

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ



Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 2

А. Д. ГОРБУНОВ, А. И. ТРИКИЛО, С. В. УКЛЕИНА

Днепродзержинский государственный технический университет

На основе решения интегрального уравнения, связывающего тепловой поток и температуру поверхности в квазистационарной стадии нагрева, получены достаточно простые аналитические формулы по расчету температур и термических напряжений в телах правильной геометрической формы.

На основі рішення інтегрального рівняння, що зв'язує тепловий потік і температуру поверхні в квазістаціонарній стадії нагріву, отримані досить прості аналітичні формули по розрахунку температур і термічних напружень в тілах правильної геометричної форми.

On the basis of the solution of the integral equation, connecting a heat flux and surface temperature in a quasistationary heating stage, rather simple analytical formulas by calculation of temperatures and thermal tension in bodies of the correct geometrical form are received.

Анализ публикаций. В предыдущей работе авторов [1] был усовершенствован метод интегральных линеаризующих преобразований и получены простые аналитические решения по расчету температур и термических напряжений в телах правильной геометрической формы в виде пластины, цилиндра и шара при их нагреве радиацией в регулярном режиме. Однако, приемлемая погрешность в инженерных расчетах достигается при достаточно малых числах Старка $Sk \leq 2$. Получим решения, свободные от указанных недостатков.

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного радиационного нагрева тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до T_c имеет вид

$$\frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\theta(X, 0) = \theta_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = Sk(1 - \theta_n^4), \quad (4)$$

где $\theta = T/T_c$; $\theta_0 = T_0/T_c$; $\theta_n = \theta(1, Fo)$ — относительная температура на поверхности; $Sk = \sigma T_c^3 R_0 / \lambda$ — число Старка; k — фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара; $X = x/R_0$; R_0 — характерный размер тел.

Решение задачи. При выводе формул будем следовать методике, разработанной В.В. Саломатовым [2] в случае радиационного охлаждения тел. Однако, в [3] и других работах показано, что в отличие от конвективного теплообмена, при теплообмене излучением процессы нагрева и охлаждения не являются симметричными, поэтому их приходится рассматривать по

отдельности, т. е. решения, полученные в случае охлаждения не пригодны для расчета тел, нагреваемых радиацией.

Обозначая в уравнении (4) $Q(Fo) = Sk(1 - \theta_n^4(Fo))$ — относительный поток на поверхности, применяя к системе уравнений (1)...(4) операционное преобразование Лапласа, используя правило интегрирования по частям и свертку рядов Фурье, получим нелинейное интегральное уравнение относительно температуры на поверхности:

$$\theta_n(Fo) = \theta_0 + k \int_0^{Fo} Q(\eta) \cdot d\eta + g \cdot Q(Fo) + S(Fo), \quad (5)$$

где $g = \frac{1}{k+2}$;

$$S(Fo) = \int_0^{Fo} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{v_n^2} \cdot \dot{Q}(\eta) \cdot \exp(-v_n^2(Fo - \eta)) d\eta; \quad v_n = n\pi.$$

В квазистационарной стадии нагрева, когда $Fo > 0,3$, суммой ряда, т.е. последним слагаемым (5) можно пренебречь. Тогда, дифференцируя по времени Fo выражение (5) при $S = 0$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\tilde{Fo} = \Phi(\theta) - \Phi(\theta_*), \quad (6)$$

где $\Phi(\theta) = F(\theta) - a \cdot \ln(1 - \theta^4)$; $a = g \cdot Sk$; $\tilde{Fo} = k \cdot Sk \cdot Fo$ — модифицированное число Фурье;

$$F(\theta) = \int \frac{d\theta}{1 - \theta^4} = \frac{1}{2} [\text{Arth}\theta + \arctg\theta]; \quad (7)$$

θ — относительная температура на поверхности.

Следует отметить, что первое слагаемое уравнения (6) представляет собой решение исходной задачи в модели термически тонкого тела (ТТТ), т.е. уравнения

$$d\theta = k \cdot Sk \cdot (1 - \theta^4) \cdot dFo, \quad (8)$$

где под θ понимается среднemasовая температура тела.

Разделяя переменные и интегрируя (8) с учетом начального условия (2), получим

$$\tilde{F}_0 = F(\theta) - F(\theta_0). \quad (9)$$

Для облегчения расчетов температур по модели ТТТ (9) на рисунке 1 приведена зависимость (7).

Под θ_* в уравнении (6) понимается начальная модифицированная температура поверхности, которая находится из интегрального уравнения (5) при $F_0 = 0$:

$$\theta_* = \theta_0 + a \cdot (1 - \theta_*^4). \quad (10)$$

Получим несколько приближенных аналитических решений уравнения (10). С целью уменьшения числа переменных приведем его к каноническому виду:

$$NZ^4 + Z - 1 = 0, \quad (11)$$

где $Z = \theta_*/C$; $N = a \cdot C^3$; $C = \theta_0 + a$; $a = Sk/(k+2)$.

Таблица для расчета $Z(N)$ по уравнению (11) приведена в [3].

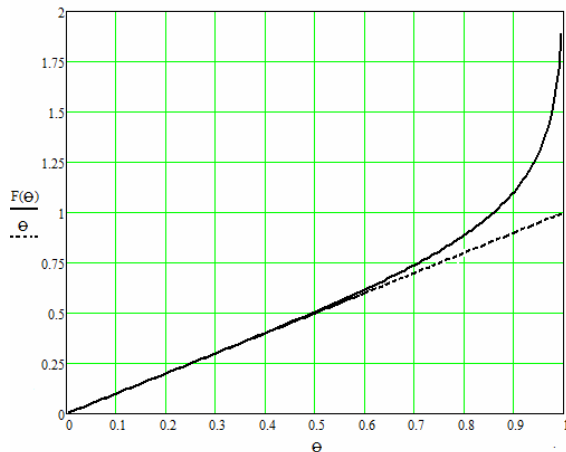


Рис. 1. Зависимость функции $F(\theta) = 0,5[\text{Arth}\theta + \text{arctg}\theta]$

Применяя к уравнению (11) метод касательных Ньютона, в [3] было получено итерационное уравнение:

$$Z_{k+1} = \frac{1 + 3N \cdot Z_k^4}{1 + 4N \cdot Z_k^3}. \quad (12)$$

Число итераций по уравнению (12), необходимое для достижения заданной точности ε , когда $|Z_{k+1} - Z_k| \leq \varepsilon$, можно значительно сократить, если правильно выбрать первое приближение. Полагая в (12) $Z_k = 1$, получим уравнение

$$Z = 1 - N/(1 + 4N), \quad (13)$$

справедливое при малых значениях N (например, при $N < 0,58$ погрешность расчета Z не превышает $\Pi_Z \leq 5\%$).

Для больших N из (11) $Z \approx N^{-1/4}$ или более точно, после подстановки в (12), будем иметь

$$Z = \frac{1}{1/4 + N^{1/4}}. \quad (14)$$

На рис. 2 приведено графическое решение уравнения (11).

Следует отметить, что определение θ_* согласно [2] зависит от двух величин, а расчет по формулам (12)...(14) или по графику рис. 2 — только от одного критерия N . Кроме того, использование табл. 2 [2] требует двойной интерполяции и ограничено значениями радиационного числа Старка $Sk \leq 3$ для пластины и $Sk \leq 5$ — шара.

Для экспресс-расчетов в табл. 1 приведены значения функции $F(\theta)$ уравнения (7) и $\Phi(\theta, a)$ — формулы (6).

В ряде случаев решение (6) упрощается. Ранее в [1] было показано, что при малых температурах ($\theta < 0,6$) функция $F(\theta)$ разлагается в ряд:

$$F(\theta) = \theta \left(1 + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^9}{9} + \dots \right) \approx \theta. \quad (15)$$

На рис. 1 для наглядности нанесена прямая (15). Кроме того, при малых аргументах $\ln(1+x) \approx x$. Тогда функция

$$\Phi(\theta) = F(\theta) - a \ln(1 - \theta^4) \approx \theta + a \cdot \theta^4 = m_R \cdot \theta, \quad (16)$$

где $m_R = 1 + a\theta^3$.

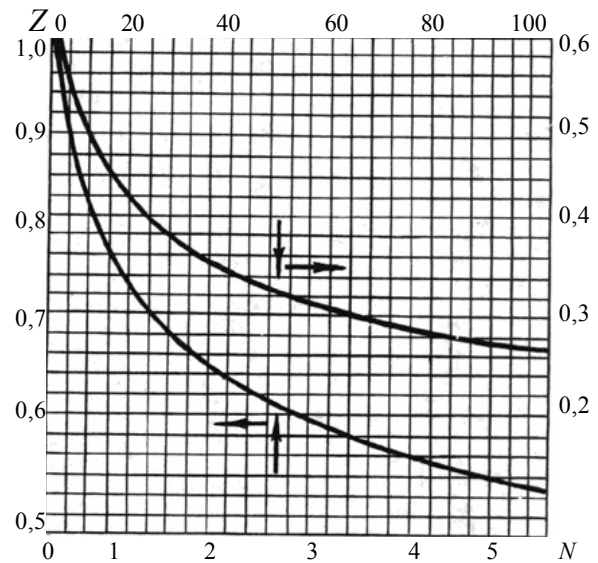


Рис. 2. Графическое решение уравнения $NZ^4 + Z - 1 = 0$

Таблица 1. Значения функции $F(\theta)$ и $\Phi(\theta, a) = F(\theta) - a \ln(1 - \theta^4)$.

θ	$F(\theta)$	$a = Sk/(k+2)$				
		0,1	1/3	0,5	2/3	1,0
1	2	3	4	5	6	7
0,2	0,2	0,2	0,201	0,201	0,201	0,202
0,3	0,3	0,301	0,303	0,305	0,306	0,309
0,4	0,402	0,405	0,411	0,415	0,419	0,428
0,5	0,506	0,513	0,528	0,539	0,55	0,571
0,55	0,561	0,57	0,593	0,609	0,625	0,657
0,60	0,617	0,631	0,663	0,686	0,709	0,756
0,65	0,676	0,696	0,741	0,774	0,807	0,872

1	2	3	4	5	6	7
0,7	0,739	0,766	0,83	0,876	0,922	1,014
0,75	0,808	0,846	0,935	0,998	1,062	1,189
0,8	0,887	0,939	1,062	1,15	1,238	1,414
0,85	0,98	1,054	1,226	1,349	1,472	1,718
0,9	1,103	1,209	1,458	1,636	1,814	2,17
0,95	1,296	1,464	1,857	2,138	2,419	2,981
0,99	9,577	13,043	21,118	26,906	32,683	44,234

В конце процесса нагрева температура $\theta \rightarrow 1$ и величину $m_R = 1 + \frac{Sk}{k+2}$ можно трактовать как радиационный (лучистый) коэффициент термической массивности по аналогии с коэффициентом $m = 1 + \frac{Bi}{k+2}$ в случае конвективного нагрева (охлаждения) тел. Подробности относительно использования коэффициента термической массивности в задачах нестационарной теплопроводности изложены в работе [5].

С учетом (16) решение (6) примет вид:

$$\tilde{F}o = \theta_n - \theta_* + a(\theta_n^4 - \theta_*^4). \quad (17)$$

При малых числах Старка коэффициент a можно принять равным нулю и получить линейную зависимость температуры поверхности от времени

$$\theta_n = \theta_* + \tilde{F}o, \quad (18)$$

выявленную ранее в [1] другим способом.

Разрешить из уравнения (17) температуру поверхности в явном виде относительно времени, т.е. решить так называемую прямую задачу, можно следующим образом. Если обозначить в (17) $C_1 = \tilde{F}o + \theta_* (1 + a \cdot \theta_*^3)$, $Z = \theta_n / C_1$, можно получить уравнение четвертой степени (11) в котором параметр $N = a \cdot C_1^3$. При этом для расчета Z и θ_n можно использовать полученные выше уравнения (12)...(14) и рис. 2.

Зато по уравнениям (6), (9) или (17) легко решается обратная задача — определения времени нагрева Fo_n тела до заданной (конечной) температуры θ_k . Сначала покажем это на модели ТТГ (9). Полагая в нем $\theta = \theta_k = 1 - \varepsilon = 0,95$, где $\varepsilon = 5\%$ — степень недогрева, получим

$$\tilde{F}o_n^{TTT} = F(\theta_k) - F(\theta_0) = F(0,95) - \theta_0 = 1,3 - \theta_0. \quad (19)$$

Расчетами было установлено, что уравнением (19) можно пользоваться при достаточно малых $Sk < 1$.

Если принять в решении (6) температуру поверхности $\theta = \theta_k$, получим время нагрева термически массивного тела (ТМТ):

$$\tilde{F}o_n^{TMT} = 1,3 + 1,6847 \cdot a - \Phi(\theta_*). \quad (20)$$

Окончательно число Фурье $Fo_n = \tilde{F}o_n / (k \cdot Sk)$.

На рис.3 приведена зависимость (20) времени нагрева тела до конечной температуры поверхности $\theta_n = \theta_k = 0,95$ от числа $a = Sk / (k + 2)$ и начальной температуры θ_0 .

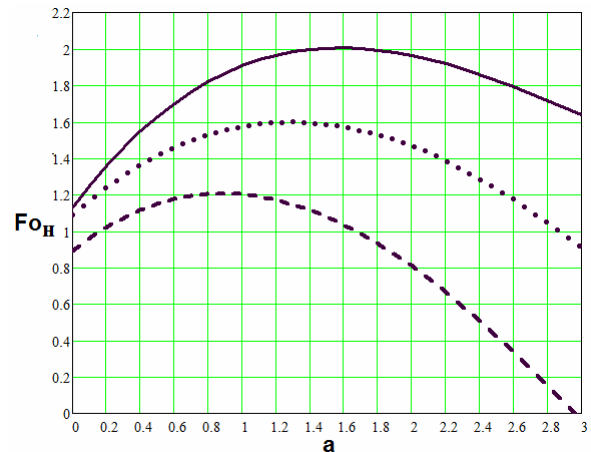


Рис. 3. Зависимость модифицированного времени нагрева от величины $a = Sk / (k + 2)$ и начальной температуры $\theta_0 = 0$ (—); 0,2 (---) и 0,4 (-.-)

Зная температуру поверхности, а значит и тепловой поток, можно приближенно найти температуру в любой точке тела. Так, предполагая параболическое (второй степени) распределение температур от оси тела к его поверхности, получим

$$\theta(X, Fo) = \theta_n(Fo) - Q(Fo) \frac{1 - X^2}{2}. \quad (21)$$

Аналогичное уравнение, с точностью до знака, использовалось в [2] при изучении охлаждения тел радиацией.

Тогда температура в центре тела при $X = 0$:

$$\theta_n(Fo) = \theta_n(Fo) - Sk \frac{1 - \theta_n^4(Fo)}{2}. \quad (22)$$

Среднемассовую температуру найдем, интегрируя выражение (21) по координате X :

$$\begin{aligned} \theta_{cp}(Fo) &= k \int_0^1 \theta(X, Fo) X^{k-1} \cdot dX = \theta_n(Fo) - Q(Fo) / (k + 2) = \\ &= \theta_n(Fo) - a(1 - \theta_n^4(Fo)). \end{aligned} \quad (23)$$

Для построения температурной диаграммы желательно знать температуры в начальный момент времени $Fo = 0$. Полагая в уравнении (23) $\theta_n(0) = \theta_*$ и учитывая (10), получим для среднемассовой температуры $\theta_{cp}(0) = \theta_0$.

Температуру на оси тела при $Fo = 0$ можно рассчитывать по уравнению (22), полагая в нем, как и ранее, $\theta_n(0) = \theta_*$. Тогда

$$\theta_n(0) = \frac{(2k + 3) \cdot \theta_* + \theta_0}{2(k + 2)}.$$

Формулы (19) и (20) получены при условии достижения конечной температуры поверхности $\theta_{п.к} = \theta_k$, однако на практике возможны другие требования к концу нагрева. Пусть условием конца нагрева будет заданная температурная разность $\Delta\theta_k = (\theta_n - \theta_{п.к})_k$. Тогда из уравнения (22) можно получить разность температур $\Delta\theta(Fo) = Q(Fo) / 2$ и конечную температуру поверхности $\theta_{п.к} = (1 - 2 \cdot \Delta\theta_k / Sk)^{1/4}$.

Вторым условием может служить нагрев до конечной среднемассовой температуры $\theta_{ср.к}$. Тогда соот-

ношение (23) становится по аналогии с формулой (10) уравнением 4-той степени относительно $\theta_{п.к}$, а именно:

$\theta_{ср.к} = \theta_{п.к} - a(1 - \theta_{п.к}^4)$. Полагая в последнем $C_2 = a + \theta_{ср.к}$; $Z = \theta_{п.к}/C_2$, получим уравнение (11) в котором $N = a \cdot C_2^3$ и для решения которого можно использовать полученные ранее формулы (12)...(14) или рис.2.

При известной $\theta_{п.к}$ для расчета времени нагрева можно применять полученные выше уравнения (19), (20) или рис. 3.

Решение (6), составной частью которого является модель ТТГ (см. уравнение (9)), хорошо работает при малых числах Старка. Оценим их возможности при очень больших Sk .

Асимптотика при больших Sk . Разделим левую и правую часть уравнения (6) на Sk и устремим его к бесконечности. Получим $kFo = -g((1 - \ln\theta^4) - \ln(1 - \theta_*^4))$ или после потенцирования

$$\theta_{п}(Fo) = \left(1 - (1 - \theta_*^4)e^{-D_{\infty}Fo}\right)^{1/4}, \quad (24)$$

где $D_{\infty} = k(k+2)$ — см. [1].

Для определения начальной температуры θ_* воспользуемся зависимостью (14) при больших Sk , а значит и критерия $N = a^4$:

$$\theta_* = Z \cdot C = 1 - \frac{1}{4a} \rightarrow 1. \quad (25)$$

Тогда температура поверхности (24) с учетом (25) станет

$$\theta_{п} = 1 - \frac{e^{-D_{\infty}Fo}}{4a}. \quad (26)$$

Таким образом, при больших числах Старка θ_* , а следом и температура поверхности $\theta_{п}$ стремится к 1.

Тепловой поток в уравнении (4) при больших Sk приводит к неопределенности типа $\infty \cdot 0$, раскрывая которую с помощью (24) и (25), получим

$$Q_{\infty} = (k+2) \cdot \exp(-D_{\infty} \cdot Fo), \quad (27)$$

Температуру в центральных точках тела найдем из (22) с учетом (27)

$$\theta_{ц}(Fo) = \theta_{п}(Fo) - A \cdot \exp(-D_{\infty}Fo) \cong 1 - A \exp(-D_{\infty} \cdot Fo) \quad (28)$$

и среднemasсовую — из (23) и (27)

$$\theta_{ср}(Fo) = \theta_{п}(Fo) - M \exp(-D_{\infty}Fo) \cong 1 - M \exp(-D_{\infty} \cdot Fo), \quad (29)$$

где $A = (k+2)/2$; $M = 1$.

Величины D , A и M хорошо согласуются с решениями уравнения теплопроводности при конвективном нагреве когда число Био $Bi = \infty$. Например, согласно [4] в случае пластины решения для температур имеют вид

$$\theta_{ц}(Fo) = 1 - A_{1-\infty} e^{-a_1^2 Fo} \quad \text{и} \quad \theta_{ср}(Fo) = 1 - M_{1-\infty} e^{-a_1^2 Fo}, \quad (30)$$

где $a_1 = \pi/2$ — первый корень характеристического уравнения при $Bi = \infty$;

$$A_{1-\infty} = 2/a_1 = 4/\pi = 1,27 \approx (k+2)/2 = 1,5;$$

$$M_{1-\infty} = 2/a_1^2 = 8/\pi^2 = 0,81 \approx 1;$$

$$D_{\infty} = k(k+2) = 3 \approx a_1^2 = 2,47.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что расчет среднemasсовой температуры и в центральных точках тела при любых нелинейных интенсивных нагружениях, т.е. при граничных условиях I рода, можно считать по линейной теории конвективного нагрева при $Bi = \infty$.

На самой начальной стадии нагрева, при малых числах Фурье ($Fo < 0,1$), расчет температур можно порекомендовать производить по методике, изложенной в [3].

Термические напряжения. В подавляющем большинстве работ, посвященным радиационному теплообмену [2, 6] и др. отсутствуют формулы по определению среднemasсовой температуры, без знания которой невозможно рассчитать термические напряжения. В работе [4] показано, что осевые термические напряжения составляют:

$$\text{на поверхности} \quad \sigma_{п}(\tau) = S_1 [T_{ср}(\tau) - T_{п}(\tau)], \text{ Па} \quad (31)$$

$$\text{и в центре} \quad \sigma_{ц}(\tau) = S_1 [T_{ср}(\tau) - T_{ц}(\tau)], \text{ Па}. \quad (32)$$

Приведя последние уравнения к безразмерному виду, получим относительные термические напряжения

$$\text{на поверхности} \quad \tilde{\sigma}_{п}(Fo) = \theta_{ср}(Fo) - \theta_{п}(Fo) \quad (33)$$

$$\text{и в центре} \quad \tilde{\sigma}_{ц}(Fo) = \theta_{ср}(Fo) - \theta_{ц}(Fo), \quad (34)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_{01}$; $0 \leq \tilde{\sigma} \leq 1$; $\sigma_{01} = S_1 \cdot T_c$ — максимально возможные термические напряжения, Па; $S_1 = \beta E/(1-\nu)$; β — линейный коэффициент термического расширения, $1/K$; E — модуль упругости Юнга, Па; ν — коэффициент Пуассона.

С учетом (22) и (23) последние уравнения станут

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = -g \cdot Q(Fo) = -a(1 - \theta_{п}^4(Fo)) \quad (35)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo) = \frac{k}{2(k+2)} \cdot Q(Fo), \quad (36)$$

Интересно отметить, что согласно (35) и (36) термические напряжения существенно зависят от времени, а их отношение

$$R = \tilde{\sigma}_{п}(Fo)/\tilde{\sigma}_{ц}(Fo) = -2/k \quad (37)$$

есть величина постоянная.

Решая совместно соотношения (33), (34) и (37), можно получить следующие уравнения связи между термическими напряжениями:

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = \tilde{\sigma}_{ц}(Fo) + \Delta\theta(Fo) \quad (38)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{п}(Fo) = K_{\sigma} \cdot \Delta\theta(Fo), \quad (39)$$

где $K_{\sigma} = -R/(1-R) = 2/(k+2)$;

$\Delta\theta(Fo) = \theta_{п}(Fo) - \theta_{ц}(Fo) = Q(Fo)/2$ — температурная разность.

Следует отметить, что уравнение (37) совпадает с полученным ранее в [4] для случая конвективного нагрева тел в регулярном режиме, а (39) — с формулой Н.Ю. Тайца.

$$\sigma(\tau) = K_{\sigma} \cdot S_1 \cdot \Delta t(\tau), \text{ Па}. \quad (40)$$

Проверка модели на адекватность. Проверку на работоспособность разработанной методики осуществим путем сопоставления с данными численного решения нагрева пластины при начальной температуре $\theta_0 = 0,2$ и числе Старка $Sk = 2$, приведенными в работе [6]. В табл. 2 приведены численные данные о температуре поверхности $\theta_n(Fo)$ и центра $\theta_c(Fo)$ в зависимости от времени — числа Фурье.

Таблица 2. Зависимость от времени Fo относительных температур поверхности и центра пластины при $\theta_0 = 0,2$ и $Sk = 2$

Fo	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,6	2,0
$\theta_n(Fo)$	0,8774	0,9026	0,9215	0,9364	0,9483	0,9579	0,9656	0,9719	0,9810	0,9910	0,9960
$\theta_c(Fo)$	0,4087	0,5070	0,5910	0,6614	0,7201	0,7689	0,8093	0,8428	0,8940	0,9520	0,9780

В связи с тем, что решение (6) и др. представлены в неявном виде $Fo = f(\theta)$ и чтобы обеспечить сравнение с численными данными θ^4 , была проведена их аппроксимация полиномом 2-й степени:

для температуры поверхности

$$\theta_n^4 = 0,8312 + 0,2038 \cdot x - 0,062 \cdot x^2 \quad (41)$$

и центра тела

$$\theta_c^4 = 0,178 + 0,944 \cdot x - 0,2766 \cdot x^2 \quad (42)$$

где в роли x выступает число Фурье.

Численный расчет. Коэффициент геометрической формы $k = 1$. Величина $a = Sk/(k + 2) = 2/(1 + 2) = 2/3$. Задаемся температурой поверхности $\theta_n = 0,9$.

Вычисляем $C = \theta_0 + a = 0,2 + 2/3 = 0,867$; $N = a \cdot C^3 = 0,667 \cdot 0,867^3 = 0,434$. По формуле (13) $Z_1 = 1 - 0,434/(1 + 4 \cdot 0,434) = 0,8414$. После 3-х итераций по итерационной формуле (12) $Z_3 = 0,8117$ с точностью $\varepsilon = 5,4 \cdot 10^{-7}$.

Модифицированная начальная температура $\theta_* = C \cdot Z_3 = 0,867 \cdot 0,8117 = 0,703$. Согласно решению

$$(6) \text{ функции } \Phi(\theta_*) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,703}{1 - 0,703} + \arctg 0,703 \right] - \frac{2}{3} \ln(1 - 0,703^4) = 0,931 \text{ и } \Phi(\theta_n) = \Phi(0,9) = 1,814 \text{ — см.}$$

таблица 2 — $\Phi(0,9; 2/3)$; модифицированное число Фурье $\tilde{Fo} = \Phi(\theta) - \Phi(\theta_*) = 1,814 - 0,931 = 0,883$. Обычное число Фурье $Fo = \tilde{Fo}/(kSk) = 0,833/2 = 0,441$. Температура поверхности по аппроксимационной формуле (41) при $x = 0,441$: $\theta_n^4(0,441) = 0,904$. Таким образом, погрешность расчета температуры поверхности составила $P_{\theta_n} = \frac{0,904 - 0,9}{0,9} 100 = 0,4\%$. Температура в центре по

$$\text{формуле (22) } \theta_c = \theta_n - Sk(1 - \theta_n^4)/2 = 0,9 - 2 \times$$

$\times (1 - 0,9^4)/2 = 0,556$; по аппроксимационному уравнению (42)

$$\theta_c^4(0,441) = 0,178 + 0,944 \cdot 0,441 - 0,2766 \cdot 0,441^2 = 0,540.$$

$$\text{Погрешность } P_{\theta_c} = \frac{0,556 - 0,540}{0,540} 100 = 3,6\%.$$

Время нагрева до конечной температуры $\theta_n = \theta_k = 0,95$ по формуле (20)

$$\tilde{Fo}_{TMT} = 1,3 + 1,6847 \cdot 0,667 - 0,931 = 1,49;$$

$$Fo_n = 1,49/2 = 0,746; \theta_n \text{ по (41) } \theta_n^4(0,746) = 0,9502;$$

погрешность $P_{\theta_n} = 0,3\%$ температура в центре при

$$\theta_n = \theta_k; \theta_{c,k} = \theta_k - Sk(1 - \theta_k^4)/2 = 0,764 \theta_{c,k} \text{ по (42)}$$

$$\theta_c^4(0,746) = 0,754. \text{ Погрешность } P_{\theta_c} = 4\%.$$

Таким образом, сравнение с численными данными свидетельствуют о достаточной для инженерных расчетов точности полученных решений.

Выводы

1. С помощью интегрального уравнения получены приближенные аналитические решения по расчету температур и термических напряжений в телах простой геометрической формы при их радиационном нагреве.

2. Сопоставление с численными решениями температур поверхности и центра пластины свидетельствует о достаточной для инженерных расчетов точности.

3. Показано, что расчет среднemasовой температуры и в середине тела при любых нелинейных интенсивных тепловых нагружениях, т.е. при граничных условиях I рода, можно проводить по линейной теории конвективного нагрева при больших числах Био.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А. Д., Трикило А. И. Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 1 // Математичне моделювання. — Днепродзержинск : ДДТУ. 2014. №1(30). — С. 5—8.
2. Саломатов В. В. К расчету радиационного охлаждения твердых тел // ИФЖ. — 1969. — Т. 17. — № 1. — С. 127—134.
3. Горбунов А. Д. Аналитический расчет процессов радиационного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии // Математичне моделювання — Днепродзержинск : ДГТУ. 2012. № 2(27). — С. 90—94.
4. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математичне моделювання. — Днепродзержинск : ДГТУ, 2012. № 1(26). — С. 39—45.
5. Горбунов А. Д. Коэффициент термической массивности в задачах нестационарной теплопроводности // Изв. вузов. Черная металлургия. — 2009. — №10. — С.37—40.
6. Саломатов В. В., Горбунов А. Д. Аналитическое исследование прогрева твердых тел ра-

диацией // Изв. вузов. Энергетика. — № 3. —
1969. — С.124—127.

пост.14.11.2014