом случае на помощь приходит метод операционного исчисления, позволяющий получить асимптотические решения, хорошо работающие на начальной стадии, т. е. при малых временах процесса

нагрева (охлаждения). Решения, полученные в монографии [1] методом Лапласа, имеют вид.

Для неограниченной пластины.

Температура в любой точке:

$$\vartheta(X, Fo) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{(2n-1)-X}{2\sqrt{Fo}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{(2n-1)+X}{2\sqrt{Fo}}\right) \right] \quad (21)$$

в центре пластины (при  $X=0$ )

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{2n-1}{2\sqrt{Fo}}\right) \approx 1 - 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{Fo}}\right) \quad (22)$$

Если в последнем выражении положить  $\vartheta_{ц}(Fo) = \vartheta_{ц,3} = 1 - \varepsilon_n$  и согласно (11)  $1/(2\sqrt{Fo_1}) = u_0$ , то получим уравнение (18) с заменой  $\varepsilon_n$  на  $\varepsilon_n/2$ . Отличие можно объяснить, тем что (18) получено для полубесконечного тела, а (22) — для неограниченной пластины и расчет по этому уравнению даст несколько меньшее значение времени инерционного периода.

Средняя температура пластины

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \vartheta_1(Fo) + 4\sqrt{Fo} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \operatorname{ierfc}\frac{n}{\sqrt{Fo}} \quad (23)$$

или с учетом одного члена ряда и разложения специальной функции в ряд при больших аргументах  $\operatorname{ierfc} x \approx e^{-x^2} / (2x^2 \sqrt{\pi})$ :

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \theta_1(Fo) + \varepsilon_2(Fo) \approx \theta_1(Fo) \quad (24)$$

где  $\varepsilon_2(Fo) = pFo\sqrt{Fo} \exp(-1/Fo)$  — малое число;  $\vartheta_1(Fo) = (1 - p\sqrt{Fo})$  — решение для средней температуры полубесконечного плоского тела.

Чтобы не допускать появления отрицательных температур, из уравнения (24) вытекает, что им можно пользоваться до чисел  $Fo_2 \leq 1/p^2 = \pi/4 = 0,785$ . Под числом Фурье  $Fo_2$  понимается время, до которого еще можно пользоваться формулами начальной стадии (НС), хотя обычно считается, что время НС находится в пределах  $0 \leq Fo \leq Fo_1$ .

В [1] показано, что расчет средней температуры пластины при времени  $Fo = 1/\pi^2 \approx 0,101$  по уравнению (24) и с учетом трех членов ряда (14) дает один и тот же результат  $\vartheta_{cp}(0,101) = 0,6408$ .

Для шара средняя температура по [1] имеет вид

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 + 3 \cdot Fo - 6\sqrt{Fo} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ierfc}\frac{n}{\sqrt{Fo}} \right) \quad (25)$$

или с учетом разложения

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 + 3(Fo - p\sqrt{Fo} - \varepsilon_2(Fo)) \approx 1 + 3(Fo - p\sqrt{Fo}) \quad (26)$$

Расчет  $\vartheta_{cp}$  по уравнению (26) при  $Fo = 1/\pi^2$  дает  $\vartheta_{cp}(0,101) = 0,2264$ , что полностью совпадает с данными табл. 4.5 [1].

Температура в центре шара

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - \frac{p}{\sqrt{Fo}} \exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right) \quad (27)$$

Расчет  $\vartheta_{ц}$  по уравнению (27) при  $Fo_1 = 0,54/\pi^2 = 0,0547$  дает  $\vartheta_{ц}(Fo_1) = 0,950046$ , что полностью совпадает с данными табл. 4.5 [1].

Формула для расчета средней температуры цилиндра на НС в [1] отсутствует, но анализ уравнения (26) и его связь с фактором геометрической формы позволяет предположить, что для цилиндра оно будет иметь следующий вид:

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 + 2(Fo - p\sqrt{Fo}). \quad (28)$$

Расчет по (28) при  $Fo = 0,05$  дает  $\vartheta_{cp}(0,05) = 0,595$  вместо 0,545 по рис. 4.22 [1].

Температура в центре цилиндра при малых числах Фурье согласно [1]:

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \cdot K_{1/4}\left(\frac{1}{8Fo}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{8Fo}\right) \quad (29)$$

или с учетом разложения спецфункции К при больших аргументах:

$$\vartheta_{ц}(Fo) = 1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{3Fo}{4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right) \approx 1 - 2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right). \quad (30)$$

Если в уравнении (30) положить  $\vartheta_{ц}(Fo_1) = 1 - \varepsilon_n$  и решить относительно времени, получим

$$Fo_1 = \frac{1}{4 \ln(2/\varepsilon_n)}, \quad (31)$$

которое при  $\varepsilon_n = 0,05$  приводит к  $Fo_1 = 0,0678$ , что практически совпадает с данными табл. 4.6 [1].

В работе [4] приведено несколько решений при переменной во времени температуре поверхности. Найдем время инерционного периода для двух характерных случаев.

1) Пусть температура поверхности изменяется по степенному закону

$$\theta_n(Fo) = \theta_n \cdot Fo^n. \quad (32)$$

Тогда модифицированное время  $\tilde{Fo} = \frac{1}{\theta_n^2(Fo)} \int_0^{Fo} \theta_n^2(\eta) d\eta = \frac{Fo}{2n+1}$  и окончательно согласно уравнению (9) время

$$Fo_1 = \frac{2n+1}{12k}. \quad (33)$$

Интересно отметить, что при  $n = -0,5$  отсутствует инерционный период нагрева.

Согласно [4] тепловой поток, обеспечивающий изменение температуры поверхности полуограниченного плоского тела по степенному закону (32), имеет вид  $q(\tau) = A/\sqrt{\tau}$  или в безразмерном виде

$$Ki(Fo) = \frac{B_\tau}{\sqrt{\pi Fo}}, \quad (34)$$

где  $A = b \cdot V_T / \sqrt{\pi}$ ; где  $b = \sqrt{\lambda_{cp}}$  — коэффициент аккумуляции тепла;  $V_T = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(n+1) / \Gamma(n+1/2)$ ;  $\Gamma(z)$  — Гамма-функция.

Заметим, что данный критерий Кирпичева отличается от полученного ранее (20) на постоянную величину  $V_T$ .

2) Пусть температура поверхности изменяется по экспоненциальному закону

$$\theta_n(Fo) = \theta_n e^{aFo}. \quad (35)$$

Модифицированное число Фурье

$$\tilde{Fo}_1 = \frac{1 - \exp(-2aFo_1)}{2a} = \frac{1}{12k}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно  $Fo_1$ , получим время инерционного периода

$$Fo_1 = -\frac{1}{2a} \ln\left(1 - \frac{a}{6k}\right). \quad (36)$$

При малых величинах  $a \ll 6k$ , используя разложение  $\ln(1+x) \approx x$ , найдем время  $Fo_1 = 1/12k$ , совпадающее с полученным ранее уравнением (10) в случае постоянной температуры поверхности.

Расчет температур на начальной стадии требует использования специальных функций. С целью упрощения расчетов была сделана аппроксимация температур в центральных точках тела кубической параболой:

$$\vartheta_{ц}(Fo) \cong 1 - K_{ц} \cdot Fo^3, \quad (37)$$

где  $K_{ц} = \varepsilon_n / Fo_1^3$ ; расчет  $Fo_1$  — см. формулы (9), (15), (16) или рис.4.

Для расчета среднemasовой температуры воспользуемся известным, [2] и др., уравнением теплового баланса  $Q = m \cdot c \cdot (t_{cp}(\tau) - t_0) = \int_0^\tau q(\tau) F d\tau$  или в безразмерном виде с учетом коэффициента формы тела:

$$\vartheta_{cp}(Fo) = \vartheta_0 - k \int_0^{Fo} Ki(Fo) dFo. \quad (38)$$

Согласно начальному условию (2) температура  $\vartheta_0 = 1$ , а тепловой поток для полубесконечного тела изменяется по уравнению (20). После интегрирования (38) с учетом (2) и (20), получим

$$\vartheta_{cp}(Fo) = 1 - k p \sqrt{Fo}. \quad (39)$$

Объединенное уравнение (39) очень хорошо согласуется с полученными ранее формулами (24), (28) и (26) при  $k=1, 2$  и 3 соответственно.

Технологов часто интересует вопрос о времени  $Fo_k$  конца процесса нагрева. Фактически нагрев завершится при достижении нулевых значений температур в центре тела и согласно решению (14) это наступит за время  $Fo = \infty$ . Однако, условно можно считать временем конца нагрева достижение температурой центра конечных значений  $\vartheta_{ц..к} = \varepsilon_n = 5\%$ , где  $\varepsilon_n$  можно трактовать как степень недогрева центра тела. Полагая в (14)  $\vartheta(Fo_k) = \varepsilon_n$  и логарифмируя, получим

$$Fo_k = \frac{1}{a_1^2} \ln \frac{A_1}{\varepsilon_n}. \quad (40)$$

Средняя температура в конце нагрева согласно (13) составит величину  $\vartheta_{cp}(Fo_k) = B_1 \cdot \exp(-a_1^2 \cdot Fo_k)$  или

с учетом (40):  $\vartheta_{cp}(Fo_k) = B_1 \cdot \frac{\varepsilon_n}{A_1}$ . (41)

Теперь данных достаточно для определения термических напряжений. Согласно [6], относительные осевые термонапряжения в любой точке

$$\tilde{\sigma}(X, Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta(X, Fo), \quad (42)$$

на поверхности (при  $X=1$ )

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_{п} = \vartheta_{cp}(Fo), \quad (43)$$

т.к. согласно граничному условию (4) температура поверхности  $\vartheta_{п} = 0$  (см. рис.3).

Термические напряжения в центральных точках тела (при  $X=0$ ):

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_{ц}(Fo) \cong \vartheta_{cp}(Fo) - 1, \quad (44)$$

так как по определению на начальной стадии при времени  $Fo < Fo_1$  температура в центре ввиду тепловой инерции остается равной первоначальной, т.е.  $\vartheta_{ц} \approx 1$  или можно для расчета  $\vartheta_{ц}(Fo)$  использовать формулы (22), (27), (30), а в квазистационарной стадии нагрева – уравнение (14).

Окончательно размерные термические напряжения

$$\sigma(Fo) = \tilde{\sigma}(Fo) \cdot \sigma_0, \quad (45)$$

где  $\sigma_0 = \beta E \Delta T_0 / (1 - \nu)$  — максимально возможные термические напряжения, Па;  $\beta$  — линейный коэффициент термического расширения,  $1/K$ ;  $E$  — модуль упругости, Па;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

**Численный пример.**

Прямая задача. Найти  $\vartheta_{ц}$ ,  $\vartheta_{cp}$ ,  $\tilde{\sigma}_{п}$  и  $\tilde{\sigma}_{ц}$  в нагреваемой сферической заготовке для двух моментов времени  $Fo_{н.1} = 0,1$  и  $Fo_{н.2} = 0,4$ .

Рассчитаем время инерционного периода по (16) при  $k=3$ .  $A_1 \cong 0,4(3+2) = 2$ ;  $D_{\infty} = 3(3+2) = 15$ ;  $\gamma_{\infty} = (1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 0,429})/2 = 1,324$ ;  $\rho_{\infty} = 3/(3+4) = 0,429$   
 $Fo_1 = \frac{1,324}{15} \ln \frac{2}{0,95} = 0,0657$ .

Так как время  $Fo_{н.1}$  близко к  $Fo_1$ , расчеты ведем по формулам НС. Температура в центре по уравнению (27)

$$\vartheta_{ц}(Fo_{н1}) = 1 - (1,128/\sqrt{0,1}) \exp(-1/(4 \cdot 0,1)) = 0,7072$$

или с учетом двух членов ряда (14)

$$\vartheta_{ц}(Fo_{н.1}) = A_1 e^{-a_1^2 Fo} + A_2 e^{-a_2^2 Fo} = 2(e^{-\pi^2 \cdot 0,1} - e^{-4\pi^2 \cdot 0,1}) = 0,7068$$

или по приближенной формуле (37)

$$\vartheta_{ц}(Fo_1) = 1 - K_{ц} \cdot Fo^3 = 1 - 0,05(0,1/0,0657)^3 = 0,8237.$$

Средняя температура по (26)

$$\vartheta_{cp}(Fo_{н.1}) = 1 + 3(Fo - \rho\sqrt{Fo}) = 1 + 3(0,1 - 1,128\sqrt{0,1}) = 0,2299.$$

Осевые термические напряжения на поверхности по (43)

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo_{н.1}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.1}) = 0,2299$$

и в центре по (44)

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo_{н.1}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.1}) - \vartheta_{ц}(Fo_{н.1}) = 0,2299 - 0,7068 = -0,4769.$$

Для второго времени.

Так как  $Fo_{н.2} > 0,3$ , то используем формулы в стадии РРН:  
 По уравнению (14):

$$\vartheta_{ц}(Fo) = A_1 \cdot e^{-a_1^2 Fo_{н.2}} = 2 \cdot e^{-\pi^2 \cdot 0,4} = 0,01428.$$

Средняя температура по (13)

$$\vartheta_{cp}(Fo_{н.2}) = B_1 \cdot e^{-a_1^2 Fo_{н.2}} = (6/\pi^2) \cdot e^{-\pi^2 \cdot 0,4} = 0,01173,$$

где  $a_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  взяты из табл.1.

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo_{н.2}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.2}) = 0,01173.$$

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo_{н.2}) = \vartheta_{cp}(Fo_{н.2}) - \vartheta_{ц}(Fo_{н.2}) = 0,01173 - 0,01428 = -0,00255.$$

Обратная задача. Найти время, конца нагрева, когда температура центра шара достигнет значения  $\vartheta_{ц,к} = 0,05$ . Определить также  $\vartheta_{cp}$ ,  $\tilde{\sigma}_{п}$ ,  $\tilde{\sigma}_{ц}$  в найденный момент времени.

Согласно (40) время конца нагрева

$$Fo_{к} = \frac{1}{a_1^2} \ln \frac{A_1}{\varepsilon_{н}} = \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{2}{0,05} = 0,3738.$$

Средняя температура по (41)

$$\vartheta_{cp}(Fo_{к}) = (6/\pi^2) \cdot 0,05/2 = 0,0152.$$

Термические напряжения

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo_{к}) = \vartheta_{cp}(Fo_{к}) = 0,0152,$$

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo_{к}) = \vartheta_{cp}(Fo_{к}) - \vartheta_{ц}(Fo_{к}) = 0,0152 - 0,05 = -0,0348.$$

**Выводы**

1. Разработана инженерная методика аналитического расчета времени инерционного периода в линейных задачах нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при граничных условиях I рода.

2. Получены достаточно простые, точные и приближенные формулы для нахождения полей температур и термических напряжений на начальной и квазистационарной стадиях.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа. 1967. — 600 с.
2. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. — М.: Металлургия. 1967. — 439 с.
3. Постольник Ю. С. Приближенные методы исследования в термомеханике. — К. — Донецк.: Высшая школа. 1984. — 158 с.
4. Горбунов А. Д., Уклеина С. В. Аналитический расчет процессов нагрева тел на начальной стадии // Математическое моделирование. — Днепродзержинск: ДГТУ. 2008. — № 1(18). — С.29—33.
5. Гудмэн Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена. — В кн.: проблемы теплообмена. — М.: Атомиздат. — 1967. — С.41—96.
6. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математическое моделирование. — Днепродзержинск: ДГТУ. 2012. № 1(26). — С.39—45.