но считать эквивалентными, тогда представляет интерес рассмотреть задачу синтеза единой модели внешнего воздействия для всех описаний (моделей) из K_A и K_B [1, 3]. Постановка задач синтеза адекватного математического описания в случае неточных операторов $A_p \in K_A$, $B_p \in K_B$ может найти применение при математическом моделировании в случаях, когда адекватное математическое описание удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, например, условию минимизации затрат управления. Одним из возможных вариантов постановки такой задачи может быть задача построения *наиболее устойчивого решения* на множестве Q_{h_1, d_1, δ_1}:

$$\Omega[z^0] = \inf_{z \in Q_{h_1, d_1, \delta_1} \cap Z_1} \Omega[z]. \quad (18)$$

Расчеты ряда практических задач показали, что множество Q_{h_1, d_1, δ_1} является слишком широким множеством, в которое попадает, как правило, тривиальная функция. Для устранения этого недостатка в работах [7, 8] предложен метод специального оператора, который позволяет повысить точность приближенного решения.

Выводы

В работе сформулирована получения адекватного математического описания процессов преобразования измерительного сигнала в ЭС, которые хорошо описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрены особенности задачи и предложен метод нахождения устойчивого решения. Впервые сформулирована задача синтеза для класса операторов. Выполнена постановка задачи синтеза внешнего воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меньшиков Ю. Л. Вестник ХГТУ: Херсон, № 2 (15) / Ю. Л. Меньшиков. – Х.: 2002. – 326–329 с.
2. Меньшиков Ю. Л.. Вістник КНУ, / Ю. Л. Меньшиков. – 2-е изд-во К.: Математика, 2004. – 310–315 с.
3. Меньшиков Ю. Л. Идентификация моделей внешних воздействий. / Ю. Л. Меньшиков., Н. В. Поляков. – Д.: Вид-во «Наука та Освіта». – 2009, 188 с.
4. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин – М.: Наука, 1979. – 287 с.
5. Виленкин С. Я., Автоматика и телемеханика, – 1968, № 2. – 52–55 с.
6. Меньшиков Ю. Л. Сб. Динамика и прочность тяжелых машин / Ю. Л. Меньшиков – 9-е изд-во Д.: Днепропетр. ун-т., 1985. – 89–91 с.
7. Меньшиков Ю. Л., Обратная задача синтеза модели внешнего воздействия Харьков, 9: / Ю. Л. Меньшиков. – Х.: “Вестник нац. технич. ун-та ХПИ”. – Сб. науч. Трудов т. 8, 2002. – 132–136 с.
8. Меньшиков Ю. Л. Proc. of Problems of Decision making under Uncertainties (PDMU–2003)” / Ю. Л. Меньшиков, А. Г. Наконечный. – Int. Conf, September 8–12, – 2003, Kiev–Alushta. Ukraine. 2003. – 80–82 с.

пост. 10.05.2016

О.А. ЖУЛЬКОВСКИЙ, к.т.н., доцент
И.И. ЖУЛЬКОВСКАЯ, к.т.н., доцент
М.В. БАБЕНКО, к.т.н., доцент
Днепродзержинский государственный технический университет, г. Каменское

Особенности математического моделирования процессов комбинированного теплообмена в технологических системах

Представлена методика математического моделирования процессов комбинированного (радиационно-конвективного) теплообмена в технологических системах. Ввиду известной сложности численной реализации задач теплопереноса расчеты сложного теплообмена рекомендуется проводить на основе принципа аддитивности, а при записи конечно-разностной аппроксимации граничных условий целесообразно воспользоваться коэффициентом радиационного теплообмена.

Постановка проблемы

Трудоемкость, материалоемкость и дороговизна лабораторных, полупромышленных и промышленных экспериментов, их ограниченность, многомерность и нелинейность исследуемых процессов и явлений, а также стремительное развитие вычислительной техники и программного обеспечения значительно актуализировало теоретические исследования (математическое моделирование).

Особая роль в разработке и исследовании технологических систем, характеризующихся высокотемпературными условиями протекания процессов (в металлургии, энергетике, машиностроении др.), отводится созданию рациональных математических моделей процессов теплообмена.

Анализ последних исследований

Как известно [1], основой математических моделей указанных процессов является дифференциальное уравнение теплопроводности, связывающее временное и пространственное изменения температуры проектируемого или исследуемого процесса, агрегата, конструкции и т.п.:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) + q_V, \quad (1)$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность; T — температура; τ — время; λ — теплопроводность; q_V — мощность внутренних источников теплоты.

Уравнение (1) может быть использовано для решения конкретных задач теплопроводности, если оно дополнено соответствующими краевыми условиями (условиями однозначности), среди которых — граничные условия, характеризующие процесс теплообмена между поверхностью тела и окружающей его средой.

На практике обычно имеет место совместный (комбинированный) или сложный теплообмен, сочетающий процессы теплопроводности, конвекции и радиационного (лучистого) теплообмена. Среди процессов сложного теплообмена радиационно-конвективный перенос теплоты является наиболее общим случаем, при котором теплота переносится не только радиацией, но и теплопроводностью и конвекцией [1—3].

Таким образом, в большинстве практических задач преобладают граничные условия III рода с известными закономерностями теплообмена между поверхностью тела и средой.

Ввиду крайней сложности получаемых решений оценочные расчеты сложного теплообмена можно проводить на основе принципа аддитивности — отдельно и независимо вычислять радиационную и конвективную составляющие тепловых потоков, а результаты суммировать [1].

Формулировка цели исследования

Рассмотрим особенности численного решения следующей задачи комбинированного (радиационно-конвективного) теплообмена в отсутствие внутренних источников теплоты:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right); \tag{2.1}$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_S=\alpha_k\left(T_S-T_0\right)+\sigma_0 a_S\sum_{j=1}^{n}a_j\Phi_{S\,j}\left(T_S^4-T_{r_j}^4\right); \tag{2.2}$$

$$T(x,0)=T_0\,, \tag{2.3}$$

где x — соответствующая координата; α — коэффициент теплоотдачи; σ_0 — постоянная Стефана-Больцмана; a — поглощательная способность поверхности; Φ — разрешающий угловой коэффициент излучения; T_0 — начальная температура набегающего потока вдали от поверхности (или температура окружающей среды); T_r — температура поверхностей, участвующих в радиационном теплообмене.

Присутствующий в (2.2) индекс S (от англ. *surface* — поверхность) обозначает поверхность расчетной области, индексы k и r — конвективную и радиационную составляющие сложного теплообмена соответственно.

В данной постановке задачи имеют место идентичные условия сложного теплообмена на обеих граничных поверхностях (2.2).

Изложение основного материала

В граничных условиях (2.2) наряду с традиционным законом Ньютона-Рихмана, описывающим конвективную составляющую комбинированного теплообмена, присутствует выражение [4] для учета плотности потока результирующего излучения в замкнутой системе n излучающих серых тел, разделенных прозрачной (диатермичной) средой. При этом задача радиационного теплообмена в итоге сводится к нахождению геометрических инвариантов излучения, а именно его угловых коэффициентов.

Расчет угловых коэффициентов излучения для сложных геометрических систем может представлять достаточно сложную математическую задачу. Значения угловых коэффициентов определяются формой, размерами излучающих поверхностей, а также взаимным расположением в пространстве тел, находящихся в состоянии радиационного теплообмена. Кроме того, не всегда рассматриваемую систему можно свести к системе классической геометрии, что вносит дополнительные трудности в методику расчета. Все это в конечном итоге усложняет алгоритм решения задачи радиационного теплообмена.

Для $n<3$ задач радиационного теплообмена значительно упрощается, редуцируясь в распространенные классические задачи.

Разностные схемы для дифференциального уравнения (1) должны правильно отражать в пространстве сеточных функций основные свойства исходной задачи, такие как самосопряженность, знакоопределенность и т.д. Для сложных задач, описываемых нелинейными уравнениями или уравнениями с переменными коэффициентами, простая замена производных конечными разностями не может считаться приемлемой, т.к. приведет к схемам с большой погрешностью, непригодными для счета. В этой связи важной задачей является получение так называемых консервативных разностных схем, численные решения которых удовлетворяют закону сохранения энергии [5, 6 и др.].

Исходя из вышесказанного, разностные схемы для нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности (1), обычно получают [5 и др.] не традиционным способом (из аппроксимации операторов дифференциального уравнения), а интегро-интерполяционным методом или методом баланса (из непосредственной аппроксимации отношений теплового баланса, записанных для элементарных объемов). При этом для тепловых потоков на границах используются выражения, обеспечивающие выполнение условий согласования.

Кроме того, при численном моделировании продолжительных процессов комбинированного теплообмена чаще прибегают к использованию безусловно устойчивых неявных схем расчета вместо условно устойчивых и неэффективных явных схем.

Таким образом, запишем для уравнения (2.1) и граничных условий (2.2) неявную разностную схему, построенную интегро-интерполяционным методом:

– для граничных точек:

$$c_1\rho_1\frac{T_1^\tau-T_1^{\tau-\Delta\tau}}{\Delta\tau}=\frac{2}{\Delta x}\Big[\alpha_k(T_0-T_1^\tau)+$$
$$+\sigma_0 a_1\sum_{j=1}^{n}a_j\Phi_{1j}\left(T_{r_j}^4-\left(T_1^\tau\right)^4\right)-\frac{\lambda_{1+1/2}}{\Delta x}(T_1^\tau-T_2^\tau)\Big]; \tag{3.1}$$

$$c_N\rho_N\frac{T_N^\tau-T_N^{\tau-\Delta\tau}}{\Delta\tau}=\frac{2}{\Delta x}\Bigg[\frac{\lambda_{N-1/2}}{\Delta x}(T_{N-1}^\tau-T_N^\tau)-$$
$$-\alpha_k(T_N^\tau-T_0)-\sigma_0 a_N\sum_{j=1}^{n}a_j\Phi_{N\,j}\left(\left(T_N^\tau\right)^4-T_{r_j}^4\right)\Bigg]; \tag{3.2}$$

– для внутренних точек ($i=\overline{2,N-1}$):

$$c_i\rho_i\frac{T_i^\tau-T_i^{\tau-\Delta\tau}}{\Delta\tau}=\frac{1}{\Delta x^2}\Big[\lambda_{i-1/2}(T_{i-1}^\tau-T_i^\tau)-$$
$$-\lambda_{i+1/2}(T_i^\tau-T_{i+1}^\tau)\Big], \tag{3.3}$$

где эффективные теплопроводности отрезков могут быть рассчитаны, например, по формуле [5]:

$$\lambda_{i\pm1/2} = \frac{2\lambda(T_i)\lambda(T_{i\pm1})}{\lambda(T_i)+\lambda(T_{i\pm1})}.$$

Рассматриваемую одномерную задачу (2.1)—(2.3) достаточно просто распространить и на многомерные случаи, используя так называемую локально-одномерную схему расщепления по пространственным переменным, сочетающую достоинства явных (малые затраты машинного времени на шаге по времени) и неявных схем (безусловная устойчивость) [5—7].

В локально-одномерных схемах протекание многомерного физического процесса на каждом временном шаге представляется как результат последовательной реализации соответствующих одномерных процессов, каждый из которых начинается от распределения поля, возникшего после окончания предыдущего одномерного процесса. На основе такого расщепления задачи по пространственным переменным моделирование одномерных процессов проводится с помощью неявных схем, а последовательное действие процессов учитывается по существу явным образом, т.е. решение многомерной задачи сводится к расчету на каждом шаге по времени набора одномерных задач. Применение же неявной аппроксимации одномерных задач обеспечивает безусловную устойчивость схемы [5].

Таким образом, при решении многомерных задач комбинированного теплообмена осуществляется последовательное решение одномерных задач типа (2.1)—(2.3) с учетом числа расщеплений процесса теплообмена по направлениям распространения теплового потока, т.е. принятой системы координат.

Систему уравнений теплового баланса для любого из направлений расщепления по пространственным переменным можно записать в следующем каноническом виде:

$$A_i T_{i-1} - C_i T_i + B_i T_{i+1} + F_i = 0\,,\ (\,i = \overline{1,N}\,), \qquad (4)$$

где $A_1 = B_N = 0$.

Краевая задача (4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, что позволяет организовать вычисления по модифицированному методу Гаусса, т.е. методом прогонки [5, 6].

Классический алгоритм численной реализации указанного метода требует изначального вычисления значений коэффициентов A_i, B_i, C_i, F_i системы уравнений (4) для их последующей подстановки в соответствующие уравнения.

Таким образом, для решения задачи (2.1)—(2.3) методом прогонки достаточно систему уравнений теплового баланса (3.1)—(3.3) привести к каноническому виду (4).

Однако при непосредственной записи выражения для расчета плотности потока радиационного теплообмена в конечно-разностные уравнения (3.1) и (3.2) возникает проблема их дальнейшего приведения к виду (4), где все температуры возле коэффициентов A_i, B_i, C_i должны быть записаны в первой степени.

Во избежание указанной проблемы при записи конечно-разностной аппроксимации граничных условий для уравнения теплопроводности, описывающего комбинированный (радиационно-конвективный) теплообмен, целесообразно воспользоваться коэффициентом радиационного теплообмена [8]:

$$\alpha_r = \frac{q_r}{\Delta T_{\text{р}}}\,, \qquad (5)$$

где q_r — плотность теплового потока за счет радиационного теплообмена; $\Delta T_{\text{р}}$ — расчетный температурный напор ($\Delta T_{\text{р}} = |T_S - T_r|$).

Итак, граничные условия (3.1) и (3.2) с учетом (5) принимают следующий вид:

$$c_1\rho_1 \frac{T_1^{\tau} - T_1^{\tau-\Delta\tau}}{\Delta\tau} = \frac{2}{\Delta x}\left[\alpha_k(T_0 - T_1^{\tau}) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{r_j}\left(T_{r_j} - T_1^{\tau}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda_{1+1/2}}{\Delta x}(T_1^{\tau} - T_2^{\tau})\right]; \qquad (3.1.1)$$

$$c_N\rho_N \frac{T_N^{\tau} - T_N^{\tau-\Delta\tau}}{\Delta\tau} = \frac{2}{\Delta x}\left[\frac{\lambda_{N-1/2}}{\Delta x}(T_{N-1}^{\tau} - T_N^{\tau}) - \right.$$
$$\left. - \alpha_k(T_N^{\tau} - T_0) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{r_j}\left(T_N^{\tau} - T_{r_j}\right)\right]. \qquad (3.2.1)$$

Теперь из уравнений (3.1.1), (3.1.2) и (3.3) нетрудно вывести расчетные формулы для коэффициентов уравнения (4), и далее, методом прогонки, найти решение задачи (2.1)—(2.3).

Большинство практических задач теплообмена являются нелинейными, т.к. теплофизические величины уравнения (1), а также коэффициенты теплоотдачи и радиационного теплообмена в его граничных условиях являются функциями искомой температуры.

Теплофизические величины обычно получают в результате аппроксимации температурными функциями соответствующих табличных значений.

Существует два подхода к решению нелинейных задач [5]. Наиболее простыми в реализации и экономически оправданными являются так называемые квазилинейные разностные схемы, в которых искомые коэффициенты уравнения теплопроводности и его граничных условий вычисляются в зависимости от значения температуры с предыдущего временного слоя. Чисто нелинейные схемы, когда коэффициенты уравнения теплопроводности берутся при значениях температуры на новом временном слое, требуют применения итерационных методов для построения сходящегося итерационного процесса, на каждом шаге которого решается система линейных уравнений. В такой постановке объем вычислений заметно возрастает по сравнению с квазилинейной схемой, а численное моделирование продолжительных технологических процессов становится весьма затруднительным.

Рассмотренные подходы к математическому моделированию процессов комбинированного теплообмена широко используются авторами работы при исследовании тепловых режимов технологического оборудования.

Выводы и дальнейшие перспективы

Итак, в работе представлена методика математического моделирования процессов комбинированного (радиационно-конвективного) теплообмена в технологических системах, основывающаяся на численном решении многомерного дифференциального уравнения теплопроводности со сложными граничными условиями. При этом конечно-разностная аппроксимация уравнения теплопроводности и граничных условий получается интегро-интерполяционным методом (методом баланса). Для решения многомерных задач теплообмена применяется локально-одномерная схема расчета на основе расщепления процесса теплообмена по пространственным переменным. Ввиду известной сложности численной реализации задач теплопереноса расчеты сложного теплообмена рекомендуется проводить на основе принципа аддитивности, а при записи конечно-разностной аппроксимации граничных условий целесообразно воспользоваться коэффициентом радиационного теплообмена.

Рассмотренные подходы к математическому моделированию процессов комбинированного теплообмена могут быть использованы при исследовании тепловых режимов технологического оборудования в металлургии, энергетике, машиностроении и других отраслях, а также при подготовке студентов профильных специальностей университетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В.А.Григорьева, В.М.Зорина.– М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.
2. Михеев М.А. Основы теплопередачи / Михеев М.А., Михеева И.М. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
3. Исаченко В.П. Теплопередача / Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
4. Блох А.Г. Теплообмен излучением: Справочник / Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
5. Дульнев Г.Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. – М.: Высш. шк., 1990. – 207 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем / Самарский А.А. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
7. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / Белоцерковский О.М. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
8. Казанцев Е.И. Промышленные печи: Справочное руководство для расчетов и проектирования / Казанцев Е.И. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.

пост. 01.06.2016

А.Д. ГОРБУНОВ, д.т.н., профессор
А.И. СОРОХМАНЮК, магистр
Днепродзержинский государственный технический университет, г. Каменское

К расчету максимальных термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) пластины

Разработаны инженерная аналитическая методика и номограмма расчета максимальных термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) пластины. Ключевые слова: аналитический и графический расчет, нагрев (охлаждение), максимальные термические напряжения, пластина.

Постановка проблемы и анализ публикаций

Без знания термических напряжений внутри массивного тела невозможно назначить подходящие энерго- и материалосберегающие тепловые режимы печей или других агрегатов, связанных с тепловой обработкой материалов, например, термических печей, сушильных установок и т. п. При значительных скоростях нагрева в пластине могут возникать напряжения, превышающие допустимые для данного материала, приводящие в некоторых случаях даже к разрушению тела.

В работах [1, 2] предложена аналитическая инженерная методика расчета осевых термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) плоских тел. В ряде случаев, для экспресс-расчетов, не нуждающихся в особой точности, целесообразно иметь графический способ решения. В монографии [3] приведена номограмма для определения максимальных термических напряжений на поверхности, в центре пластины и время их наступления в зависимости от числа Био. Однако, в [3] отсутствует зависимость максимальной разности температур $\Delta\vartheta_{\text{м}}$, а также замечена неточность в определении времени наступления наибольших напряжений в центре пластины. Цель данной работы — построение более полной номограммы.

В работе [1] приведены аналитические решения для расчета относительных термических напряжений в любой точке неограниченной пластины при ее конвективном нагреве в печи с постоянной температурой греющей среды t_{c}

$$\tilde{\sigma}(X,\text{Fo}) = \vartheta_{\text{ср}}(\text{Fo}) - \vartheta(X,\text{Fo}) \,, \qquad (1)$$

на поверхности при $X = 1$

$$\tilde{\sigma}_{\text{п}}(\text{Fo}) = \vartheta_{\text{ср}}(\text{Fo}) - \vartheta_{\text{п}}(\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \,, \qquad (2)$$

и в центре пластины при $X = 0$

$$\tilde{\sigma}_{\text{ц}}(\text{Fo}) = \vartheta_{\text{ср}}(\text{Fo}) - \vartheta_{\text{ц}}(\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \,, \qquad (3)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma / \sigma_0$ — безразмерные термические напряжения, $0 \le \tilde{\sigma} \le 1$; $\sigma_0 = \beta E \Delta t_0 / (1-\nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па.

Здесь относительные температуры:

в любой точке $X = x / R_0$

$$\vartheta(X,\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \,, \qquad (4)$$