

баланса). Для решения многомерных задач теплообмена применяется локально-одномерная схема расчета на основе расщепления процесса теплообмена по пространственным переменным. Ввиду известной сложности численной реализации задач теплопереноса расчеты сложного теплообмена рекомендуется проводить на основе принципа аддитивности, а при записи конечно-разностной аппроксимации граничных условий целесообразно воспользоваться коэффициентом радиационного теплообмена.

Рассмотренные подходы к математическому моделированию процессов комбинированного теплообмена могут быть использованы при исследовании тепловых режимов технологического оборудования в металлургии, энергетике, машиностроении и других отраслях, а также при подготовке студентов профильных специальностей университетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.
2. Михеев М.А. Основы теплопередачи / Михеев М.А., Михеева И.М. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
3. Исаченко В.П. Теплопередача / Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
4. Блох А.Г. Теплообмен излучением: Справочник / Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 432 с.
5. Дульнев Г.Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. – М.: Высш. шк., 1990. – 207 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем / Самарский А.А. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
7. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / Белоцерковский О.М. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
8. Казанцев Е.И. Промышленные печи: Справочное руководство для расчетов и проектирования / Казанцев Е.И. – М.: Металлургия, 1975. – 368 с.

пост. 01.06.2016

А.Д. ГОРБУНОВ, д.т.н., профессор

А.И. СОРОХМАНЮК, магистр

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

К расчету максимальных термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) пластины

Разработаны инженерная аналитическая методика и номограмма расчета максимальных термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) пластины. Ключевые слова: аналитический и графический расчет, нагрев (охлаждение), максимальные термические напряжения, пластина.

Постановка проблемы и анализ публикаций

Без знания термических напряжений внутри массивного тела невозможно назначить подходящие энерго- и материалосберегающие тепловые режимы печей или других агрегатов, связанных с тепловой обработкой материалов, например, термических печей, сушильных установок и т. п. При значительных скоростях нагрева в пластине могут возникать напряжения, превышающие допустимые для данного материала, приводящие в некоторых случаях даже к разрушению тела.

В работах [1, 2] предложена аналитическая инженерная методика расчета осевых термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) плоских тел. В ряде случаев, для экспресс-расчетов, не нуждающихся в особой точности, целесообразно иметь графический способ решения. В монографии [3] приведена номограмма для определения максимальных термических напряжений на поверхности, в центре пластины и время их наступления в зависимости от числа Био. Однако, в [3] отсутствует зависимость максимальной разности температур $\Delta \vartheta_m$, а также замечена неточность в определении времени наступления наибольших напря-

жений в центре пластины. Цель данной работы — построение более полной номограммы.

В работе [1] приведены аналитические решения для расчета относительных термических напряжений в любой точке неограниченной пластины при ее конвективном нагреве в печи с постоянной температурой греющей среды t_c

$$\tilde{\sigma}(X, Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta(X, Fo), \quad (1)$$

на поверхности при $X = 1$

$$\tilde{\sigma}_{II}(Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_{II}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (2)$$

и в центре пластины при $X = 0$

$$\tilde{\sigma}_{II}(Fo) = \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_{II}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma / \sigma_0$ — безразмерные термические напряжения, $0 \leq \tilde{\sigma} \leq 1$; $\sigma_0 = \beta E \Delta t_0 / (1 - \nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па.

Здесь относительные температуры:

в любой точке $X = x / R_0$

$$\vartheta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (4)$$

на поверхности ($X = 1$)

$$\mathcal{G}_n(\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \text{Fo}}, \quad (5)$$

в центре ($X = 0$)

$$\mathcal{G}_c(\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \text{Fo}}, \quad (6)$$

и среднemasсовая

$$\mathcal{G}_{cp}(\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \text{Fo}}, \quad (7)$$

где $\mathcal{G}(\text{Fo}) = (t(\tau) - t_c) / \Delta t_0$; $\Delta t_0 = t_0 - t_c$; t_0 — начальная температура тела, °C; $\text{Fo} = a\tau / R_0^2$ — число Фурье; $\text{Bi} = \alpha R_0 / \lambda$ — число Био; $P_n(\mu_n) = 2\text{Bi} / [\text{Bi}(\text{Bi} + 1) + \mu_n^2]$ — тепловая амплитуда; $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) / \cos \mu_n$; $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot \text{Bi} / \mu_n^2$; $C_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$; $D_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - P_n(\mu_n)$; $U_n(X) = \cos \mu_n X / \cos \mu_n$; μ_n — собственные числа, определяемые характеристическим уравнением:

$$\text{ctg} \mu_n = \mu_n / \text{Bi}. \quad (8)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), можно получить формулу связи между термонапряжениями в центре и на поверхности

$$\tilde{\sigma}_n(\text{Fo}) = -\Delta \mathcal{G}(\text{Fo}) + \tilde{\sigma}_c(\text{Fo}), \quad (9)$$

где относительный перепад температур получается путем вычитания из (5) уравнения (6)

$$\Delta \mathcal{G}(\text{Fo}) = \mathcal{G}_n - \mathcal{G}_c = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \quad (10)$$

в котором $E_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$.

Из анализа уравнений (2), (3), (9) и (10) следует, что динамика изменения напряжений во времени аналогична изменению температурной разности, т. е. резко возрастают, достигая максимального значения при числах Фурье $\text{Fo}_{\max} = 0,05 \dots 0,50$, а затем постепенно падают, т. е. несут колоколообразный характер.

На практике иногда важнее знать не всю динамику изменений напряжений в пространстве и времени, а только их максимально возможные характерные величины. Целью данной работы является аналитическое определение указанных величин для пластины.

Решение задачи

Дифференцируя уравнения (2), (3) и (10) по времени, приравнявая производную нулю и используя два члена суммы ряда, получим формулы для расчёта максимальных времен Фурье:

для максимального термического напряжения на поверхности

$$\text{Fo}_{\text{м.п}} = (1/a) \ln(1/b_n), \quad (11)$$

перепада температур

$$\text{Fo}_{\max} = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{b}, \quad (12)$$

и термонапряжения в центре

$$\text{Fo}_{\text{м.ц}} = (1/a) \ln(1/b_c), \quad (13)$$

где $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$; $b_{\text{п}} = -\delta D_1 / D_2$; $b_{\text{ц}} = -\delta C_1 / C_2$; $b = -\delta E_1 / E_2$; $\delta = (\mu_1 / \mu_2)^2$.

Здесь и далее под E_1 понимается амплитуда $E_1(\mu_1)$.

Подставляя Fo_{\max} из (12) в уравнение (10), получим максимальный перепад температур с учётом двух членов ряда:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}_{\text{м}} &= E_1 e^{-\mu_1^2 \text{Fo}_{\max}} \left(1 + E_2 / E_1 \cdot e^{-a \text{Fo}_{\max}} \right) = \\ &= (1 - \delta) E_1(\mu_1) e^{-\mu_1^2 \text{Fo}_{\max}}. \end{aligned} \quad (14)$$

При выводе (14) было учтено, что согласно уравнению (12) $\exp(-a \text{Fo}_{\max}) = b$.

По аналогии подставляя $\text{Fo}_{\text{м.п}}$ в уравнение (2), получим максимальное термическое напряжение на поверхности

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.п}} = (1 - \delta) D_1 \cdot e^{-\mu_1^2 \text{Fo}_{\text{м.п}}} \quad (15)$$

и после подстановки (13) в (3) — максимальное напряжение в центре пластины

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.ц}} = (1 - \delta) C_1 e^{-\mu_1^2 \text{Fo}_{\text{м.ц}}}. \quad (16)$$

Анализ полученных решений

Формулы (11)...(13) однотипны и могут быть описаны одним уравнением

$$\text{Fo}_{\text{м.}j} = (1/a) \ln(1/b_j). \quad (17)$$

При $j = 1, 3$ имеем расчет напряжений на поверхности и в центре, а при $j = 2$ — перепада температур.

Наибольшую и основную трудность при практических расчётах по уравнениям (1)...(17) представляет определение по соотношению (8) бесчисленного множества корней. В работе [2] приведена общая приближенная формула расчета первого корня для тел простой формы

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}, \quad (18)$$

где $D = k\text{Bi}/m$; $m = 1 + \text{Bi}/(k + 2)$ — коэффициент термической массивности; $\gamma = (1 + \sqrt{1 + 4\rho})/2$; $\rho = D^2 / [k(k + 2)^2(k + 4)]$; k — коэффициент геометрической формы, равный 1 — для пластины, 2 — цилиндра и 3 — шара. При малых ρ число $\gamma \cong 1 + \rho$.

Для определения приближенных значений остальных корней следует различать два характерных случая нагрева — при больших и малых числах Био [2].

При малых числах Био ($\text{Bi} < 3$)

$$\mu_n = b_n - z_n, \quad (19)$$

где $z_n = G_1 / \gamma_n$; $G_1 = \text{Bi} / b_n$; $\rho_n = (2 + \text{Bi}) \text{Bi} / (3b_n^2)$; $b_n = (2n - 1)\pi / 2$; $n = 1, 2, 3, \dots$

При больших числах Био ($\text{Bi} \geq 3$)

$$\mu_n = a_n - G_2 / \gamma_n \approx a_n (1 - \beta / \gamma_n), \quad (20)$$

где $G_2 = \beta a_n$; $\rho_2 = G_2^2 / 3$; γ — см. уравнение (18); $a_n = n\pi$; $\beta = 1/\text{Bi}$.

Предварительно упростим расчет тепловой амплитуды $A(\mu_n)$. Используя тригонометрическое тождество $1/\cos x = \sqrt{1 + \text{tg}^2 x}$ и характеристическое уравнение (8), можно записать

$$1/\cos\mu_n = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{1 + (\text{Bi}/\mu_n)^2}. \quad (21)$$

С учетом последнего выражения тепловая амплитуда, входящая в уравнение (6) определения температуры центра пластины, станет:

$$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) (-1)^{n+1} \sqrt{1 + (\text{Bi}/\mu_n)^2}. \quad (22)$$

На практике технологов интересует вопрос — насколько термические напряжения на поверхности тела больше, чем в его середине. Обозначим их отношение $R = \sigma_n/\sigma_{ц}$. Наиболее просто R можно найти в стадии регулярного режима нагрева (РРН), который наступает при числах Фурье $\text{Fo} > 0,3$ и когда вместо бесконечных сумм в уравнениях (1)...(10) можно ограничиться одним членом ряда. Тогда, деля уравнение (2) на (3) получим

$$R = \tilde{\sigma}_n/\tilde{\sigma}_{ц} = D_1/C_1 = \frac{(\text{Bi}/\mu_1^2 - 1) \sqrt{1 + (\text{Bi}/\mu_n)^2}}{(1 + \text{Bi})} \approx -2/[(1 + \text{Bi})]. \quad (23)$$

В теории нестационарной теплопроводности принято различать два характерных режима: I — инерционный (иррегулярный) и II — регулярный (квазистационарный) с различным математическим аппаратом их описания. Разграничителем указанных режимов служит так называемое время инерционного периода $\text{Fo}_1 = a\tau_1/R_0^2$ (рис. 1). Условно можно считать, что теплоинерционный период нагрева (охлаждения) закончится, когда центральные слои тела прогреются на малую величину $\varepsilon_n = 5\% = 0,05$ от начальной температуры, где ε_n можно трактовать как степень прогресса центральных точек тела.

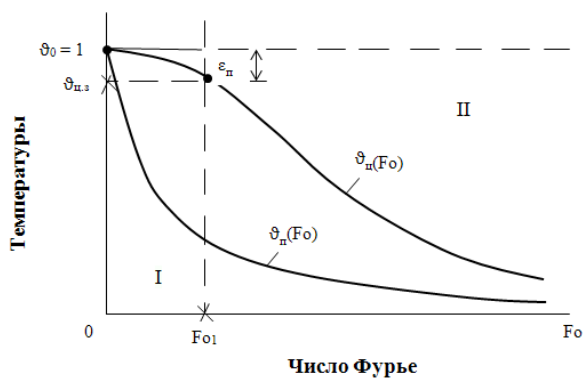


Рис. 1. Температурная диаграмма охлаждения тела

Полагая в уравнении (6) температуру в центре заданной $\vartheta_{ц.з.}(\text{Fo}_1) = 1 - \varepsilon_n = 0,95$, используя два члена ряда и логарифмируя, получим время инерционного периода:

$$\text{Fo}_1 = \frac{1}{\mu_1^2} \ln \frac{A_1(1 + \varepsilon_1)}{\vartheta_{ц.з.}}, \quad (24)$$

где $\varepsilon_1(\text{Fo}_1) = (A_2/A_1) \cdot \exp(-a \cdot \text{Fo}_1)$; $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$. В первом приближении можно считать $\varepsilon_1 = 0$.

В таблице 1 приведены рассчитанные по предлагаемой методике максимальные: термические напряжения на поверхности $\tilde{\sigma}_{м.п.}$, центре $\tilde{\sigma}_{м.ц.}$, температурная разность $\Delta\vartheta_M$ и времена их наступления, числа Фурье $\text{Fo}_{м.ж}$, а также время инерционного периода Fo_1 в зависимости от числа Био.

Таблица 1. Результаты расчетов по предлагаемой методике

Число Био	$\text{Fo}_{м.1}$	$\tilde{\sigma}_{м.п.}$	$\text{Fo}_{м.2}$	$-\Delta\vartheta_M$	$\text{Fo}_{м.3}$	$-\tilde{\sigma}_{м.ц.}$	Fo_1
0,1	0,4147	0,0309	0,4445	0,0463	0,4864	0,0154	0,6950
1,0	0,1922	0,2083	0,2269	0,3083	0,2704	0,1020	0,2214
10	0,0421	0,5935	0,0913	0,7989	0,1459	0,2560	0,1164
100	0,0049	0,8504	0,0480	0,9720	0,1194	0,3025	0,1015
1000	0,0005	0,9505	0,0329	0,9967	0,1164	0,3079	0,0997
∞	0	1,0	0,0122	1,0	0,1161	0,3085	0,0995

На рисунке 2 представлены зависимости максимальных значений $\tilde{\sigma}_{м.п.}$, $\Delta\vartheta_M$ и $\tilde{\sigma}_{м.ц.}$, а на рисунке 3 — времена их наступления $\text{Fo}_{м.ж}$ от числа Био.

Из анализа кривых рис. 3 вытекает, что время инерционного периода Fo_1 находится между временами $\text{Fo}_{м.2}$ и $\text{Fo}_{м.3}$, оставаясь выше их при числах $\text{Bi} < 0,5$. В дальнейшем, в качестве Fo_1 можно рекомендовать $\text{Fo}_{м.3}$.

Выводы

1. Разработана инженерная методика расчета осевых термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) пластины. Сделан акцент на определение максимальных термонапряжений и времени их наступления.

2. Представлена номограмма для графического расчета максимальных значений термических напряжений в центре, на поверхности, температурной разности и времен их наступления.

3. При нагреве на поверхности пластины возникают сжимающие (отрицательные) напряжения, а в середине растягивающие (положительные); в случае процесса охлаждения знаки поменяются.

4. При умеренных числах Био наибольшее значение по абсолютной величине имеют напряжения на поверхности, которые примерно в 2 раза превышают термонапряжения в центре пластины.

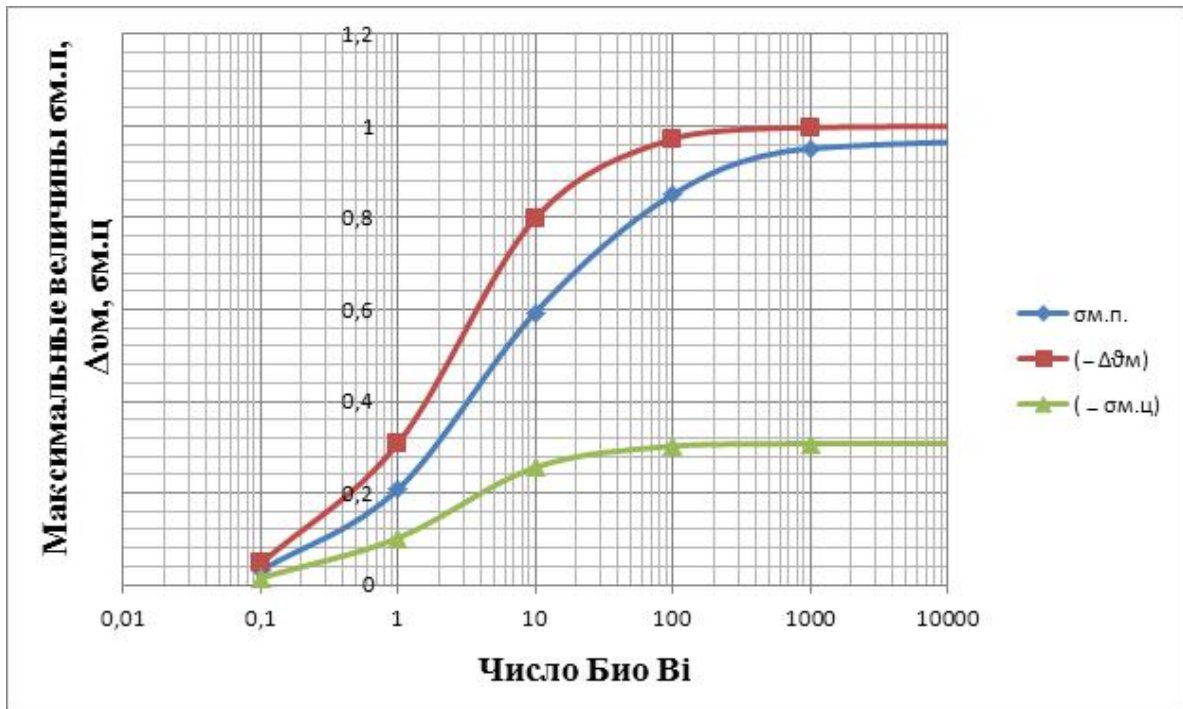


Рис. 2. Зависимости максимального термического напряжения на поверхности $\tilde{\sigma}_{м.п.}$, разности температур $(-\Delta\vartheta_M)$ и термонапряжения в центральных точках пластины $(-\tilde{\sigma}_{м.ц.})$ от числа Bi

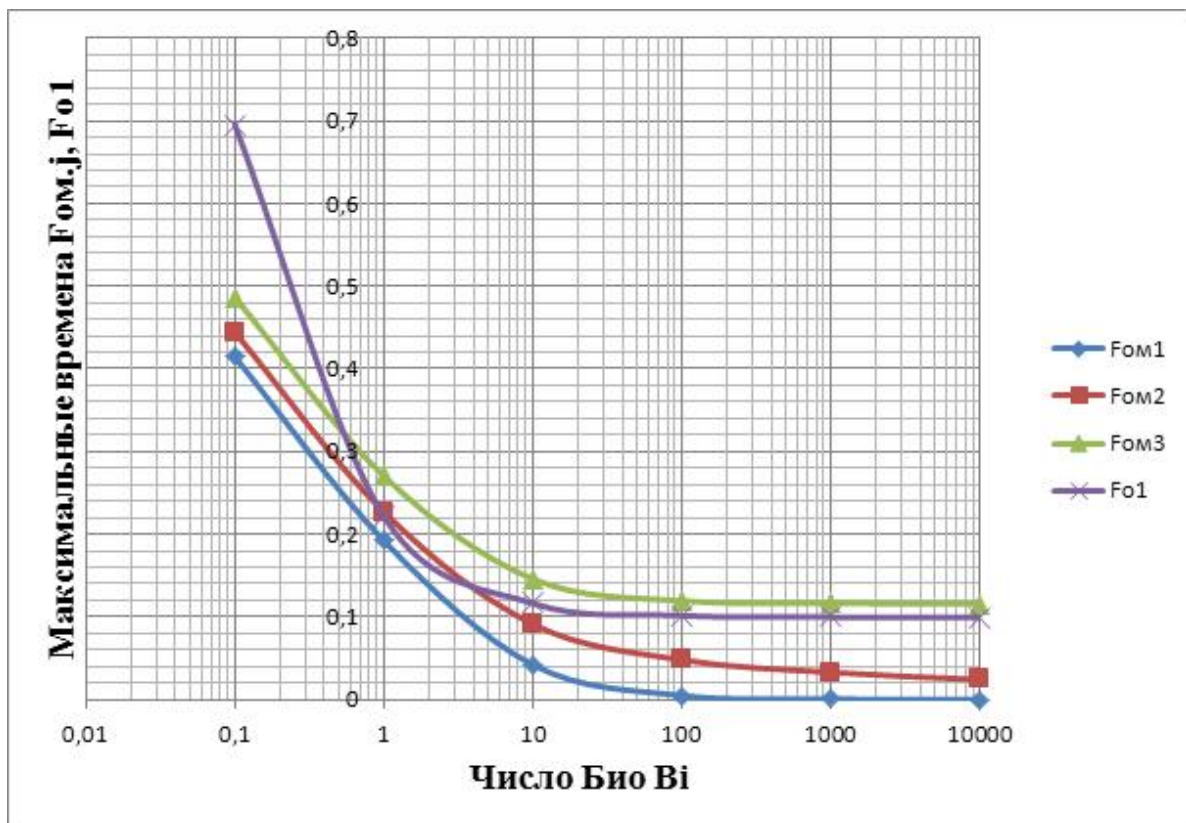


Рис. 3. Времена наступления наибольших напряжений на поверхности $Fo_{м.1}$, разности температур $Fo_{м.2}$, максимального напряжения в центре $Fo_{м.3}$ и время инерционного периода Fo_1 для пластины в зависимости от числа Био

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А. Д. К расчёту термических напряжений при конвективном нагреве пластины // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: 2010, № 1(22). – С. 16 – 21.
2. Горбунов А. Д. К аналитическому расчёту термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математическое моделирование. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2012, № 1(26). – С. 39 – 45.
3. Б. Боли, Дж. Уэйнер Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

пост. 30.06.2016