

якої спочатку використовувався спрощений метод Ньютона:

$$\underline{\psi}^{(i+1)} = \underline{\psi}^{(i)} - J^{-1}(\underline{\psi}^{(i)}) \cdot \underline{Q}^{\psi}(\underline{\psi}^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

де $\underline{\psi}$ – вектор невідомих кутів ψ , J – матриця Якобі, \underline{Q}^{ψ} – вектор узагальнених сил, i – номер ітерації. Цей метод має перевагу швидкої збіжності, але при умові достатньо близького до розв'язку вектора $\underline{\psi}$ і для отриманої системи (35) розбігається при недостатньо малому кроці за часом.

Остаточно система (35) розв'язується методом простих ітерацій:

$$\underline{\psi}^{(i+1)} = \underline{\psi}^{(i)} - u \underline{Q}^{\psi}(\underline{\psi}^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

де u – коефіцієнт, отриманий у пошуках найменшої помилки $|\psi^{(i+1)} - \psi^{(i)}|$ при сталій кількості ітерацій. Ідея методу Зейделя спрацювала і тут – число ітерацій, необхідних для отримання розв'язку, інколи зменшується у декілька раз.

Висновки. Отримано моменти сил для доповнення математичної моделі у роботі [3], які відповідають напруженням згинання і кручення дроту. Потенційна енергія (11) не залежить від вибору системи координат і тому не має помилкового відхилення при перестановці кутів (1) – компоненти векторів залишаються незмінними. З метою прискорення розрахунку узагальнених сил по отриманим у статті формулам треба одноразово отримати значення тригонометричних

(27) і степеневих (28) функцій для усіх стрижней на початку кроку за часом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Исаев О.Б., Чичкарев Е.А., Кислица В.В., Лившиц Д.А., Носоченко О.В., Матросов Ю.И. Моделирование современных процессов внепечной обработки и непрерывной разливки стали. // – М.: Metallurgizdat, 2008. – С. 73. ISBN 978-5-902194-32-3.
2. Піптюк В.П., Самохвалов С.Є., Гніп Р.Р., Павлов С.М., Овчаренко Т.М. Вивчення траєкторії руху дроту при введенні в металеву ванну під час продувки аргоном на установці ківш-піч. // Математичне моделювання. Дніпродзержинськ – 2010. – № 1 (22). – С. 21–24;
3. Красніков К.С. Комп'ютерне моделювання тривимірного руху сталевго дроту в розплаві на установці ківш-піч / К.С. Красніков, С.Є. Самохвалов, В.П. Піптюк // Математичне моделювання, – №2(29), 2013. – С. 95–98.
4. Болотов В. Ю. Розробка раціональної теплотехнології обробки розплавів дротом в сталерозливному ковші: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.14.06 "Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика" / Болотов Вадим Юрійович – Дніпродзержинськ, 2001. – 20 с.

пост. 02.03.2016

Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 3

А.Д. ГОРБУНОВ, С.В. УКЛЕИНА

Днепродзержинский государственный технический университет

Предложена упрощенная математическая постановка задачи радиационного нагрева тел. На основе линеаризующей подстановки и решения интегрального уравнения разработано две инженерные методики расчета температур при нагреве излучением тел простой геометрической формы в виде пластины, цилиндра и шара в квазистационарной стадии.

Запропоновано спрощену математичну постановку задачі радіаційного нагріву тіл. На основі лінеаризуючої підстановки і рішення інтегрального рівняння розроблено дві інженерні методики розрахунку температур при нагріву випромінюванням тіл простої геометричної форми у вигляді пластины, циліндра і кулі в квазістаціонарній стадії.

A simplified mathematical problem radiant heating bodies. On the basis of linearizing substitution and solutions of integral equations developed by two engineering method for calculating the temperature during the heating radiation of bodies of simple geometric shapes in the form of a plate, cylinder and a ball in the quasi-stationary stage.

Анализ публикаций. В предыдущих работах авторов были усовершенствованы инженерные методики линеаризующих преобразований [1] и через решение интегрального уравнения [2], однако полученные зависимости являются достаточно громоздкими.

Цель данной работы — упрощение модели, которая впоследствии понадобится при реализации более сложной задачи нагрева тел одновременно радиацией и конвекцией.

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного радиационного нагрева тел простой геометрической формы от начальной темпера-

туры T_0 до T_c имеет вид

$$\frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\theta(X, 0) = \theta_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = Sk(1 - \theta_n^4), \quad (4)$$

где $\theta = T/T_c$; $\theta_0 = T_0/T_c$; $\theta_{\text{п}} = \theta(1, \text{Fo})$ — относительная температура на поверхности; $\text{Sk} = \sigma T_c^3 R_0 / \lambda$ — число Старка; k — фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара; $X = x/R_0$; R_0 — характерный размер тел.

Тепловой поток в уравнении (4) можно представить в виде: $Q = \text{Sk}(1 - \theta) \cdot Y(\theta)$, где $Y(\theta) = (1 + \theta)(1 + \theta^2)$. Заменяем точную кубическую функцию $Y(\theta)$ на приближённую параболическую $R(\theta) = 1 + 3 \cdot \theta^2$, которая совпадает с ней в крайних точках $R(0) = Y(0) = 1$, $R(1) = Y(1) = 4$ и максимально отличается (на 6,7 %) при средней температуре $R(1/2) = 1,75 < Y(1/2) = 1,875$.

Далее будем решать систему уравнений (1)...(4) при тепловом потоке

$$Q(\text{Fo}) = \text{Sk} \cdot S(\theta), \quad (5)$$

где $S(\theta) = (1 - \theta) \cdot (1 + 3 \cdot \theta^2)$.

Решение задачи. Как указывалось ранее в [1,2] и др., при реализации задачи необходимо иметь формулы для модели термически тонкого тела (ТТТ).

Решение в модели ТТТ. При малых числах Старка ($\text{Sk} < 1$) температуры на поверхности $\theta_{\text{п}}$, в центре $\theta_{\text{ц}}$ и в середине материала $\theta_{\text{ср}}$ почти не отличаются друг от друга и равны просто θ . Теперь вместо уравнения теплопроводности (1) необходимо решать следующее дифференциальное уравнение теплового баланса:

$$d\theta = kQ(\theta) \cdot d\text{Fo}. \quad (6)$$

Разделяя переменные и интегрируя (6) с учётом начального условия (2) и теплового потока (5), получим

$$\tilde{\text{Fo}} = F(\theta) - F(\theta_0), \quad (7)$$

где $\tilde{\text{Fo}} = k \int_0^{\text{Fo}} \text{Sk}(\eta) d\eta$ — модифицированное число Фурье;

$$F(\theta) = \int \frac{d\theta}{S(\theta)} = -\frac{1}{8} \ln \frac{(1-\theta)^2}{R(\theta)} + \frac{\alpha}{4} \arctg(\alpha\theta), \quad \alpha = \sqrt{3}. \quad (8)$$

Для облегчения расчетов температур по модели ТТТ (7), на рисунке 1 приведена зависимость (8).

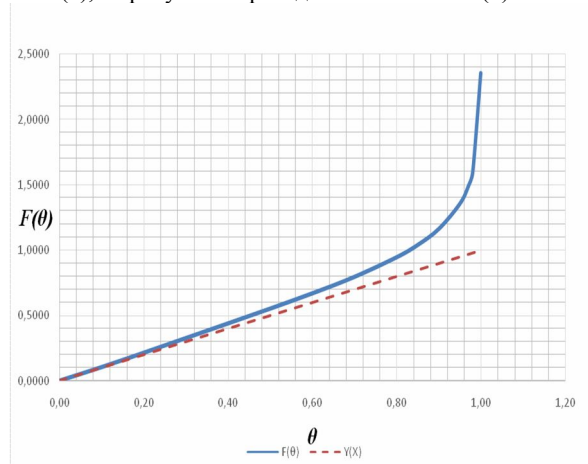


Рис. 1. Зависимость функции $F(\theta)$ согласно (8)

Далее решим исходную задачу с использованием линеаризующей подстановки, аналогичной [1].

Решение через подстановку. С целью линеаризации граничного условия (5), введем новую переменную $W(X, \text{Fo})$, связанную с $\theta(X, \text{Fo})$ соотношением:

$$W(X, \text{Fo}) = \exp[-F(\theta(X, \text{Fo}))]. \quad (9)$$

Тогда, исходная система уравнений (1)...(4) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial W(X, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 W(X, \text{Fo})}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial W(X, \text{Fo})}{\partial X} + \psi(X, \text{Fo}), \quad (10)$$

$$W(X, 0) = \exp(-F(\theta_0)) = W_0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial W(0, \text{Fo})}{\partial X} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial W(1, \text{Fo})}{\partial X} = -\text{Sk} \cdot W_n(\text{Fo}), \quad (13)$$

где

$$\psi(X, \text{Fo}) = \frac{-(1+S')}{W(X, \text{Fo})} \cdot \left[\frac{\partial W(X, \text{Fo})}{\partial X} \right]^2; \quad (14)$$

$$S' = dS/d\theta = -1 + 6\theta - 9\theta^2.$$

Комплекс (14), имитирующий внутренний сток тепла переменной интенсивности, содержит в себе все нелинейные особенности исходно задачи (1)...(4). В первом приближении искомая температура $W(X, \text{Fo})$ может быть найдена из решения системы уравнений (10)...(13) при $\psi(X, \text{Fo}) = 0$ [3]

$$W(X, \text{Fo}) = W_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot U_n(X) \cdot e^{\mu_n^2 \text{Fo}} \quad (15)$$

или в квазистационарной стадии с учетом одного члена ряда (15), при времени $\text{Fo} > 0,3$ для температуры поверхности ($X = 1$)

$$W_n(\text{Fo}) = W_0 \cdot P \cdot e^{-\mu^2 \text{Fo}}, \quad (16)$$

центра ($X = 0$)

$$W_{\text{ц}}(\text{Fo}) = W_0 \cdot A \cdot e^{-\mu^2 \text{Fo}} \quad (17)$$

и среднемассовой

$$W_{\text{ср}}(\text{Fo}) = W_0 \cdot B \cdot e^{-\mu^2 \text{Fo}}, \quad (18)$$

где $P_n = \frac{2\text{Sk}}{\text{Sk}(\text{Sk} + 2 - k) + \mu_n^2}$; $B_n = P_n \cdot \frac{k \cdot \text{Sk}}{\mu_n^2}$;

$A_n = P_n \cdot U_n(0)$ — тепловые амплитуды; $P = P_1$; $A = A_1$ и т. д.; μ_n — корни соответствующего характеристического уравнения, например, для пластины $\text{ctg} \mu_n = \mu_n / \text{Sk}$; $U_n(X)$ — координатная функция, например, для пластины: $U_n(X) = \cos \mu_n X / \cos \mu_n$.

В работе [3] предложена общая для всех трех тел формула по расчету первого корня

$$\mu = \sqrt{D/\gamma}, \quad (19)$$

где $D = k \cdot \text{Sk} / \tilde{m}$; $\tilde{m} = 1 + g \cdot \text{Sk}$ — коэффициент термической массивности тела (КТМТ);

$$\gamma = \left(1 + \sqrt{1 + 4\rho}\right) / 2; \quad \rho = D^2 / [k(k+2)(k+4)]; \quad g = 1/(k+2).$$

После определения $W(X, Fo)$ следует сделать переход с помощью уравнения (9) от W к исходной температуре θ , однако из-за сложности функции (8) $F(\theta)$ сделать это весьма затруднительно. Для упрощения этого перехода поступим следующим образом.

Сначала воспользуемся разложением функции $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ и $\arctg x \approx x - \frac{x^3}{3}$ в ряд при малых аргументах ($x < 1$).

Тогда

$$F(\theta) \approx \theta \left(1 + \frac{\theta}{8} - \frac{2\theta^2}{3} + \dots \right) \approx \theta. \quad (20)$$

Из уравнения (9) получим

$$W = e^{-\theta} \quad \text{или} \quad \theta = -\ln W. \quad (21)$$

На рисунке 1 для наглядности нанесена прямая (20).

В конечной стадии процесса нагрева, когда температура θ близка к 1, положим в уравнении (8) $F(\theta) \approx -\frac{1}{8} \ln \frac{(1-\theta)^2}{4} + C_1$, где $C_1 = (\sqrt{3}/4) \cdot \arctg \sqrt{3} = 0,45345$.

Окончательно, после потенцирования, из (9) будем иметь:

$$\theta(W) = 1 - C_2 \cdot W^4, \quad (22)$$

где $C_2 = 2 \cdot \exp(4 \cdot C_1) = 12,267275$.

Обработка кривой (9) в области средних температур методом наименьших квадратов позволила установить аппроксимирующую линию

$$W = a(1 - \theta/b) \quad \text{или} \quad \theta = b - (a/b) \cdot W = 1,37 - 1,49 \cdot W. \quad (23)$$

На рис. 2 наглядно видно, что зависимость (9) лежит между тремя кривыми (21), (22) и (23). Таким образом, искомый переход от W к θ имеет вид:

$$\theta(W) = \begin{cases} -\ln W, & \text{если } 0,7 < W \leq 1 \\ 1,37 - 1,49 \cdot W, & \text{если } 0,3 < W \leq 0,7 \\ 1 - C_2 W^4, & \text{если } 0 \leq W < 0,3. \end{cases}$$

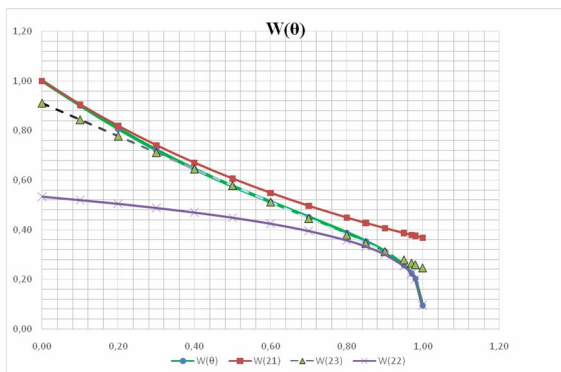


Рис. 2. Зависимости $W(\theta)$, $W(21)$, $W(23)$, $W(22)$

На начальной стадии нагрева, когда $\theta < 0,7$, можно использовать (21) и тогда уравнения (16)...(18) значительно упрощаются до следующей линейной зависимости от времени Fo :

$$\theta_n(Fo) = -\ln W_n(Fo) = C_p + \mu^2 Fo, \quad \theta_{ц}(Fo) = C_c + \mu^2 Fo$$

$$\text{и} \quad \theta_{cp}(Fo) = C_{cp} + \mu^2 Fo, \quad (24)$$

где $C_p = -\ln W_0 - \ln P = F(\theta_0) - \ln P$; $C_c = C_p - \ln H_k \equiv F(\theta_0) - \ln A$, $C_{cp} = C_p - \ln m$.

Пологая в уравнении (24) заданную температуру в центре $\theta_{ц,3} = \theta_0 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = 5\% = 0,05$ можно условно трактовать как степень начала нагрева центральных точек тела, получим время инерционного периода

$$Fo_1 = (\ln A + \tilde{\varepsilon}) / \mu^2, \quad (25)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \theta_{ц,3} - F(\theta_0) \leq \varepsilon_n$.

В конечной стадии нагрева ($0,7 < \theta \leq 1$) с учетом зависимости (22) будем иметь

$$\theta_j(Fo) = 1 - C_{3j} \exp(-4\mu^2 Fo), \quad (26)$$

где $C_{3j} = C_2 \cdot W_0^4 \cdot \begin{cases} P^4, & \text{если } j = 1 - \text{поверхность} \\ H_k^4, & \text{если } j = 2 - \text{центр тела} \\ m^4, & \text{если } j = 3 - \text{среднемассовая температура} \end{cases}$

Далее решим исходную задачу (1)...(3), (5) путем использования интегрального уравнения.

Решение интегрального уравнения.

Следуя Э.М. Гольдфарбу [4], зададимся полем температур в виде

$$\theta(X, Fo) = \theta_n(Fo) - Q(Fo) \cdot V(X) / K_2, \quad (27)$$

где K_2 — коэффициент усреднения теплового потока; $V(X)$ — относительная функция распределения температур от центра тела $X = 0$ до поверхности при $X = 1$.

Применяя к соотношению (27) операцию усреднения [4], получим интегральное уравнение

$$\theta_{cp}(Fo) = \theta_0 + k \int_0^{Fo} Q(\eta) \cdot d\eta = \theta_n(Fo) - \tilde{g} \cdot Q(Fo), \quad (28)$$

где $\tilde{g} = V_{cp} / K_2$; $V_{cp} = k \int_0^1 V(X) \cdot X^{k-1} \cdot dX$ — среднее значение функции распределения. При умеренных числах Старка $V(X) = 1 - X^2$, $V_{cp} = 2g$, $K_2 = 2$ и $\tilde{g} = g = 1/(k+2)$.

Полученное соотношение можно назвать уравнением связи между тепловым потоком, среднемассовой и поверхностной температурами в квазистационарной стадии нагрева тел правильной геометрической формы.

Дифференцируя интегральное уравнение (28) по времени Fo , разделяя переменные и интегрируя, получим выражение для расчета температуры поверхности

$$\tilde{Fo} = \Phi(\theta) - \Phi(\theta_*), \quad (29)$$

где $\tilde{Fo} = k \cdot Sk \cdot Fo$ — модифицированное число Фурье; $\Phi(\theta) = F(\theta) - a \ln S(\theta)$; $F(\theta)$ — см. уравнение (8); $a = \tilde{g} \cdot Sk$; $S(\theta) = (1 - \theta) \cdot (1 + 3\theta^3)$; $\theta = \theta_n(Fo)$ — искомая относительная температура на поверхности.

Под θ_* в уравнении (29) понимается начальная для квазистационарной стадии температура поверхно-

сти, которая находится из интегрального уравнения (28) при $Fo = 0$:

$$\theta_0 = \theta_* - a \cdot S(\theta_*) . \quad (30)$$

Приведем полученное кубическое, относительно θ_* уравнение, к каноническому виду

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 , \quad (31)$$

где $x \equiv \theta_*$, $\alpha = -1$, $\beta = (1+1/a)/3$; $\gamma = -(1+\theta_0/a)/3$.

Используя подстановку Кардано [5], $y = x + \alpha/3$, уравнение (31) сводится к так называемому «неполному» виду:

$$y^3 + py + q = 0 , \quad (32)$$

решением которого будет

$$y = A + B , \quad (33)$$

где $p = -\alpha^2/3 + \beta = 1/(3a)$; $q = 2(\alpha/3)^3 - \alpha\beta/3 + \gamma = -2/27 + (1+1/a)/9 - (1+\theta_0/a)/3$; $A = (-q/2 + \sqrt{Q})^{1/3}$; $B = (-q/2 - \sqrt{Q})^{1/3}$; $Q = (p/3)^3 + (q/2)^2$; для проверки результатов может служить выражение $A \cdot B = -p/3$.

Ввиду громоздкости решения (33) бывает целесообразнее использовать более простой итерационный процесс. Так, применяя к уравнению (32) метод касательных Ньютона [5], получим следующую итерационную форму:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)} = \frac{2y_k^3 - q}{3y_k^2 + p} , \quad (34)$$

где в качестве нулевого приближения логично принять $y_0 = 0$ и получить первое $y_1 = -q/p$.

Окончательно, после определения y , искомая температура $\theta_* = y + 1/3$. Для экспресс-расчетов, не требующих особой точности, можно предложить простую приближенную формулу, получающуюся из уравнения (31) при $x^3 = x^2 = 0$:

$$x_0 \equiv \theta_* = -\gamma/\beta = (\theta_0 + a)/(1 + a) . \quad (35)$$

Температуру в центре тела найдем из уравнения (27) при $V(0) = 1$ и $K_2 \cong 2$:

$$\theta_{ц}(Fo) = \theta_n(Fo) - Sk \cdot S(\theta_n)/2 . \quad (36)$$

Проверка модели на адекватность. Проверка на работоспособность разработанных методик путем сопоставления с данными численного решения нагрева пластины ($k=1$) от начальной температуры $\theta_0 = 0,2$ с числом Старка $Sk = 2$, приведенными в работе [2], показала, что погрешность определения температур не превышает 10% и ее можно считать вполне приемлемой для инженерных расчетов.

Выводы:

1. Предложена упрощенная математическая постановка задачи радиационного нагрева тел.
2. На основе линеаризующей подстановки и решения интегрального уравнения разработаны две инженерные методики расчета нагрева излучением тел простой геометрической формы в виде пластины цилиндра и шара в квазистационарной стадии.
3. Сопоставление методик с численным решением показало, что погрешность определения температур не превышает 10 % и ее можно считать приемлемой для инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А. Д., Трикило А. И. Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 1 // Математичне моделювання. — Днепродзер-жинск: ДДТУ. 2014. №1(30). — С. 5—8.
2. Горбунов А. Д., Трикило А. И., Уклеина С.В. Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 2 // Математичне моделювання. — Днепродзержинск: ДДТУ. 2015. №1(32). — С. 3—8.
3. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математичне моделювання. — Днепродзержинск: ДДТУ, 2012. № 1(26). — С. 39—45.
4. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов. — М.: Металлургия, 1967. — 439 с.
5. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. — 720 с.

пост. 10.03.2016