

множини організмів має екологічно закономірний характер. Тут виникає два питання. По-перше, статистичні властивості параметрів можуть бути вивчені тільки при наявності повторних спостережень. Однак, в екології можна виконати зріз даних тільки в певному місці і в певний момент часу, а якщо відбирати другу, третю проби і т. д., то це будуть вже дані з іншого місця або ж взяті в інший момент часу. Отже, як, маючи лише одну єдину повторність, оцінити значення необхідного нам показника і отримати міру точності цієї оцінки? По-друге, оскільки точний вид розподілу оброблюваних даних, зазвичай, невідомий, використовують наближені методи апроксимації передбачуваних властивостей досліджуваної статистики, причому як впливає ступінь цієї наближеності на остаточні висновки, залишається цілком на совісті дослідника. Можна сказати, що вирішення цих проблем може бути здійснено застосуванням методів генерації повторних вибірок (чисельного ресамплінгу), які відносяться до непараметричних методів.

Результати досліджень математичних моделей еколого-інформаційних систем, для яких було застосовані алгоритми непараметричної статистики, дають

відповіді на поставленні питання та свідчать про те, що розроблені алгоритми можуть бути застосованими до інших класів прикладних задач, які у своїй математичній постановці зводяться до досліджених.

ЛІТЕРАТУРА

1. Накопія М. Окремі випадки застосування методів чисельного ресамплінгу в прикладних задачах / М.Накопія // Математичне моделювання, Дніпродзержинськ, №2(33) – 2015 – С. 11–13.
2. Efron B. An introduction to the bootstrap. / B. Efron, R.J.Tibshirani // N. Y.: Chapman & Hall – 1993 – P. 436
3. Manly B.F. Randomization, bootstrap and Monte Carlo methods in biology / B.F. Manly // London:Chapman & Hall – 2007 – P. 445.
4. Анатольев С. Основы бутстреппирования / С. Анатольев // Квантиль – 2007 – №3 – С. 1–12.
5. Шитиков В.К. Рандомизация и бутстреп: статистический анализ в биологии и экологии с использованием R / В.К. Шитиков, Г.С.Розенберг // Тольятти: Кассандра – 2013 – С. 314.

пост. 27.02.2017

А.Д. ГОРБУНОВ, д.т.н., профессор

С.В. УКЛЕИНА, аспирант

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Аналитическое исследование температурных полей и термических напряжений при нагреве простых тел одновременно конвекцией и излучением. Сообщение 1

На основе линеаризующей подстановки разработана инженерная методика расчета нагрева излучением и конвекцией тел простой геометрической формы в виде пластины, цилиндра и шара при любых числах Фурье. Использован прием разделения процесса нагрева на два характерных случая, когда число Био больше радиационного числа Старка и наоборот, позволивший снизить число переменных и представить решение задачи в табличном и графическом виде.

Анализ публикаций

К настоящему времени имеется большое количество [1]...[7] и других инженерных методик расчета совместного лучисто-конвективного нагрева тел. Однако, полученные решения являются достаточно сложными и громоздкими даже в упрощенной постановке для модели термически тонких тел (ТТТ).

Цель данной работы — получение более простых зависимостей. Кроме того, в указанных статьях отсутствуют формулы для расчета термических напряжений.

Постановка задачи

Математическая постановка задачи симметричного конвективно-радиационного нагрева тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до температуры окружающей среды T_c имеет вид

$$\frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(X, Fo)}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial X}, \quad 0 < X < 1, \quad (1)$$

$$\theta(X, 0) = \theta_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = Q(\theta_n) = Sk(1 - \theta_n^4) + Bi(1 - \theta_n), \quad (4)$$

где $\theta = T/T_c$; $\theta_0 = T_0/T_c$; $\theta_n = \theta(1, Fo)$ — относительная температура на поверхности; $Sk = \sigma T_c^3 R_0/\lambda$ — чис-

ло Старка; $Bi = \alpha R_0/\lambda$ — число Био, k — фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара; $X = x/R_0$; R_0 — характерный размер тел.

Пользуясь алгебраическим тождеством $(a^4 - b^4) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2)$, тепловой поток в уравнении (4) можно представить в виде: $Q = Sk(1 - \theta) \cdot Y(\theta) + Bi(1 - \theta)$, где $Y(\theta) = (1 + \theta) \cdot (1 + \theta^2)$.

Теперь примем упрощенную модель, предложенную в работе [8]. Упрощение заключается в замене точной кубической зависимости $Y(\theta)$ на приближенную параболическую $R(\theta) = 1 + 3 \cdot \theta^2$, которая совпадает с ней в крайних точках $R(0) = Y(0) = 1$, $R(1) = Y(1) = 4$ и максимально отличается (на 6,7%) при средней температуре поверхности $R(1/2) = 1,75 < Y(1/2) = 1,875$.

Далее будем решать систему уравнений (1)...(3) при упрощенном тепловом потоке

$$Q(\theta_n) = Bi \cdot V(\theta_n), \quad (5)$$

где $V(\theta_n) = V_1(\theta) = (1 - \theta) \cdot R_1(\theta)$; $R_1(\theta) = 1 + s \cdot (1 + 3\theta^2)$; $s = Sk/Bi$.

Предварительный анализ показал, что для удобства расчетов следует различать два характерных случая, когда число Старка меньше числа Био и наоборот.

Решение задачи при $Bi > Sk$

Как указывалось ранее в [8], при реализации задачи с помощью интегральных линеаризующих преобразований, необходимо иметь формулы для модели термически тонкого тела.

Решение в модели термически тонкого тела

При малых числах Старка ($Sk < 1$) и Био ($Bi < 1$) температуры на поверхности θ_n , в центре θ_c и среднemasовая материала θ_{cp} почти не отличаются друг от друга и равны просто θ . Теперь вместо уравнения теплопроводности (1) необходимо решать следующее дифференциальное уравнение теплового баланса [8]

$$d\theta = k \cdot Q(\theta) \cdot dFo. \quad (6)$$

Разделяя переменные и интегрируя (6) с учетом начального условия (2) и теплового потока (5), получим

$$\tilde{Fo} = F(\theta) - F(\theta_0), \quad (7)$$

где $\tilde{Fo} = k \int_0^{Fo} Bi(\eta) \cdot d\eta$ — модифицированное число

$$\text{Фурье; } \delta_1 = \sqrt{\frac{3s}{1+s}}.$$

Согласно [9]:

$$F(\theta) = F_1(\theta, s) = \int \frac{d\theta}{V(\theta)} = \frac{-1}{2 \cdot (1+4s)} \ln \frac{(1-\theta)^2}{R_1(\theta)} + \frac{\delta_1 \arctg(\delta_1 \cdot \theta)}{1+4s}. \quad (8)$$

Здесь и далее под F_1 , V_1 и R_1 понимаются функции F , V и R в случае когда $Bi > Sk$, а под F_2 , V_2 и R_2 — при $Sk > Bi$.

Для облегчения расчетов среднemasовой температуры по модели ТТТ (7) в таблице 1 и на рисунке 1 приведена зависимость $F_1(\theta, s)$ (8) от температуры при различных значениях критерия отношений коэффициентов теплообмена $s = Sk/Bi$, изменяющегося от 0 до 1. Там же дана зависимость (12) $W_1(\theta, s) = \exp[-F_1(\theta, s)]$.

Таблица 1. Зависимость $F_1(\theta, s)$ — числитель и $W_1(\theta, s) = \exp[-F_1(\theta, s)]$ — знаменатель, от температуры θ и параметра s

θ	$F_1(\theta, s)$	$s = Sk/Bi$										
	$W_1(\theta, s)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	$F_1(0, s)$	0	0,0340	0,0506	0,0596	0,0647	0,0676	0,0691	0,0698	0,07	0,0698	0,0693
	$W_1(0, s)$	1	0,9665	0,9506	0,9421	0,9373	0,9347	0,9332	0,9326	0,9324	0,9326	0,9330
0,1	$F_1(0,1, s)$	0,1054	0,1297	0,1383	0,1405	0,1397	0,1376	0,1347	0,1315	0,1282	0,1250	0,1217
	$W_1(0,1, s)$	0,9000	0,8783	0,8708	0,8689	0,8696	0,8715	0,8740	0,8767	0,8796	0,8825	0,8854
0,2	$F_1(\theta, s)$	0,2231	0,2361	0,2353	0,2296	0,2222	0,2143	0,2064	0,1989	0,1917	0,1849	0,1786
	$W_1(\theta, s)$	0,8000	0,7897	0,7903	0,7948	0,8007	0,8071	0,8135	0,8197	0,8256	0,8312	0,8364
0,3	$F_1(\theta, s)$	0,3567	0,3554	0,3431	0,3280	0,3126	0,2980	0,2843	0,2717	0,2601	0,2494	0,2396
	$W_1(\theta, s)$	0,7000	0,7009	0,7095	0,7204	0,7315	0,7423	0,7525	0,7621	0,7710	0,7793	0,7870
0,4	$F_1(\theta, s)$	0,5108	0,4910	0,4641	0,4372	0,4122	0,3894	0,3689	0,3503	0,3336	0,3184	0,3046
	$W_1(\theta, s)$	0,6000	0,6120	0,6287	0,6458	0,6622	0,6774	0,6921	0,7045	0,7164	0,7273	0,7374
0,5	$F_1(\theta, s)$	0,6931	0,6480	0,6019	0,5601	0,5230	0,4904	0,4615	0,4360	0,4132	0,3928	0,3744
	$W_1(\theta, s)$	0,5000	0,5231	0,5477	0,5712	0,5927	0,6124	0,6303	0,6466	0,6615	0,6752	0,6877
0,60	$F_1(\theta, s)$	0,9163	0,8352	0,7633	0,7018	0,6494	0,6044	0,5654	0,5314	0,5014	0,4748	0,4510
	$W_1(\theta, s)$	0,4000	0,4338	0,4661	0,4957	0,5224	0,5464	0,5681	0,5878	0,6057	0,6220	0,6370
0,7	$F_1(\theta, s)$	1,2040	1,0696	0,9609	0,8727	0,8000	0,7389	0,6870	0,6423	0,6034	0,5692	0,5388
	$W_1(\theta, s)$	0,3000	0,3432	0,3825	0,4178	0,4493	0,4776	0,5031	0,5261	0,5470	0,5660	0,5834
0,8	$F_1(\theta, s)$	1,6094	1,3887	1,2241	1,0967	0,9948	0,9114	0,8417	0,7826	0,7317	0,6873	0,6484
	$W_1(\theta, s)$	0,2000	0,2494	0,2940	0,3340	0,3698	0,4020	0,4310	0,4572	0,4811	0,5029	0,5229
0,9	$F_1(\theta, s)$	2,3026	1,9139	1,6470	1,4505	1,2991	1,1783	1,0794	0,9968	0,9266	0,8662	0,8136
	$W_1(\theta, s)$	0,1475	0,1926	0,2344	0,2728	0,3078	0,3398	0,3691	0,3959	0,3959	0,4205	0,4432
0,95	$F_1(\theta, s)$	2,9957	2,4242	2,0508	1,7846	1,5840	1,4266	1,2995	1,1944	1,1059	1,0303	0,9649
	$W_1(\theta, s)$	0,0500	0,0885	0,1286	0,1679	0,2052	0,2401	0,2727	0,3029	0,3309	0,3569	0,3810
0,999	$F_1(\theta, s)$	6,9078	5,2335	4,2423	3,5812	3,1062	2,7472	2,4655	2,2383	2,0509	1,8935	1,7593
	$W_1(\theta, s)$	0,0010	0,0053	0,0144	0,0278	0,0448	0,0641	0,0850	0,1066	0,1286	0,1505	0,1722

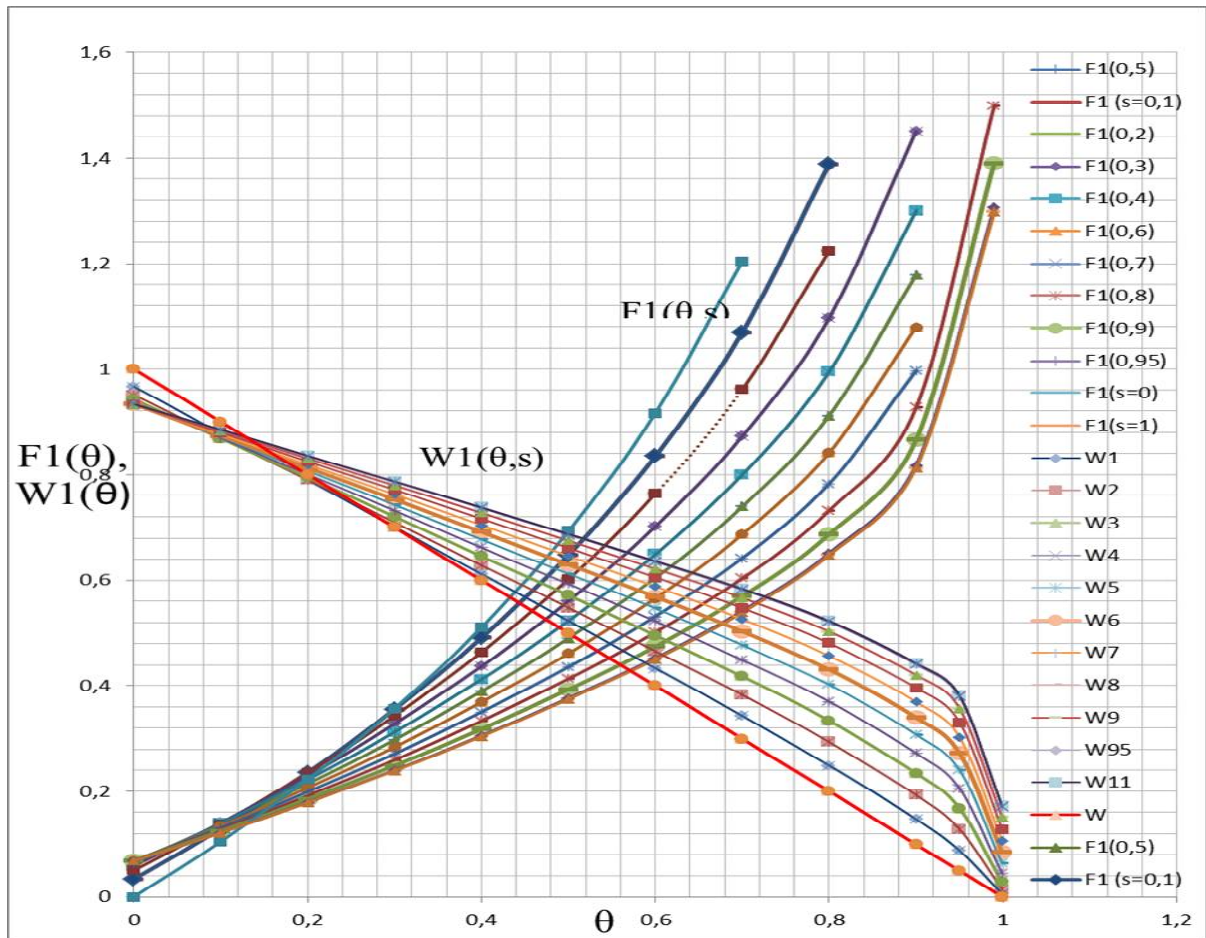


Рис. 1. Зависимость функции $F_1(\theta, s)$ согласно уравнению (8) и $W_1(\theta, s) = \exp[-F_1(\theta, s)]$ по (12) от температуры θ и параметра s

Точное решение уравнения (6) для тонких тел при тепловом потоке (4) согласно [1] имеет вид

$$k \cdot Sk \cdot Fo = \Psi(\theta) - \Psi(\theta_0), \quad (9)$$

где

$$\Psi(\theta) = -\int \frac{d\theta}{\theta^4 - p \cdot \theta - (1+p)} = M \ln \frac{\theta^2 + \alpha_2 \theta + b_2}{\theta^2 - \alpha_1 \theta + b_2} + N \ln \frac{\theta - b_1}{1 - \theta} + \text{Larctg} \frac{\sqrt{2}(2\theta + \alpha_2)}{2\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1}};$$

где все коэффициенты $M, N, L, \alpha, \alpha_0$, и другие являются функциями от параметра отношения критериев теплообмена $p = Bi/Sk$.

Сложность и громоздкость решения (9) по сравнению с приближенным (7) вполне очевидна.

Проверку предложенного решения (7) сделаем на предельном случае отсутствия теплообмена излучением. В уравнении (7) положим параметр $s = 0$. Тогда получим

$$F(\theta) = -\ln(1 - \theta) \quad (10)$$

и известное решение при конвективном нагреве термически тонкого тела:

$$\tilde{Fo} = -\ln \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0}$$

или

$$\theta(Fo) = 1 - (1 - \theta_0) \cdot e^{-\tilde{Fo}}. \quad (11)$$

Далее решим исходную задачу с использованием линеаризующей подстановки, аналогичной [8].

Решение через подстановку

С целью линеаризации граничного условия (5), введем новую переменную $W(X, Fo)$, связанную с $\theta(X, Fo)$ соотношением:

$$-\ln W = F(\theta)$$

или

$$W(X, Fo) = \exp[-F(\theta(X, Fo))]. \quad (12)$$

Продифференцируем уравнение (12) последовательно по времени и координате

$$-\frac{1}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Fo}$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = -\frac{V}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial Fo}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = -\frac{V}{W} \cdot \frac{\partial W}{\partial X}$$

и

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = -\frac{V'}{V} \cdot \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{V}{W^2} [W \cdot \frac{\partial W}{\partial X} \cdot \frac{\partial W}{\partial X} - (\frac{\partial W}{\partial X})^2]$$

При выводе формул, было учтено то обстоятельство, что согласно выражению (8) $\frac{dF}{d\theta} = \frac{1}{V}$. Подставим

полученные производные в исходные уравнения (1)...(3), (5) и после несложных преобразований получим математическую постановку задачи в новых переменных:

$$\frac{\partial W(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W(X, Fo)}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial W(X, Fo)}{\partial X} + \psi(X, Fo), \quad (13)$$

$$W(X, 0) = \exp(-F(\theta_0)) = W_0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial W(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial W(1, Fo)}{\partial X} = -Bi \cdot W_n(Fo), \quad (16)$$

где

$$\psi(X, Fo) = \frac{-(1+V')}{W(X, Fo)} \cdot \left[\frac{\partial W(X, Fo)}{\partial X} \right]^2; \quad (17)$$

$$V' = dV/d\theta = [(1-\theta) \cdot R_1(\theta)]' = -R_1(\theta) + (1-\theta) \cdot 6s\theta.$$

Комплекс (17), имитирующий внутренний сток тепла переменной интенсивности, содержит в себе все нелинейные особенности исходной задачи (1)...(4). В первом приближении искомая температура $W(X, Fo)$ может быть найдена из решения системы уравнений (13)...(16) при $\psi(X, Fo) = 0$ [10]:

$$W(X, Fo) = W_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot U_n(X) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (18)$$

или в квазистационарной стадии с учетом одного члена ряда (18), при времени $Fo > 0,3$ для температуры поверхности ($X=1$)

$$W_n(Fo) = W_0 \cdot P \cdot e^{-\mu^2 Fo}, \quad (19)$$

центра ($X=0$)

$$W_n(Fo) = W_0 \cdot A \cdot e^{-\mu^2 Fo} = H_k \cdot W_n(Fo) \quad (20)$$

и среднемассовой

$$W_{cp}(Fo) = W_0 \cdot B \cdot e^{-\mu^2 Fo} = m^T \cdot W_n(Fo), \quad (21)$$

где $P_n = \frac{2Bi}{Bi(Bi+2-k) + \mu_n^2}$; $B_n = P_n \cdot m^T$; $m^T = \frac{k \cdot Bi}{\mu_n^2}$;

$A_n = P_n \cdot H_k$ — тепловые амплитуды; $P = P_1$; $A = A_1$ и т. д.; μ_n — корни соответствующего характеристического уравнения, например, для пластины $\text{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi$; $U_n(X)$ — координатная функция, например, для пластины: $U_n(X) = \cos \mu_n X / \cos \mu_n$; $H_k = U_n(0)$.

В работе [10] предложена общая для всех трех тел формула по расчету первого корня

$$\mu = \sqrt{D/\gamma}, \quad (22)$$

где $D = k \cdot Bi / m$; $m = 1 + g \cdot Bi$ — коэффициент термической массивности тела (КТМТ); $\gamma = (1 + \sqrt{1 + 4\rho})/2$; $\rho = D^2 / [k(k+2)^2(k+4)]$; $g = 1/(k+2)$; при малых ρ величина $\gamma \approx 1 + \rho$.

После определения $W(X, Fo)$ следует сделать переход с помощью уравнения (12) от W к исходной

температуре θ , однако из-за сложности функции (8) $F(\theta)$ сделать это весьма затруднительно. Для упрощения этого перехода поступим следующим образом.

Найдем функцию $F(\theta)$ при температуре $\theta = 0$

$$F_1(0, s) = \frac{\ln(1+s)}{2(1+4s)} \quad (23)$$

и заметим, что она изменяется в очень узких пределах от $F_1 = 0$ при $s = 0$ до $F_1(0, 1) = \frac{\ln 2}{10} = 0,0693$ при максимально возможном значении $s_{\max} = 1$.

Далее воспользуемся разложением функций $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$ и $\text{arctg} x \approx x - x^3/3$ в ряд при малых аргументах ($x < 1$).

Тогда функция $F(\theta)$ при малых температурах:

$$F_1(\theta, s) \approx F_1(0, s) + \gamma(s) \cdot \theta, \quad (24)$$

где $\gamma(s) = 1/(1+s)$.

Из уравнения связи (12) с учетом (24) получим

$$W = e^{-F_1(0, s) - \gamma \cdot \theta}$$

или

$$\theta = [-\ln W - F_1(0, s)] / \gamma(s). \quad (25)$$

В конечной стадии процесса нагрева температуры θ близка к 1. Положим в уравнении (8), где только можно $\theta = 1$, тогда

$$F_1(\theta, s) \approx -\frac{1}{1+4s} \ln(1-\theta) + C_1,$$

где $C_1 = \frac{\ln(1+4s)}{2(1+4s)} + \frac{\delta_1 \text{arctg} \delta_1}{1+4s}$.

Подставляя $F(\theta)$ в уравнение (12) и разрешая его относительно искомой температуры, получим

$$\theta(W) = 1 - (C_2 \cdot W)^{1+4s}, \quad (26)$$

где $C_2 = e^{C_1}$. В случае отсутствия излучения из (26) при $s = 0$ вытекает прямая зависимость $\theta(W) = 1 - W$, смотри рисунок 1.

Для случая умеренных температур ($0,3 < \theta < 0,7$) уравнением

$$y = kx + b \quad (27)$$

сделаем линейную аппроксимацию сначала исходной кривой $W(\theta, s)$, а затем обратной ей функции $\theta(W, s)$.

Дадим пример расчета при $s = Sk/Bi = 0,5$. Из таблицы 1 в колонке $W(\theta, 0,5)$ выберем три точки при температурах $\theta = 0,3$; $0,5$ и $0,7$, т.е. $y_1(x_1) = 0,7423(0,3)$; $y_2(x_2) = 0,6124(0,5)$; $y_3(x_3) = 0,4776(0,7)$.

Подставляя в формулу (27) значения для первой и третьей точки и разрешая систему уравнений относительно k и b , получим

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{0,4776 - 0,7423}{0,7 - 0,3} = -0,6617$$

и

$$b = y_1 - k \cdot x_1 = 0,7423 - (-0,6617) \cdot 0,3 = 0,9408.$$

Для получения формулы обратного перехода от функции $W(\theta, s)$ к $\theta(W, s)$ разрешим уравнение (27) относительно $x = (y-b)/k$, т.е. температуры

$$\theta(W) = \alpha - \beta \cdot W, \quad (28)$$

где $\alpha = -b/k = -0,9408/(-0,6617) = 1,42$;

$$\beta = 1/(-k) = 1/0,6617 = 1,51.$$

Сделаем проверку полученного уравнения на второй точке: $\theta_2(0,6124) = 1,42 - 1,51 \cdot 0,6124 = 0,495$ с погрешностью менее 1% относительно точного значения температуры $\theta = 0,5$.

Аналогичную аппроксимацию можно сделать при других значениях параметра s .

Таким образом, при умеренных температурах ($0,3 < \theta < 0,7$ или $0,3 < W < 0,7$) для формулы перехода без большой потери точности можно использовать линейное уравнение (28).

Если изобразить уравнения (25), (26), (28) на графике, как это было сделано в работе [8], то из рисунка будет наглядно видно, что зависимость (12) лежит между тремя кривыми: (25), (26), и (28).

Таким образом, искомый переход от W к θ имеет вид:

$$\theta(W) = \begin{cases} [-\ln W - F_1(0, s)] / \gamma(s), & \text{если } 0,7 < W \leq 1 \\ \alpha - \beta \cdot W, & \text{если } 0,3 < W \leq 0,7 \\ 1 - (C_2 W)^{1+4s}, & \text{если } 0 \leq W < 0,3. \end{cases} \quad (29)$$

При наличии таблицы 1, переход от W к θ можно также сделать по следующей интерполяционной формуле, которая действует при любых температурах

$$x_0 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot (y_0 - y_1). \quad (30)$$

На начальной стадии нагрева, когда $\theta < 0,7$, можно использовать (25) и тогда уравнения (19)...(21) значительно упрощаются до следующей линейной зависимости от времени

$$\theta_n(\text{Fo}) = [-\ln W_n(\text{Fo}) - F_1(0, s)] / \gamma(s) = (C_p + \mu^2 \cdot \text{Fo}) / \gamma(s), \quad (31)$$

центра

$$\theta_{\text{ц}}(\text{Fo}) = (C_{\text{ц}} + \mu^2 \text{Fo}) / \gamma(s) \quad (32)$$

и среднемассовой

$$\theta_{\text{ср}}(\text{Fo}) = (C_{\text{ср}} + \mu^2 \text{Fo}) / \gamma(s),$$

где

$$C_p = -\ln W_0 - F_1(0, s) - \ln P = \Delta F - \ln P; \\ \Delta F = F_1(\theta_0, s) - F_1(0, s); \quad C_{\text{ц}} = C_p - \ln H_k \equiv \Delta F - \ln A, \\ C_{\text{ср}} = \Delta F - \ln B = C_p - \ln m; \quad m = 1 + g \cdot \text{Bi}.$$

В случае наличия участков линейной зависимости температур от времени, производная $\dot{\theta}_n$ и температурная разность выходит на постоянную величину:

$$\dot{\theta}_n = \mu^2 / \gamma(s)$$

и

$$\Delta\theta = \theta_{\text{н}} - \theta_{\text{ц}} = \ln H_k / \gamma(s) = \text{const}. \quad (33)$$

Это обстоятельство позволяет экспериментально определять теплофизические свойства (ТФС) веществ, как это делалось в теории регулярного режима теплообмена при конвективном нагреве (охлаждении) тел.

Полагая в уравнении (32) заданную температуру в центре $\theta_{\text{ц},3} = \theta_0 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = 5\% = 0,05$ можно условно трактовать как степень начала прогрева центральных точек тела, получим время инерционного периода

$$\text{Fo}_1 = (\ln A + \tilde{\varepsilon}) / \mu^2, \quad (34)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \theta_{\text{ц},3} \cdot \gamma(s) - \Delta F \leq \gamma(s) \cdot \varepsilon_n$.

Иногда требуется определить время нагрева Fo_n тела до какой-то заданной конечной температуры поверхности, центра или среднемассовой, например, $\theta_k = 1 - \varepsilon_n = 0,95$. Полагая в уравнении (26) $\theta = \theta_k$ и логарифмируя, получим

$$\text{Fo}_n = \frac{1}{\mu^2} \ln \frac{W_0 \cdot O_j}{W_k}, \quad (35)$$

где $W_k = \frac{(1 - \theta_k)^{1/(1+4s)}}{C_2}$;

$$O_j = \begin{cases} P, & j = 1 - \text{поверхность}, \\ A, & j = 2 - \text{центр тела} \\ B, & j = 3 - \text{среднемассовая температура}. \end{cases}$$

Теперь решим задачу для второго характерного случая.

Решение при $\text{Sk} > \text{Bi}$

В этом случае выносятся за скобки число Старка как больший коэффициент теплообмена. Тогда тепловой поток (5) запишется в виде

$$Q(\theta_n) = \text{Sk} \cdot V_2(\theta_n), \quad (36)$$

где $V_2(\theta) = (1 - \theta) \cdot R_2(\theta)$; $R_2(\theta) = 1 + p + 3\theta^2$; $p = \text{Bi}/\text{Sk}$.

Теперь решение уравнения (6) в модели ТТТ аналогично (7) станет

$$\tilde{\text{Fo}} = F_2(\theta_n) - F_2(\theta_0), \quad (37)$$

где согласно [9]

$$F_2(\theta, p) = \int \frac{d\theta}{V_2(\theta)} = \\ = \frac{-1}{2(4+p)} \ln \left(\frac{(1-\theta)^2}{R_2(\theta)} \right) + \frac{\delta_2}{(4+p)} \arctg(\delta_2 \cdot \theta), \quad (38)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{3}{1+p}} \equiv \delta_1 = \sqrt{\frac{3s}{1+s}} = \sqrt{\frac{3\text{Sk}}{\text{Sk} + \text{Bi}}}; \quad \tilde{\text{Fo}} = k \cdot \text{Sk} \cdot \text{Fo} \quad \text{—}$$

модифицированное число Фурье в случае $\text{Sk} > \text{Bi}$.

Для облегчения расчетов температур по модели ТТТ (37) в таблице 2 и на рисунке 2 приведена зависимость (38) функции $F_2(\theta, p)$ от температуры θ и параметра $p = \text{Bi}/\text{Sk}$, изменяющегося от 0 до 1.

Нетрудно показать, что в случае $s = 1$ или $p = 1$ функции $F_1(\theta, 1) = F_2(\theta, 1)$ и, следовательно, $W_1(\theta, 1) = W_2(\theta, 1)$ равны друг другу и расчеты можно вести по любой из них, смотри крайние правые столбцы таблицы 1 и 2.

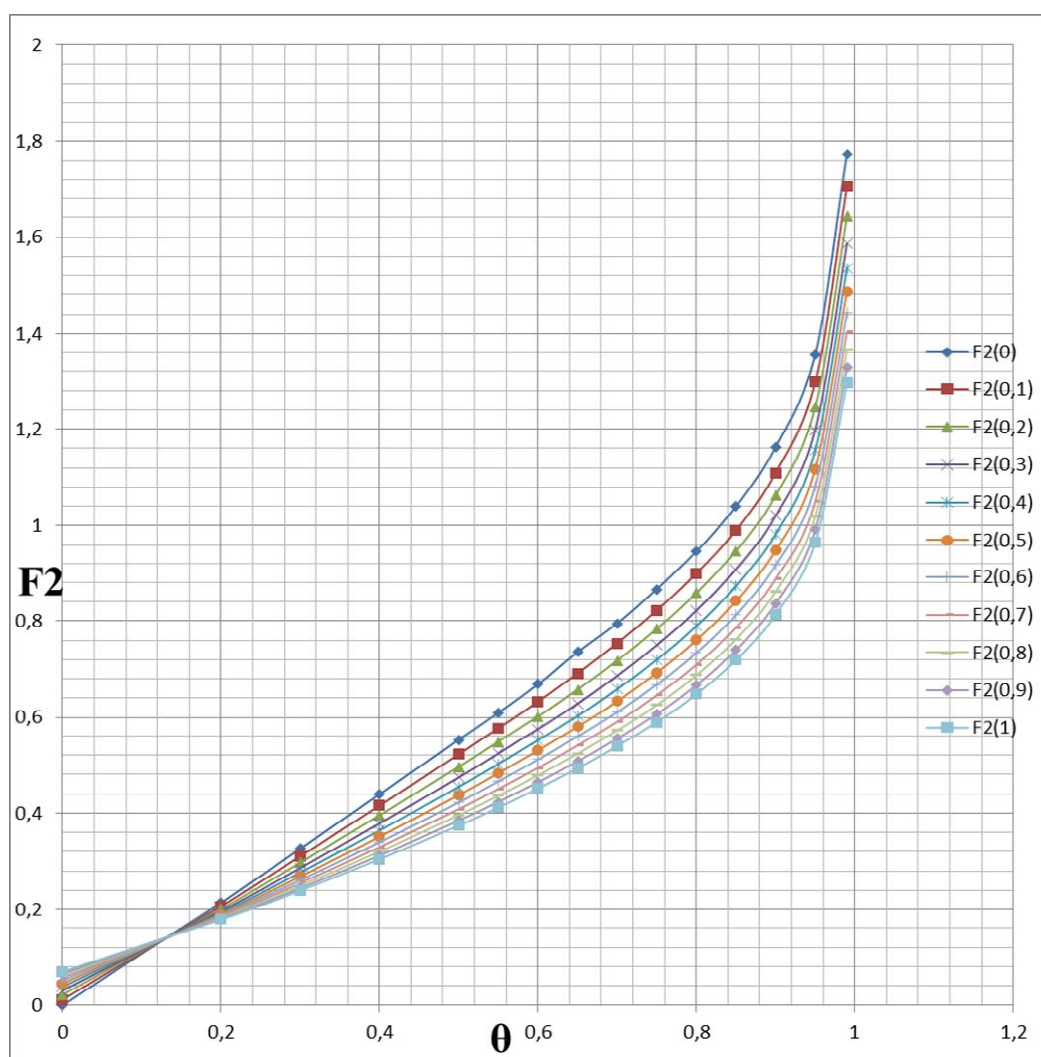
Проверку полученного решения (37) сделаем на предельном случае отсутствия конвективного теплообмена. Полагая в уравнении (37) параметр $p = 0$, получим приближенное решение чисто радиационного нагрева тел, приведенное и проверенное в работе [8]:

$$F_2(\theta) = \frac{-1}{8} \ln \frac{(1-\theta)^2}{1+3\theta^2} + \frac{\delta}{4} \arctg(\delta \cdot \theta), \quad (39)$$

где $\delta = \sqrt{3}$.

Таблица 2. Зависимость функции $F_2(\theta, p)$ согласно уравнению (38)

$F_2(\theta, p)$	Параметр $p = Bi/Sk$										
θ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0,0116	0,0217	0,0305	0,0382	0,0451	0,0511	0,0564	0,0612	0,0655	0,0693
0,2	0,2144	0,2072	0,2015	0,1969	0,1930	0,1898	0,1870	0,1846	0,1824	0,1804	0,1786
0,3	0,3266	0,3107	0,2975	0,2865	0,2770	0,2688	0,2616	0,2552	0,2495	0,2443	0,2396
0,4	0,4391	0,4155	0,3957	0,3787	0,3641	0,3512	0,3398	0,3296	0,3205	0,3122	0,3046
0,5	0,5523	0,5221	0,4964	0,4742	0,4547	0,4376	0,4223	0,4085	0,3961	0,3848	0,3744
0,55	0,6099	0,5768	0,5483	0,5237	0,5020	0,4828	0,4657	0,4502	0,4362	0,4234	0,4116
0,6	0,6690	0,6330	0,6020	0,5750	0,5512	0,5301	0,5111	0,4939	0,4783	0,4641	0,4510
0,65	0,7359	0,6918	0,6583	0,6290	0,6031	0,5800	0,5592	0,5404	0,5232	0,5075	0,4931
0,7	0,7956	0,7542	0,7183	0,6868	0,6588	0,6337	0,6111	0,5906	0,5719	0,5547	0,5388
0,75	0,8662	0,8223	0,7839	0,7501	0,7200	0,6929	0,6685	0,6462	0,6258	0,6071	0,5897
0,8	0,9458	0,8991	0,8582	0,8220	0,7896	0,7605	0,7340	0,7099	0,6877	0,6673	0,6484
0,85	1,0402	0,9905	0,9468	0,9079	0,8731	0,8416	0,8129	0,7866	0,7625	0,7402	0,7195
0,9	1,1629	1,1096	1,0625	1,0204	0,9825	0,9481	0,9167	0,8879	0,8613	0,8366	0,8136
0,95	1,3564	1,2978	1,2457	1,1990	1,1566	1,1179	1,0825	1,0498	1,0195	0,9913	0,9649
0,99	1,7743	1,7051	1,6429	1,5866	1,5351	1,4877	1,4440	1,4033	1,3654	1,3299	1,2966

Рис. 2. Зависимость $F_2(\theta, p)$ от температуры θ и параметра p согласно (38)

В решении задачи при $Sk > Bi$ методом подстановки (12) следует только в уравнениях (7), (12), (18)...(26) заменить функции $F_1(\theta, s)$ на $F_2(\theta, p)$, $V_1(\theta)$ на $V_2(\theta)$ и $W_1(\theta)$ на $W_2(\theta)$. Далее, характеристическое уравнение, например, для пластины, станет $ctg\mu_n = \mu_n/Sk$; т.е. корни μ_n и амплитуды P, A, B, H_k теперь будут зависеть от критерия Старка, а не от числа Био как было выше.

Разложение в ряд функции (38) при малых температурах дает

$$F_2(\theta, p) = F_2(0, p) + \gamma(p) \cdot \theta, \quad (40)$$

а уравнение перехода (12) от W к θ станет

$$\theta = [-\ln W - F_2(0, p)] / \gamma(p), \quad (41)$$

$$\text{где } F_2(0, p) = \frac{\ln(1+p)}{2(4+p)}; \quad \gamma(p) = \frac{1}{1+p}.$$

Аналогично выводу уравнения (26), при температурах, близких к 1, получим

$$\text{Таблица 3. Зависимость функции } W_2(\theta) = \exp[-F_2(\theta, p)]$$

$W(\theta)$ θ	Параметр $p = Bi/Sk$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1	0,9884	0,9785	0,9700	0,9625	0,9559	0,9502	0,9451	0,9406	0,9366	0,9330
0,2	0,8071	0,8129	0,8175	0,8213	0,8244	0,8071	0,8294	0,8315	0,8333	0,8349	0,8364
0,3	0,7214	0,7330	0,7427	0,7509	0,7581	0,7643	0,7698	0,7748	0,7792	0,7833	0,7870
0,4	0,6446	0,6600	0,6732	0,6847	0,6948	0,7038	0,7119	0,7192	0,7258	0,7319	0,7374
0,5	0,5756	0,5933	0,6087	0,6224	0,6346	0,6456	0,6556	0,6646	0,6730	0,6806	0,6877
0,55	0,5434	0,5617	0,5779	0,5923	0,6053	0,6170	0,6277	0,6375	0,6465	0,6548	0,6626
0,6	0,5122	0,5310	0,5477	0,5627	0,5762	0,5886	0,5998	0,6102	0,6198	0,6287	0,6370
0,65	0,4791	0,5007	0,5177	0,5331	0,5471	0,5599	0,5717	0,5825	0,5926	0,6020	0,6108
0,7	0,4513	0,4704	0,4876	0,5032	0,5175	0,5306	0,5427	0,5540	0,5645	0,5743	0,5834
0,75	0,4205	0,4394	0,4566	0,4723	0,4868	0,5001	0,5125	0,5240	0,5348	0,5449	0,5545
0,8	0,3884	0,4070	0,4239	0,4396	0,4540	0,4675	0,4800	0,4917	0,5027	0,5131	0,5229
0,85	0,3534	0,3714	0,3880	0,4034	0,4177	0,4310	0,4436	0,4554	0,4665	0,4770	0,4870
0,9	0,3126	0,3297	0,3456	0,3605	0,3744	0,3875	0,3998	0,4115	0,4226	0,4332	0,4432
0,95	0,2576	0,2731	0,2877	0,3015	0,3146	0,3270	0,3388	0,3500	0,3608	0,3711	0,3810
0,99	0,1696	0,1818	0,1934	0,2046	0,2154	0,2259	0,2360	0,2458	0,2553	0,2645	0,2735

Из таблицы 3 видно, что зависимость (46) лежит между тремя кривыми (41), (43) и (45). Таким образом, искомый переход от W к θ имеет вид

$$\theta(W) = \begin{cases} -[\ln W + F_2(0, p)] / \gamma(p), & \text{если } 0,7 < W \leq 1 \\ \alpha - \beta \cdot W, & \text{если } 0,3 < W \leq 0,7 \\ 1 - (C_4 \cdot W)^{4+p}, & \text{если } 0 < W \leq 0,3. \end{cases} \quad (47)$$

Помимо интерполяционного уравнения (29) и (47) найдем еще одну формулу перехода от W к θ . Применяя к трансцендентному уравнению (12) или (46) метод касательных Ньютона, получим следующую итерационную формулу

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k - f(\theta_k) / f'(\theta_k) = \\ &= \theta_k - V(\theta_k) \cdot [F(\theta_k) + \ln W], \end{aligned} \quad (47a)$$

где $f(x) = F(x) + \ln W$, $f'(x) = \frac{dF}{d\theta} = \frac{1}{V}$ — согласно уравнению (8); $V = V_1(\theta, s)$ и $F = F_1(\theta, s)$ при $Bi > Sk$ и $V = V_2(\theta, p)$, $F = F_2(\theta, p)$ — при $Sk > Bi$.

$$F_2(\theta, p) \cong \frac{-\ln(1-\theta)}{(4+p)} + C_3 \quad (42)$$

и формулу перехода:

$$\theta = 1 - (C_4 \cdot W)^{4+p}, \quad (43)$$

$$\text{где } C_3 = \frac{\ln(4+p)}{2(4+p)} + \frac{\delta_2}{(4+p)} \arctg \delta_2; \quad C_4 = e^{C_3}.$$

В случае умеренных температур ($0,3 < \theta < 0,7$) при $p = 0$ согласно [8]

$$\theta = 1,37 - 1,48 \cdot W, \quad (44)$$

а когда $p = 0,5$

$$\theta = 1,61 - 1,71 \cdot W. \quad (45)$$

Для экспресс-расчетов перехода от W к θ в таблице 3 и на рисунке 3 приведена зависимость (12) в случае $F(\theta) = F_2(\theta, p)$, т.е.

$$W_2(\theta) = \exp[-F_2(\theta, p)]. \quad (46)$$

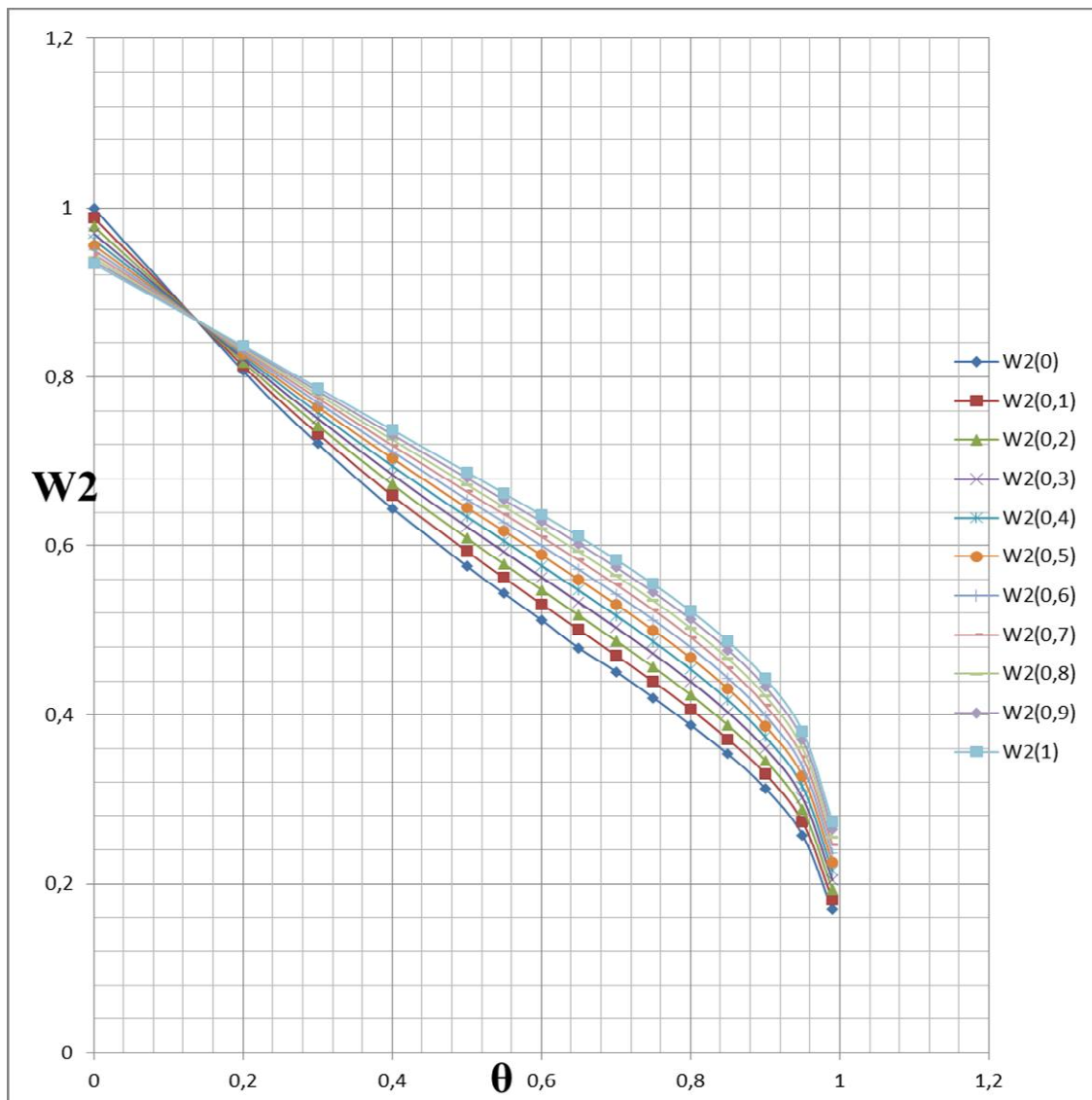
Расчет по (47a) ведется до выполнения условия $|\theta_{k+1} - \theta_k| \leq \varepsilon$, где ε — заданное малое число.

Следует отметить, что в работах [3, 4, 6] в качестве линеаризующей функции $F_2(\theta)$ бралось точное решение $\Psi(\theta)$ согласно уравнению (9) в модели термически тонкого тела. В результате чего точность расчетов преобразованной температуры W возможно и улучшится, но зато математические трудности перехода от поля температур W к искомому $\theta(X, Fo)$ существенно возрастут.

На начальной стадии нагрева, когда $\theta \leq 0,7$, можно использовать (41) и тогда уравнения (18)...(21) значительно упрощаются до следующей линейной зависимости от времени температуры поверхности

$$\begin{aligned} \theta_n(Fo) &= [-\ln W_n(Fo) - F_2(0, p)] / \gamma(p) = \\ &= (C_p + \mu^2 Fo) / \gamma(p), \end{aligned} \quad (48)$$

центра

Рис. 3. Зависимость перехода от W_2 к θ согласно (46)

$$\theta_{\text{ц}}(Fo) = [-\ln W_{\text{ц}}(Fo) - F_2(0, p)] / \gamma(p) = (C_{\text{ц}} + \mu^2 Fo) / \gamma(p) \quad (49)$$

и среднемассовой

$$\theta_{\text{ср}}(Fo) = [-\ln W_{\text{ср}}(Fo) - F_2(0, p)] / \gamma(p) = (C_{\text{ср}} + \mu^2 Fo) / \gamma(p), \quad (50)$$

где $C_p = \Delta F - \ln P$; $\Delta F = F_2(\theta_0, p) - F_2(0, p)$;
 $C_{\text{ц}} = \Delta F - \ln A = C_p - \ln H_k$; $C_{\text{ср}} = \Delta F - \ln B = C_p - \ln m$;
 $m = 1 + g \cdot Sk$.

Полагая в уравнении (49) заданную температуру в центре $\theta_{\text{ц.з.}} = \theta_0 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = 5\% = 0,05$, получим время инерционного периода нагрева

$$Fo_1 = (\ln A + \tilde{\varepsilon}) / \mu^2, \quad (51)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \theta_{\text{ц.з.}} \cdot \gamma(p) - \Delta F \approx \varepsilon_n$.

Представляет определенный интерес температура поверхности и среднемассовая в момент времени Fo_1 . Подставляя (51) в уравнения (48) и (50), получим

$$\theta_{\text{п}}(Fo_1) = \theta_{\text{ц.з.}} + (1 + p) \ln(A/P)$$

и

$$\theta_{\text{ср}}(Fo_1) = \theta_{\text{ц.з.}} + (1 + p) \ln(A/B).$$

В конечной стадии нагрева ($0,7 < \theta \leq 1$) с учетом зависимости (43) будем иметь

$$\theta_j(Fo) = 1 - C_{5,j} \exp[-(4 + p)\mu^2 Fo], \quad (52)$$

где $C_{5,j} = (C_4 \cdot W_0 \cdot O_j)^{4+p}$.

Формула для расчета времени нагрева тела до заданной конечной температуры θ_k совпадает с уравнением (35), в котором конечная $W_k = \frac{(1 - \theta_k)^{1/(1+4p)}}{C_4}$.

Зная температурное поле $\theta(X, Fo)$, можно перейти к расчету термических напряжений.

Расчет термических напряжений

В подавляющем большинстве работ, посвященных радиационному теплообмену [1...7] и др. отсутствуют формулы по определению среднемассовой темпе-

ратуры, без знания которой невозможно рассчитать термические напряжения. В работе [10] показано, что осевые термические напряжения составляют:

$$\sigma_{\pi}(\tau) = S_1 [T_{\text{cp}}(\tau) - T_{\pi}(\tau)], \text{ Па} \quad (53)$$

и в центре

$$\sigma_{\text{ц}}(\tau) = S_1 [T_{\text{cp}}(\tau) - T_{\text{ц}}(\tau)], \text{ Па}. \quad (54)$$

Приведя последние уравнения к безразмерному виду, получим относительные термические напряжения на поверхности

$$\tilde{\sigma}_{\pi}(\text{Fo}) = \theta_{\text{cp}}(\text{Fo}) - \theta_{\pi}(\text{Fo}), \quad (55)$$

в центре

$$\tilde{\sigma}_{\text{ц}}(\text{Fo}) = \theta_{\text{cp}}(\text{Fo}) - \theta_{\text{ц}}(\text{Fo}) \quad (56)$$

и в любой точке

$$\tilde{\sigma}(X, \text{Fo}) = \theta_{\text{cp}}(\text{Fo}) - \theta(X, \text{Fo}), \quad (57)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_{01}$; $0 \leq \tilde{\sigma} \leq 1$; $\sigma_{01} = S_1 \cdot T_c$ — максимально возможные термические напряжения, Па; $S_1 = \beta E / (1 - \nu)$; β — линейный коэффициент термического расширения, $1/\text{K}$; E — модуль упругости Юнга, Па; ν — коэффициент Пуассона.

Проверка методики на адекватность

Пример 1. Проверку на работоспособность разработанных методик сделаем путем сопоставления с данными численного решения [2] нагрева пластины ($k=1$) от начальной температуры $\theta_0 = 0,2$ с числом Старка $\text{Sk} = 0,5$ и $\text{Bi} = 1$. Тогда $s = \text{Sk} / \text{Bi} = 0,5$.

Дадим пример расчета при времени $\text{Fo} = 0,3$. По формуле (8) величина $\delta_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot 0,5}{1 + 0,5}} = 1$; $F_1(\theta_0, s) =$

$$= -\frac{1}{2(1+4/2)} \ln \left(\frac{(1-0,2)^2}{(1+0,5(1+3 \cdot 0,2^2))} \right) + \frac{1}{1+4 \cdot 0,5} \arctg 0,2 = 0,2143 \text{ — смотри также таблицу 1.}$$

Из таблицы 1 или по (23) $F_1(0, s) = \frac{\ln(1+0,5)}{2(1+4 \cdot 0,5)} = 0,068$; $\Delta F = F_1(\theta_0, s) - F(0, s) = 0,2143 - 0,068 = 0,1463$.

Начальное значение $W_0 = e^{-0,2143} = 0,807$. Первый корень по (22): $m = 1 + 1/3 = 4/3$; $D = 1/(4/3) = 3/4$; $\rho = D^2/45 = 9/(16 \cdot 45) = 0,0125$; $\gamma = 1 + \rho = 1,0125$; $\mu^2 = (3/4)/1,0125 = 0,741$; $\mu = \sqrt{0,741} = 0,860$; $\gamma(s) = 1/(1+s) = 1/(1+1/2) = 2/3 = 0,667$.

Тепловые амплитуды:

$$P = \frac{2}{[1 \cdot (1+1) + 0,741]} = 0,730$$
; $A = P / \cos \mu = 1,119$;

$$B = 0,730 / 0,741 = 0,985$$
;

$$H_k = A / P \equiv 1 / \cos \mu = 1 / \cos 0,860 = 1,533$$
.

Температура поверхности по (19)

$$W_{\pi}(0,3) = W_0 \cdot P \cdot e^{-\mu^2 \text{Fo}} = 0,807 \cdot 0,730 \cdot e^{-0,741 \cdot 0,3} = 0,472$$
.

В центре по (20) $W_{\text{ц}}(0,3) = 1,533 \cdot 0,472 = 0,724$;

$$W_{\text{cp}}(0,3) = W_{\pi} / \mu^2 = 0,472 / 0,741 = 0,637$$
.

Окончательные температуры по формулам перехода (29). Так как температуры W находятся в диапа-

зоне $0,3 \leq W \leq 0,7$, то выбираем среднюю формулу для поверхности $\theta_{\pi}(0,3) = 1,42 - 1,51 \cdot 0,472 = 0,71$, центра $\theta_{\text{ц}}(0,3) = 1,42 - 1,51 \cdot 0,72 = 0,348$ и среднемассовая $\theta_{\text{cp}}(0,3) = 1,42 - 1,51 \cdot 0,529 = 0,621$.

Более точно значения $\theta(W)$ можно взять из таблицы 1 или рисунка 1. $\theta_{\text{ц},3} = \theta_0 + \varepsilon_n = 0,2 + 0,05 = 0,25$; $\tilde{\varepsilon}_n = F_1(\theta_{\text{ц},3}, s) - F_1(\theta_0, s) \equiv \gamma(s) \cdot \varepsilon_n = (2/3) \cdot 0,05 = 0,033$.

Время инерционного периода по формуле (31)

$$\text{Fo}_1 = (\ln A + \tilde{\varepsilon}) / \mu^2 = (\ln 1,119 + 0,033) / 0,741 = 0,196$$
.

Следует отметить, что в случае расчета температур при малых числах Фурье ($\text{Fo} < 0,3$), необходимо в уравнении (18) использовать более одного члена ряда.

Для определения полей температур при переменных коэффициентах теплообмена и температуре среды на начальной стадии, можно порекомендовать приближенную методику [11].

Определим по формуле (35) время нагрева пластины до конечной температуры поверхности $\theta_n = \theta_k = 0,95$. Предварительно найдем;

$$C_1 = \frac{\ln(1+4 \cdot 0,5)}{2(1+4 \cdot 0,5)} + \frac{1 \cdot \arctg(1)}{(1+4 \cdot 0,5)} = 0,445$$
; $C_2 = e^{C_1} = 1,560$;

$$W_k = \frac{(1-0,95)^{1/(1+4 \cdot 0,5)}}{1,560} = 0,236$$
.

Тогда время нагрева

$$\text{Fo}_n = \frac{1}{\mu^2} \cdot \ln \frac{W_0 \cdot P}{W_k} = \frac{1}{0,741} \ln \frac{0,807 \cdot 0,73}{0,236} = 1,24$$
.

Теперь проверим методику расчета при $\text{Sk} > \text{Bi}$.

Пример 2. Пусть пластина ($k=1$) нагревается от $\theta_0 = 0,2$ при $\text{Sk} = 1$ и $\text{Bi} = 0,5$. В данном случае расчет ведем при $p = \text{Bi} / \text{Sk} = 0,5 / 1 = 0,5$ и $\gamma(p) = 1/(1+p) = 2/3 = 0,667$. По уравнениям (19), (20) при $\text{Sk} = 1$ и по формулам (47) перехода от W_2 к θ задаваясь, как и ранее, временем от числа Фурье $\text{Fo} = 0,3$ до 2,0 через $\Delta \text{Fo} = 0,1$.

$$\text{Для случая } \text{Sk} > \text{Bi} : \delta_2 = \sqrt{\frac{3}{1+0,5}} = \sqrt{2} = 1,41$$
;

$$C_3 = \frac{\ln(4+0,5)}{2(4+0,5)} + \frac{\sqrt{2} \cdot \arctg \sqrt{2}}{(4+0,5)} = 0,467$$
;

$$C_4 = \exp(0,467) = 1,596$$
; $W_k = \frac{(1-0,95)^{2/9}}{1,596} = 0,322$.

$$\text{Время нагрева } \text{Fo}_n = \frac{1}{0,740} \cdot \ln \frac{0,827 \cdot 0,73}{0,322} = 0,85$$
.

Получается, что второй случай нагрева при $\text{Sk} > \text{Bi}$ примерно на 70 % эффективней первого.

Таким образом, расчет по простой формуле (35) позволяет без проведения обширных детальных вычислений выбрать из двух и более вариантов наиболее эффективный.

Результаты расчетов при разных числах Фурье приведены в таблице 4, а на рисунке 4 — температурная диаграмма нагрева пластины от $\theta_0 = 0,2$ при $\text{Sk} = 0,5$ и $\text{Bi} = 1$ и $\text{Sk} = 1$, $\text{Bi} = 0,5$. Там же представлены значения температур поверхности и центра, полученные методом конечных разностей в [2, 3].

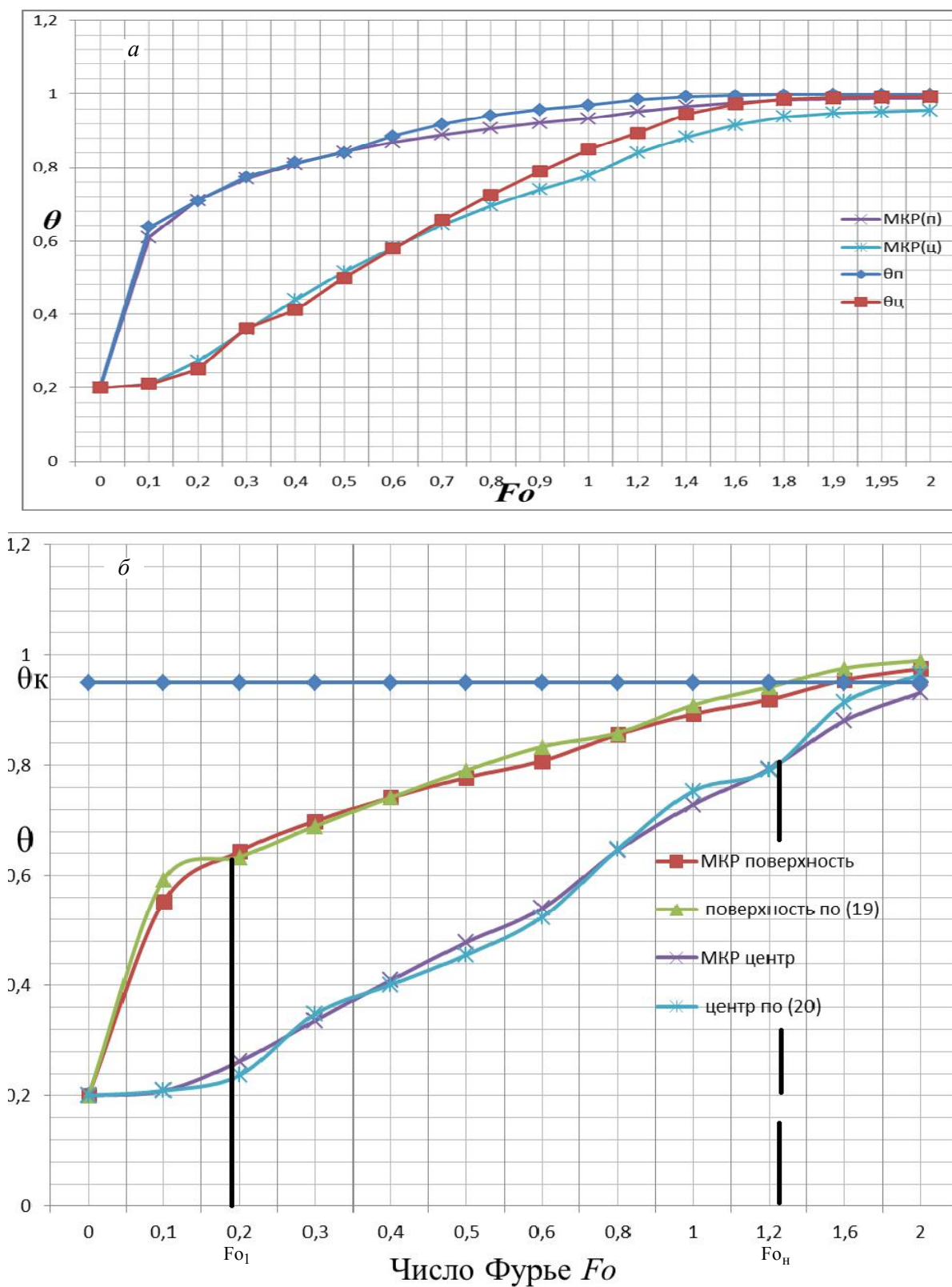


Рис. 4. Температурная диаграмма нагрева пластины от $\theta_0 = 0.2$ при $Sk = 1.0$ и $Bi = 0.5$, случай (a) и $Sk = 0.5$, $Bi = 1.0$ (б)

Таблица 4. Динамика изменения температур поверхности θ_n и центра θ_u пластины, рассчитанная по различным методикам

Число Фурье Fo	$\theta_0 = 0,2$; Sk = 0,5 Bi = 1				$\theta_0 = 0,2$, Sk = 1 Bi = 0,5			
	θ_n		θ_u		θ_n		θ_u	
	МКР, [2]	По (19) и (29)	МКР, [2]	По (20) и (29)	МКР, [3]	По (19) (47)	МКР, [3]	По (20) и (47)
0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
0,1	0,553	0,593	0,209	0,209	0,610	0,638	0,210	0,212
0,2	0,644	0,654	0,262	0,237	0,710	0,709	0,272	0,250
0,3	0,699	0,710	0,336	0,348	0,769	0,774	0,356	0,361
0,4	0,742	0,762	0,409	0,401	0,810	0,813	0,440	0,412
0,5	0,778	0,78	0,478	0,475	0,842	0,840	0,516	0,499
0,6	0,808	0,824	0,54	0,544	0,868	0,886	0,584	0,580
0,8	0,856	0,859	0,646	0,667	0,907	0,941	0,695	0,725
1	0,893	0,91	0,729	0,774	0,934	0,970	0,778	0,849
1,2	0,919	0,942	0,793	0,791	0,953	0,985	0,839	0,894
1,6	0,955	0,976	0,881	0,914	0,976	0,996	0,976	0,972
2	0,975	0,990	0,932	0,965	0,988	0,999	0,956	0,993

Сопоставление методик расчета с численным решением показало, что погрешность определения температур не превышает 10 % и ее можно считать приемлемой для инженерных вычислений.

Выводы

1. На основе линеаризующей подстановки разработана простая и эффективная инженерная методика расчета нагрева излучением и конвекцией тел простой геометрической формы в виде пластины, цилиндра и шара при любых числах Фурье.

2. Использован прием разделения процесса нагрева на два характерных случая, когда число Био больше радиационного числа Старка и наоборот, позволивший снизить число переменных и представить решение задачи в табличном и графическом видах исполнения.

3. Для модели термически тонкого тела получено решение в упрощенном виде.

4. Выявлена область линейного изменения во времени температурного поля аналогично регулярному режиму при чисто конвективном нагреве.

5. Получена простая формула по расчету времени нагрева тела до заданной температуры, позволяющая быстро определить наиболее эффективный по быстрдействию вариант нагрева.

6. Сопоставление методик с численным решением показало, что погрешность определения температур не превышает 10 % и ее можно считать приемлемой для инженерных расчетов.

7. Получены формулы для расчета осевых термических напряжений в любой точке тела, на поверхности и в центре.

ЛИТЕРАТУРА

- Кавадеров А.В., Самойлович Ю.А. Нагрев тонких тел одновременно излучением и конвекцией // ИФЖ. – 1959. – т. 2. – №7. – С. 110–113.
- Видин Ю.В. Неуставившееся температурное поле в плите при совместном действии теплового излучения и

конвекции // ИФЖ. – 1967. – Т.12. – № 5. – С.669–671.

- Видин Ю.В., Иванов В.В. Расчет температурных полей в твердых телах, прогреваемых конвекцией и радиацией одновременно. – Красноярск: КПИ. – 1965. – 144 с.
- Иванов В.В. Теплопроводность твердых тел, прогреваемых конвекцией радиацией одновременно // Известия вузов. Энергетика. – 1967. – № 3. – С.144–147.
- Постольник Ю.С. Температурный режим пластины и цилиндра, нагреваемых одновременно излучением и конвекцией // ИФЖ, 1969. – ТХVI. – № 6. – С. 1082–1086.
- Саломатов В.В. Температурный режим твердых тел при совместном воздействии радиации и конвекции. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, №4, 1969. – С. 91–97.
- Фурман А.В., Фукс Г.И. Аналитический расчет нагрева тел одновременно излучением и конвекцией // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1967. – № 6. – С. 139–142.
- Горбунов А.Д., Уклеина С.В. Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 3 // Математическое моделирование. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2015. – №2 (33). – С. 65–68.
- Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука. Физматлит, 1971. – 1108 с.
- Горбунов А.Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2011. № 1(26). – С.39–45.
- Горбунов А.Д., Уклеина С.В., Инженерная методика расчета полей температур и термических напряжений на начальной стадии радиационно- конвективного нагрева (охлаждения) тел при переменных коэффициентах теплообмена и температуре среды / PROBLEMELE ENERGETICII REGIONALE TERMOENERGETICĂ. Молдова, 2016. 2(31) – С. 69–76.