

Адаптация формулы Планка для реальных тел на базе экспериментальных исследований

А.А. МОЧАЛОВ, Н.А. ШАПОВАЛ, К.Д. ЕВФИМКО, Е.П. БОЙКО, Т.А. ТКАЧЕНКО

Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, Николаев

В данной статье описана методика обработки экспериментальных данных, которая позволяет адаптировать формулу Планка для создания уравнения теплового излучения для реальных тел, используя корреляционную функцию.

У даній статті описана методика обробки експериментальних даних, яка дозволяє адаптувати формулу Планка для створення рівняння теплового випромінювання для реальних тіл, використовуючи кореляційну функцію.

The methodology of experimental data processing, that allows to adapt the Plank radiation formula for creating the equation of heat radiation for the real solids using the correlation function, is described in this article.

Постановка задачи. При расчетах отвода тепла в окружающую среду нагретыми телами необходимо вводить степень черноты реального тела.

Данная работа показывает, что к реальным телам на базе экспериментальных зависимостей распределения плотности энергии излучения, также можно применять теорию Планка.

Известны факты, что любое нагретое тело излучает в пространство электромагнитные волны в широком диапазоне частот. Это явление носит название теплового излучения. Интенсивность, т.е. энергия, излучаемая данным телом с единицы площади S в единицу времени t существенно зависит от его температуры T .

Изложение основного материала и результаты исследования. При таком излучении число квантов чистотой ω_i , испускаемых телом в единицу времени, должно равняться числу квантов сформировавшихся в объеме данного вещества той же частоты при температуре T . Для того, чтобы такой процесс существовал, необходимо было запустить существование вынужденного излучения. На основании этих постулатов Планк предложил формулу для распределения плотности энергии равновесного излучения по частотам [1]

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{2\pi\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (1)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Дирака;

h — постоянная Планка;

ω — циклическая частота квантов;

c — скорость света в вакууме;

k — постоянная Больцмана.

Выражение (1) позволяет рассчитать количество энергии излучаемой единицей площади, в единицу времени, квантами с частотой ω . При тепловом излучении, излучаются кванты в диапазоне частот от 0 до ∞ .

Предположим, что мы имеем экспериментальный график зависимости плотности излучения твердого тела, имеющего температуру T , от частоты ω (рис. 1).

На рис. 1 представлен характер зависимости плотности излучения в диапазоне частот от 0 до ∞ . Не сложно заметить, что при значении плотности излучения $\varepsilon_i(\omega, T)$ излучаются кванты с различными частотами ω' и ω'' , энергии их будут разные $\varepsilon'_i = \hbar\omega'_i$ и

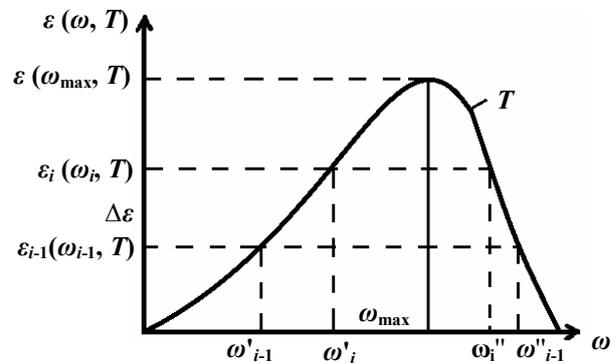


Рис. 1. График зависимости плотности излучения твердого тела от частоты.

$\varepsilon'_i = \hbar\omega''_i$. Это говорит о том, что если подставить в формулу Планка постоянное значение плотности энергии излучения $\varepsilon_i(\omega, T) = \text{const}$ и решить его относительно частоты колебаний или энергии квантов. Мы должны получить два значения частот ω'_i и ω''_i , или энергии квантов $\varepsilon'_i(\omega'_i)$ и $\varepsilon''_i(\omega''_i)$.

Если мы будем отыскивать решения для других значений энергии, отличающимися друг от друга на величину $\Delta\varepsilon$, то для каждого значения энергии у нас будет две частоты ω' и ω'' .

Максимальное значение излучательной способности найдем, исследовав формулу Планка на экстремум $\frac{d\varepsilon}{d\omega} = 0$ [2].

$$\frac{d\varepsilon(\omega, T)}{d\omega} = \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \left(3 - \frac{\hbar\omega}{kT} \right) - 3}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^2} = \frac{e^x (3-x) - 3}{(e^x - 1)^2} = 0, \quad (2)$$

где $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$.

Решив трансцендентное уравнение численным методом, получим зависимость ω_{max} от T (закон Вина)

$$\omega_{\max} = \frac{2,822kT}{\hbar} = 37 \cdot 10^{10} \cdot T \text{ с}^{-1}. \quad (3)$$

Разбиваем максимальную, спектральную плотность излучения абсолютно черного тела, $\varepsilon(T)_{\max}$, выражение (1), на N частей, получим шаг разбиения $\Delta\varepsilon(T)$

$$\Delta\varepsilon(T) = \frac{\varepsilon(T)_{\max}}{N}. \quad (4)$$

Тогда значение i -ой спектральной плотности излучения, можно записать так

$$\varepsilon_i(\omega_i, T) = \Delta\varepsilon(T) \cdot i, \quad i=1,2,3,\dots,N. \quad (5)$$

Подставив значение $\varepsilon_i(\omega_i, T)$ в формулу Планка (1), вычисляем значение этих частот (ω'_i, ω''_i) для абсолютно черного тела, где ω'_i — частота на восходящей части спектра, ω''_i — частота на нисходящей части спектра.

На базе экспериментальных данных график (рис.1), для этого же значения $\varepsilon_i(\omega_i, T)$ определяем значения ω'_{ip} и ω''_{ip} , экспериментальных частот.

Рассчитав значения частот квантов, соответствующих значениям энергии $\varepsilon_i(\omega_i, T)$ и определив по экспериментальным зависимостям частоты квантов излучаемых данным телом, при этом же значении $\varepsilon_i(\omega_i, T)$ формируем матрицы $|\varepsilon_i(\omega_i, T), \omega'_i, \omega''_i|$ для абсолютно черного тела, и для данного тела $|\varepsilon_i(\omega_i, T), \omega'_{ip}, \omega''_{ip}|$.

Обработка полученной информации осуществляется следующим образом: вычисляются энергии квантов абсолютно черного тела, для одинаковых значений энергии $\varepsilon_i(\omega_i, T)$

$$\varepsilon'_i = \hbar\omega'_i, \quad \varepsilon''_i = \hbar\omega''_i, \quad \varepsilon'_{ip} = \hbar\omega'_{ip}, \quad \varepsilon''_{ip} = \hbar\omega''_{ip}. \quad (6)$$

Учитывая, что $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon$, обработав информацию, получим матрицу $\varepsilon_i, \Delta\omega'_i, \Delta\omega''_i$, на базе которой можно вычислить количество квантов сформировавшихся в данном диапазоне частот $\Delta\omega'_i, \Delta\omega''_i$ при возрастании энергии излучения на $\Delta\varepsilon$ для черного и данного тела $\Delta\omega'_i = \omega'_i - \omega'_{i-1}; \Delta\omega''_i = \omega''_i - \omega''_{i-1}$

$$\Delta n'_i = \frac{\Delta\varepsilon}{\langle \varepsilon'_i \rangle}; \quad \Delta n''_i = \frac{\Delta\varepsilon}{\langle \varepsilon''_i \rangle}; \quad \Delta n'_{ip} = \frac{\Delta\varepsilon}{\langle \varepsilon'_{ip} \rangle}; \quad \Delta n''_{ip} = \frac{\Delta\varepsilon}{\langle \varepsilon''_{ip} \rangle}, \quad (7)$$

где $\langle \varepsilon'_i \rangle; \langle \varepsilon'_{ip} \rangle; \langle \varepsilon''_i \rangle; \langle \varepsilon''_{ip} \rangle$ — среднеинтегральная энергия кванта в данном диапазоне $\Delta\omega'_i$, среднеинтегральное число квантов в данном диапазоне частот определяется из соотношения:

$$\langle n'_i \rangle = \frac{\Delta\varepsilon}{2\hbar\omega_i^2} \left| \frac{(2i-1)\omega'_i - i\Delta\omega'_i}{1 - \frac{\Delta\omega'_i}{\omega_i}} \right|;$$

$$\langle n''_i \rangle = \frac{\Delta\varepsilon}{2\hbar\omega_i^2} \left| \frac{(2i-1)\omega''_i - i\Delta\omega''_i}{1 - \frac{\Delta\omega''_i}{\omega_i}} \right|.$$

Значения среднеинтегральных энергий по теории Планка и по результатам эксперимента вычисляются согласно соотношениям:

$$\langle \varepsilon'_i \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\omega'_{i-1} + \frac{\Delta\omega'_i}{2} \right);$$

$$\langle \varepsilon''_i \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\omega''_{i-1} + \frac{\Delta\omega''_i}{2} \right) \text{ — по формуле Планка;}$$

$$\langle \varepsilon'_{ip} \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\omega'_{(i-1)p} + \frac{\Delta\omega'_{ip}}{2} \right);$$

$$\langle \varepsilon''_{ip} \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\omega''_{(i-1)p} + \frac{\Delta\omega''_{ip}}{2} \right) \text{ — согласно эксперимента. (8)}$$

Спектральную мощность излучения в данном диапазоне частот $\Delta\omega'_i, \Delta\omega''_i$ можно вычислить из соотношений:

$$P'_i(\Delta\omega'_i) = \int_{\omega'_{i-1}}^{\omega'_i} \varepsilon'_{i-1} d\omega = \left(\varepsilon'_{i-1} + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right) \Delta\omega'_i,$$

$$P''_i(\Delta\omega''_i) = \left(\varepsilon''_{i-1} + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right) \Delta\omega''_i$$

по аналогии запишем значения для интервалов частот $\Delta\omega'_{ip}, \Delta\omega''_{ip}$:

$$P'_{ip}(\Delta\omega'_{ip}) = \left(\varepsilon'_{(i-1)p} + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right) \Delta\omega'_{ip};$$

$$P''_{ip}(\Delta\omega''_{ip}) = \left(\varepsilon''_{(i-1)p} + \frac{\Delta\varepsilon}{2} \right) \Delta\omega''_{ip}. \quad (9)$$

Формируем матрицы-столбцы для всех диапазонов частот:

$$\Delta\omega_i, \quad |\Delta\omega'_i, P'_i|, \quad |\Delta\omega''_i, P''_i|, \quad |\Delta\omega'_{ip}, P'_{ip}|, \quad |\Delta\omega''_{ip}, P''_{ip}|.$$

На базе выражения (9) вычисляем мощность, излучаемую абсолютно черным и реальным телами при температуре T , с единицы площади в единицу времени t . Для абсолютно черного тела, согласно закона Стефана-Больцмана, она должна равняться излучательной способности абсолютно черного тела при данной температуре T .

Черное тело

$$P = \sum_1^N (\langle n'_i \rangle \langle \varepsilon'_i \rangle \Delta\omega'_i + \langle n''_i \rangle \langle \varepsilon''_i \rangle \Delta\omega''_i) = \sigma T^4, \quad (10)$$

из эксперимента для данного тела

$$P_p = \sum_1^N (\langle n'_{ip} \rangle \langle \varepsilon'_{ip} \rangle \Delta\omega'_{ip} + \langle n''_{ip} \rangle \langle \varepsilon''_{ip} \rangle \Delta\omega''_{ip}).$$

После того, как будут сформированы все матрицы на базе выражений (1)-(10), для черного и данного тела, приступаем к исследованию особенностей теплового излучения данного тела, сравнивая эти особенности с черным телом, и формируя функцию рассогласования $\beta(\omega_i, T)$, которая будет определять физические особенности теплового излучения данного вещества.

Вывод. Предлагаемая методика обработки экспериментальных данных позволяет адаптировать формулу Планка для создания уравнения теплового излучения для реальных тел, используя корреляционную функцию. Такой подход к проблеме позволяет исследовать влияние кристаллической решетки, используя метод структурных единиц [3] на особенности формиро-

вання квантов, скорости их рождения, и влияние на этот процесс потенциала межатомного взаимодействия

$$P(T, p) = D \left(e^{-2A\Delta r(T, p)} - e^{-A\Delta r(T, p)} \right),$$

$$\Delta T(T, p) = \frac{r(T, p) - r_0}{r_0}.$$

И, самое очевидное, получить зависимость степени черноты данного тела от температуры $\beta(\omega_i, T) = \frac{P_p(\omega_i, T)}{P(\omega_i, T)}$, для любого диапазона частот $\Delta\omega'_{ip}$, $\Delta\omega''_{ip}$ и температуры.

Исходя из вышесказанного, излучательную способность любого вещества можно записать, используя формулу Планка (1) (адаптированную) в следующем виде:

$$\varepsilon_p(\omega, T) = \beta(\omega, T) \cdot \frac{2\hbar\omega^3}{4\pi c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (11)$$

где $\beta(\omega, T)$ — степень черноты данного вещества в соответствующем диапазоне частот, при данной температуре T .

Данное выражение (11) можно использовать для расчета теплоемкости данного вещества при различных температурах T . И как следствие, исследовать на базе метода структурных единиц, взаимосвязь физических параметров: r_0 — межатомного равновесного расстоя-

ния; D — энергии связи, A — постоянной характеризующей межатомное взаимодействие [5], c_a — атомарной теплоемкости, от термодинамических параметров p , v , T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М., Парселл Э., Крауфорд Ф., Вихман Э., Рейф Ф., Портис А. Берклевский курс физики Т. IV. Квантовая физика. М. Наука. — 1977. — 415 с.
2. Планк М. [К теории распределения энергии излучения нормального спектра](#). Избранные научные труды. Русский пер. из сборника под ред. А. П. Виноградова, стр. 251.
3. Мочалов А.А., Евфимко К.Д., Шаповал Н.А. Особенности математического моделирования динамических процессов в твердых телах с микроструктурой. Математичне моделювання. Науковий журнал Дніпродзержинського державного технічного університету. — 2013. — №2. — С. 29—32.
4. Мочалов А.А., Евфимко К.Д. Исследование влияния высокого давления на макроскопические параметры вещества. Весник СУМДУ 2008. — № 1. — С. 156—160.
5. Мочалов А.А., Евфимео К.Д., Гайша А.А. Исследование зависимости параметров потенциала Морзе и температуры и давления для металлов. Ж. Металлы и литье Украины. — 2009. — № 11—12. — С. 64.

пост. 07.10.2015

Математичні основи алгоритму функціонування системи оптимізації витрати пилувугільного палива на домену плавку

Б.П. ДОВГАЛЮК, В.О. ДУКА, Д.М. ЧЕРНИШ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Розроблено математичні основи алгоритму функціонування системи оптимізації витрати пилувугільного палива на домену плавку.

Разработаны математические основы алгоритма функционирования системы оптимизации расхода пилувугільного топлива на доменную плавку.

The mathematical basis of the algorithm of the system to optimize the flow of pulverized coal in the blast furnace.

Постановка задачі. Розробити математичні основи алгоритму функціонування системи оптимізації витрати пилувугільного палива на доменну плавку.

Результати роботи. В алгоритмі функціонування системи оптимізації витрати пилувугільного палива (ПВП) необхідно контролювати показники ефективності використання ПВП.

Це коефіцієнт заміни коксу, кг/кг: [1],

$$K_3 = \frac{g_{m(p)} + 23605C^p\eta_{co} + 121000H^p\eta_{n2} + 13400W^p\eta_{n2}}{1,8667c_k(5250 + 12648 \cdot \eta_{co})} \quad (1)$$

кількість заміненого коксу пилувугільним паливом:

$$E_{k,nen} = K_3 V_{nen}, \text{ кг/хв.} \quad (2)$$

та сума прибутку від використання ПВП, грн /г:

$$PO = E_{k,nen}C_k - V_{nen}C_{nen} - V_0C_0 + (P_f - P_3)E, \quad (3)$$

де V_{nen} — кількість ПВП, що вдувається у піч, кг/хв.;

η_{co}, η_{n2} — ступінь використання оксиду вуглецю та водню, відповідно, частка одиниці;

c_k — вміст вуглецю в коксі, частка одиниці;

C^p, H^p, W^p — вміст в ПВП, відповідно, вуглецю, водню та води, кг/кг;

C_k, C_{nen}, C_0 — ціна коксу, ПВП та технологічного кисню;

E — умовно постійні витрати на чавун;

P_f, P_3 — фактична і задана продуктивність печі.