МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В СУСПІЛЬНИХ І ГУМАНІТАРНИХ НАУКАХ

О.М. ПИГНАСТЫЙ, д.т.н, профессор, pihnastyi@gmail.com
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков

Многомоментные потоковые модели производственной линии

Представлен анализ системы балансовых уравнений для потоковых параметров производственной линии. Исследован класс решений системы балансовых уравнений для параметров производственной линии, представленный равновесными функциями. При рассмотрении неравновесных состояний параметров поточной линии использованы приближенные методы, основанные на теории возмущений. Продемонстрирован вывод уравнений системной динамики для сети материалов производственной линии, в основу которого положены балансовые уравнения. Показано, что уравнения системной динамики определяются в результате интегрирования системы балансовых уравнений. Проанализирован метод построения уравнений системной динамики для сети материалов.

The analysis of the system of balance equations for flow parameters of the production line is presented. The class of solutions of the system of balance equations for the parameters of the production line, represented by equilibrium functions, is investigated. Approximate methods based on perturbation theory were used to consider nonequilibrium states of flow line parameters. The derivation of equations of system dynamics for a network of materials of a production line based on balance equations is demonstrated. It is shown that the equations of system dynamics are determined as a result of integrating the system of balance equations. The method of constructing the equations of system dynamics for a network of materials is analyzed.

Постановка проблемы

Большинство современных поточных линий функционируют в окрестности своего равновесного состояния [1]. Распространенным равновесным состоянием поточной линии является синхронизированный режим работы оборудования [1—5]. Если значения потоковых параметров производственной линии начали отклоняться от своего равновесного состояния, то со временем они или вернутся к своему равновесному состоянию или поточная линия остановится, так как межоперационный задел будет выработан полностью или будет заполнен накопитель, хранящий предметы труда перед их технологической обработкой. Поведение потоковых параметров в окрестности равновесного состояния может быть изучено с использованием методов теории возмущений [6]. Приближенные решения дают полное представление о поведении потоковых параметров производственной линии во многих интересных с практической точки зрения случаях, что в свою очередь укрепляет уверенность в адекватности выбранной математической модели.

Состояние производственной поточной линии в пространстве S и времени t описывается уравнением [1,c.37]:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial\chi}{\partial S}\mu+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}f=G(t,S,\mu),$$

$$G(t,S,\mu)=\lambda_{Plant}\left\{\int_0^\infty\left[\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\tilde{\mu}\cdot\chi\right]d\tilde{\mu}-\mu\cdot\chi\right\}. \quad (1)$$

Решение и анализ интегро-дифференциального уравнения (1) относительно фазовой функции распределения $\chi=\chi(t,S,\mu)$ предметов труда по состояниям в фазовом пространстве (S,μ) связано со значительными трудностями. В уравнении (1) μ есть усредненная интенсивность переноса технологических ресурсов по всем предметам труда, находящихся в ячейке фазового технологического пространства с координатами $S_j\in[S,S+dS[$, $\mu_j\in[\mu,\mu+d\mu[$ [7], $\lambda_{Plant}(t,S)dS$ есть количество единиц обобщенного технологического оборудования на отрезке технологического маршрута $[S,S+dS]$. В единицу времени элемент объема $d\Omega=dS\cdot d\mu$, $S\in[S,S+dS[$, $\mu\in[\mu,\mu+d\mu[$ посетило в среднем $\chi(t,S,\mu)\cdot\mu\cdot d\mu$ предметов труда, испытав при этом в среднем $\{\lambda_{Plant}(t,S)\cdot dS\}\cdot\{\chi(t,S,\mu)\cdot\mu\cdot d\mu\}$ актов воздействия технологического оборудования на предметы труда. Вероятность того, что в результате воздействия технологического оборудования на предмет труда значение случайной величины μ окажется в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$ есть величина $\varphi(t,S,\mu,\tilde{\mu})\cdot d\tilde{\mu}$, а полная вероятность перехода в любое состояние равна единице:

$$\int_0^\infty\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)d\mu=1. \quad (2)$$

Таким образом, число предметов труда, испытавших в единицу времени воздействие со стороны технологического оборудования и принявших значения случайной величины в пределах $(\tilde{\mu};\tilde{\mu}+d\tilde{\mu})$ есть произведение вероятности перехода $\varphi(t,S,\mu,\tilde{\mu})d\tilde{\mu}$ на общее количество предметов труда $\lambda_{Plant}(t,S)\cdot dS\cdot\chi(t,S,\mu)\cdot\mu\cdot d\mu$, испытавших воздействие технологического оборудования

©Пигнастый О.М., 2017

$$\varphi(t,S,\mu,\tilde{\mu})\cdot d\tilde{\mu}\cdot\lambda_{Plant}(t,S)\cdot dS\cdot\chi(t,S,\mu)\cdot\mu\cdot d\mu\,. \quad (3)$$

В явном виде плотность распределения $\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$ случайной величины μ может быть записана через плотность распределения $\psi(t,S,\tilde{\mu}_{\psi},\mu_{\psi})$ случайной величины μ_{ψ}. При равномерном переносе технологических ресурсов на все N_m предметов труда, находящихся в межоперационном заделе m-ой обобщенной технологической операции, случайные величины μ и μ_{ψ} связаны функциональной зависимостью [8,c.821], [9,c.783], [10,c.117]

$$\mu=\frac{1}{N_m}\cdot\mu_{\psi}\,, \quad (4)$$

предполагающей линейный закон увеличения времени обработки партии предметов труда в с увеличением размеров очереди N_m, где N_m — неслучайная величина. Тогда плотность распределения $\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)$ случайной величины μ может быть представлена в виде [11, с. 338]:

$$\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)=N_m\cdot\psi(t,S,N_m\cdot\tilde{\mu},N_m\cdot\mu)\,. \quad (5)$$

Формулирование цели исследований

Весьма точный класс решений представляется равновесными функциями $\chi_0(t,S,\mu)$ [12], являющиеся решением уравнения (1), которые описывают равновесные состояния параметров технологического процесса

$$\lim_{t\to\infty}\chi(t,S,\mu)\to\chi_0(t,S,\mu)\,. \quad (6)$$

При рассмотрении неравновесных состояний параметров поточной линии будем использовать приближенные методы, основанные на теории возмущений [6,13]. Выберем малый параметр ε, отвечающий исходной постановке задачи, и фазовую функцию распределения предметов труда по состояниям $\chi(t,S,\mu)$, которая может быть разложена в асимптотически сходящийся ряд по малому параметру ε:

$$\chi(t,S,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\chi_k(t,S,\mu)\,,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\chi_{k+1}(t,S,\mu)}{\chi_k(t,S,\mu)}\to 0\,. \quad (7)$$

Разложение функции $\chi(t,S,\mu)$ в степенной ряд по параметру ε влечет за собой разложение интеграла

$$\lambda_{Plant}\int_0^{\infty}\left[\psi(\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi-\psi(\mu)\cdot\mu\cdot\chi\right]d\tilde{\mu}=\sum_{m=0}^{k}\varepsilon^k G_k(t,S,\mu)\,. \quad (8)$$

Значительное число разложений уравнения относительно фазовой функции распределения $\chi=\chi(t,S,\mu)$ обладает тем свойством, что членом нулевого порядка в них служит равновесная функция $\chi_0(t,S,\mu)$, для которой выполняется условие

$$G_0(t,S,\mu)\equiv\frac{d\chi_0(t,S,\mu)}{dt}\equiv 0. \quad (9)$$

Определим выбор малого параметра. Если при исходной постановке параметр ε не входит непосредственно в уравнение относительно фазовой функции распределения предметов труда по состояниям $\chi(t,S,\mu)$ (1), то следует обратиться к линеаризованному уравнению.

Рассмотрим класс технологических процессов со значениями характерных чисел $K_v<<1$, $P_m\approx 1$, что соответствует плотному потоку предметов труда вдоль технологического маршрута с высокой концентрацией технологического оборудования [14]. Метод решения можно формализовать, вводя искусственный параметр $\varepsilon\approx Kv\to 0$ в качестве множителя перед левой частью уравнения [6,14 -17]. Принимая во внимание

$$\varepsilon=K_v=\frac{L_d}{S_d}\to 0\,,\qquad Pm=\frac{\xi}{\tau\cdot\eta}\to 1\,, \quad (10)$$

представим кинетическое уравнение (1) в виде

$$\varepsilon\cdot\left[\frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\hat{S}}\cdot\hat{\mu}+\frac{\partial\chi}{\partial\hat{\mu}}\cdot\frac{d\hat{\mu}}{d\hat{t}}\right]=\hat{G}\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right); \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty}\left[\psi\left[\hat{\tilde{\mu}}\to\hat{\mu}\right]\cdot\hat{\tilde{\mu}}\cdot\chi(\hat{t},\hat{S},\hat{\tilde{\mu}})-\psi\left[\hat{\mu}\to\hat{\tilde{\mu}}\right]\cdot\hat{\mu}\cdot\chi(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu})\right]\cdot d\hat{\tilde{\mu}}\approx$$

$$\approx\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\hat{G}_k\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right). \quad (12)$$

Подставляя (7) в кинетическое уравнение (1), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\left[\frac{\partial\chi_{(k-1)}}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_{(k-1)}}{\partial\hat{S}}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_{(k-1)}}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\hat{G}_k\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right) \quad (13)$$

или

$$\hat{G}_0\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right)=0,\qquad \frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}}\mu+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}}\hat{f}=\hat{G}_1\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right),$$

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{S}}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{G}_2\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right). \quad (14)$$

Из уравнения $\hat{G}_0\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right)=0$ находится нулевое приближение χ_0, которое используется для определения первого приближения χ_1, и так далее. Обычно несколько приближений достаточно для поиска решения кинетического уравнения (1) с требуемой точностью. Разложение функции распределения предметов труда в ряд по степеням $\varepsilon\approx Kv\to 0$ позволяет построить в заданном приближении описание функционирования поточной линии через моменты функции распределения.

Предельный случай $K_v\approx 1$, $P_m\approx 1$ определяет технологический процесс, который описывается кинетическим уравнением (1) со слагаемыми, равными по порядку величины. После подстановки (7) в (1) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\left[\frac{\partial\chi_k}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_k}{\partial\hat{S}}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_k}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\cdot\hat{G}_k\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right), \quad (15)$$

откуда

$$\frac{\partial\chi_k}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_k}{\partial\hat{S}}\mu+\frac{\partial\chi_k}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{G}_k\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right). \quad (16)$$

Функция $\chi_0(t,S,\mu)$ удовлетворяет уравнению в нулевом приближении

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=G_0(t,S,\mu). \quad (17)$$

Так как $\hat{G}_0\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right)=0$, то в качестве нулевого приближения возьмем равновесную функцию. В противном случае начальный шаг метода возмущений будет столь же трудным, что и решение исходного уравнения. Формулы (14) задают алгоритм последовательных приближений решения кинетического уравнения. На каждом шаге решается одно и то же уравнение (16) с новым свободным членом, вычисляемым по предыдущим приближениям.

Для описания функционирования поточной линии с достаточной степенью точности можно ограничиваться случаем $k=0{,}1{,}2$. Линеаризованное уравнение по форме совпадает с общим кинетическим уравнением. Изучение линеаризованного уравнения позволяет сделать вывод о свойствах решения общего уравнения для случаев, когда нелинейный характер в правой части кинетического уравнения несущественный. Условия применения линеаризованного уравнения должны быть определены начальными и граничными условиями. Так как ищется решение в виде $\chi=\chi_o(1+\delta)$, то требуя, чтобы функция δ в том или ином смысле была мала по сравнению с единицей, необходимо, чтобы δ была мала и на границе, и в начальный момент времени. Следовательно, отклонения начальных данных от равновесной функции распределения предметов труда по состояниям χ_o должны быть малы. Линеаризация оправдана, если нелинейные неоднородные члены в начальных и краевых условиях малы.

Предельный случай $K_v \approx 1$, $P_m >> 1$ соответствует нестационарному режиму функционирования поточной линии. Основной вклад в формирование функции распределения вносит слагаемое $\frac{\partial\chi}{\partial t}$. Если в начальный момент времени функция распределения не является равновесной, то она будет достаточно быстро изменяться, пока таковой не станет. Кинетическое уравнение технологического процесса (1) получаем в виде

$$Pm\cdot\left[\frac{\partial\chi}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}\right]=\hat{G}\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right). \tag{18}$$

Функция распределения предметов труда по состояниям должна меняться в масштабах быстрого времени. В течении небольшого промежутка времени функция распределения предмета труда по состояниям для начального потока принимает вид, удовлетворяющий условию $\hat{G}\left(\hat{t},\hat{S},\hat{\mu}\right)=0$. Таким образом, функция распределения принимает значения в окрестности равновесной функции. Получен вывод о том, что начальное распределение предметов труда по состояниям при достаточно больших временах $t\to\infty$ стремится к равновесному распределению $\chi\to\chi_0$, которое определяется параметрами работы технологического оборудования.

Основной материал

1. Приближенные балансовые уравнения для потоковых параметров производственных линий

Балансовые уравнения [18,19]

$$\int_0^\infty\mu^k\cdot\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mu+\int_0^\infty\mu^{k+1}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial S}d\mu+\int_0^\infty\mu^k\cdot\frac{\partial\chi}{\partial\mu}\cdot f d\mu=$$
$$=\lambda_{Plant}\cdot\int_0^\infty\mu^k\cdot\{\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)\cdot[\chi]_1-\mu\cdot\chi\}d\mu, \tag{19}$$

для потоковых параметров производственной линии[7]

$$\int_0^\infty\mu^k\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=[\chi]_k, \tag{20}$$

которые получены путем интегрирования уравнения (1), являются незамкнутыми. Для обеспечения замкнутости системы балансовых уравнений используем условия [20]:

$$[\varphi]_0=\int_0^\infty\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)d\mu=[\psi]_0=1, \tag{21}$$

$$[\varphi]_1=\int_0^\infty\mu\varphi(t,S,\tilde{\mu},\mu)d\mu=\frac{1}{N_m}\int_0^\infty\mu_\psi\psi(t,S,\tilde{\mu}_\psi,\mu_\psi)d\mu_\psi=$$
$$=\frac{[\psi]_1}{N_m}=\frac{[\chi]_{1\psi}(t,S)}{[\chi]_0(t,S)}. \tag{22}$$

В отличие от используемого для замкнутости уравнения состояния, представленного clearing-функцией (Armbruster D, Kempf K., Fonteijn J., Wienke M, Lefeber) [21], условия (21),(22) учитывают предметно-технологический механизм взаимодействия предметов труда между собой и технологическим оборудованием. Такой подход позволяет описывать с заданной степенью точностью переходные процессы, учитывая при этом схему расположения технологического оборудования и конкретные механизмы его воздействия на предметы труда с целью переноса технологических ресурсов. Попытки создания нестационарных clearing-функций ограничены специальными теоретическими уточнениями и экспериментальными установками (Fonteijn J., Wienke M., 2012) [22]. В качестве такого уточнения Lefeber (2008) вводит в clearing-функцию эффективное время обработки $\tau_0=\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{\mu_m}$ предметов труда на технологических операциях, [21]: $[\chi]_{CL}=\Phi(W(t-\tau_0))$. Missbauer H (2009) расширил применение clearing-функции на переходные процессы, при этом обращалось внимание на существенную зависимость пропускной способности производственной линии от начального распределения предметов труда по технологическому маршруту и необходимость обеспечения условий перехода производственной системы из одного стационарного устойчивого состояния в другое. Предположение о квазистационарности переходного процесса является значительным ограничением для использования представленных моделей.

Рассмотрим класс поточных линий, для которых качественная оценка состояния параметров системы дает значения характерных чисел (10) $Kv<<1$, $Pm\approx 1$ [14]. Модели поточных линий, отвечающих заданному критерию, описывают движение плотного потока предметов труда по технологическому маршруту с высокой концентрацией технологического оборудования [3,10,20,22,23]. Замкнутая система балансовых уравнений может быть получена в нулевом приближении по малому параметру $Kv<<1$ из кинетического уравнения (14) [1]:

$$\varphi_0(t,S,\mu)\ [\chi]_1-\mu\cdot\chi_0=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{S}}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_0}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{G}_1(t,S,\mu), \tag{24}$$

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{S}}\cdot\mu+\frac{\partial\chi_1}{\partial\hat{\mu}}\cdot\hat{f}=\hat{G}_2.(t,S,\mu). \tag{25}$$

Решение уравнения (23) дает в нулевом приближении по малому параметру Kv вид фазовой функции распределения предметов труда по состояниям

$$\chi_0=[\chi]_1\cdot\frac{\varphi_0(t,S,\mu)}{\mu}, \tag{26}$$

откуда система многомоментных балансовых уравнений (19) для потоковых параметров производственной линии принимает вид

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0, \qquad (27)$$

$$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}+\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=\left([\chi]_{1\psi}-[\chi]_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\right), \qquad (28)$$

$$\frac{\partial[\chi]_n}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{n+1}}{\partial S}=n\cdot f(t,S)\cdot[\chi]_{n-1} \qquad (29)$$

Система многомоментных балансовых уравнений (27)—(29) позволяет построит модели поточных линий в нулевом приближении по малому параметру $Kv<<1$ при $Pm\approx 1$

для одномоментного описания

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_{1\psi}}{\partial S}=0, \qquad (30)$$

для 2-х моментного описания

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}+\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=0,$$

$$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}+\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\frac{\partial[\chi]_1}{\partial S}=\left([\chi]_{1\psi}-[\chi]_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\right). \qquad (31)$$

Как правило, для описания функционирования поточной линии используются первые два момента $[\chi]_n$ фазовой функции распределения предметов труда по состояниям [23,24]. В связи с этим систему уравнений для трехмоментного описания приводить не будем. Одномоментное уравнение (3.73) независимо было получено в работах [25] (Пигнастый, Демуцкий, 2003), [9] (Armbruster, Marthaler, Ringhofer, 2003), в дальнейшем использовано при расчете параметров поточных линий с синхронизированной работой технологического оборудования. Двухмоментная модель поточной линии с синхронизированной работой технологического оборудования [7,с.820], [20] может быть получена из двухмоментной системы уравнений (31)

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(t,x)\cdot v(t,x)\right)=0, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t}+v(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}=0, \qquad (33)$$

где x, $\rho(t,x)$, $v(t,x)$ — соответственно степень незавершенности изготовления изделия, плотность распределения предметов труда и темп их обработки вдоль технологического маршрута (по координате x).

Характерные числа $Kv<<1$ при $Pm\approx 1$ ограничили пределы применимости двухмоментной модели поточной линии (31). При количестве предметов труда в межоперационном заделе $N_m>>1$ следует $[\chi]_1\to[\chi]_{1\psi}$.

Следующий предельный случай $Kv\approx 1$, $Pm>>1$ соответствует переходному, сильно нестационарному режиму работы поточной линии. Такое поведение характерно для производственной деятельности предприятия, когда требуется осуществить, переход с одних производственных показателей на другие в результате резкого изменения спроса на производимую продукцию. Замкнутая система балансовых уравнений может быть получена в нулевом приближении по малому параметру $1/Pm<<1$ из кинетического уравнения технологического процесса (18):

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0,\ \frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=0,$$

$$\frac{\partial[\chi]_n}{\partial t}-n\cdot f(t,S)\cdot[\chi]_{n-1}=0. \qquad (34)$$

Система многомоментных балансовых уравнений (34) позволяет построить модели поточных линий в нулевом приближении по малому параметру $1/Pm<<1$, $Kv\approx 1$

для одномоментного описания

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0; \qquad (35)$$

для двух моментного описания

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=0; \qquad (36)$$

для трех моментного описания

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial[\chi]_1}{\partial t}-f(t,S)\cdot[\chi]_0=0,$$

$$\frac{\partial[\chi]_2}{\partial t}-2\cdot f(t,S)\cdot[\chi]_1=0. \qquad (37)$$

В силу уравнения $\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0$ следует $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[\chi]_1}{[\chi]_0}\right)=f(t,S)$.

Переход от уравнений PDE-модели поточной линии к уравнениям Fluid-модели. Статистическое обоснование уравнений системной динамики.

Идея моделирования сложных производственно-технических систем на уровне потокового описания, когда исследователь абстрагируется от индивидуальных объектов, таких как предметы труда, работники, единицы технологического оборудования, и рассматривает только агрегированные количественные характеристики потоков этих объектов, была предложена Дж.Форрестером (Jay W. Forrester) [26,стр.17]. Для демонстрации функционирования сложных производственных систем Дж.Форрестер применил принципы исследования систем с обратной информационной связью, показал существенную зависимость поведения параметров производственной системы от структуры связей между ними. Проведен анализ взаимодействия потоков информации, денежных средств, заказов, товаров, рабочей силы и технологического оборудования производственной системы [26, стр.17]. Динамическое моделирование «воплощает количественный и экспериментальный подход к решению задачи приведения организационной структуры предприятия в соответствии с требованиями промышленного развития и устойчивости» [26,стр.17]. Методология системной динамики представляет в настоящее время достаточно мощный инструментарий исследования динамических моделей производственных систем. Актуальным в этом исследовании является вопрос построения адекватных математических моделей производственных линий и определение связей между потоковыми параметрами.

Модель системной динамики для потокового описания производственных процессов содержит уравнения уровней [26,стр.65], темпов [26,стр.66], вспомогательные уравнения [26,стр.66] и уравнения начальных условий [26,стр.68] для взаимосвязанных сетей [26,стр.59] материалов, заказов, денежных средств, рабочей силы, оборудования, информации. Разделение на шесть сетей условно [26,стр.60]. Уравнения уровней есть интегральные уравнения вида [26,стр.65]:

$$\{\chi\}_{0,m,n}(t+\Delta t)=\{\chi\}_{0,m,n}(t)+\int_0^{\Delta t}\left(\{\chi\}_{1\_in,m,n}-\{\chi\}_{1\_out,m,n}\right)dt,$$

$$n=1..6,\quad m=1..\mathrm{N}_m \qquad (38)$$

где $\{\chi\}_{0,m,n}(t)$, $\{\chi\}_{1\_in,m,n}(t)$, $\{\chi\}_{1\_out,m,n}(t)$ — обозначение уровня, темпа входящего и темпа исходящего потока в момент времени t для m -го объекта n -ой сети. Вывод уравнений системной динамики для поточной линии (рис.1.2) будем рассматривать на примере одной сети (далее индекс « n » опустим) из N_m — объектов. Под m-объектом подразумевается обобщенная технологическая операция. Под уровнем $\{\chi\}_{0,m}$ для m-ого объекта производственной линии понимается количество предметов труда в межоперационном и страховом заделе перед m-обобщенной технологической операцией. Поступление и убыль предметов труда в единицу времени (темп обработки предмета труда) на m-технологической операции ($\{\chi\}_{1\_out,m-1}=\{\chi\}_{1\_in,m}$) определяют темп входящего $\{\chi\}_{1\_in,m}$ и исходящего $\{\chi\}_{1\_out,m}$ потока. Система уравнений системной динамике, используемая для моделирования поточной линии, имеет вид

$$\frac{d\{\chi\}_{0,m}(t)}{dt}=\{\chi\}_{1\_in,m}(t)-\{\chi\}_{1\_out,m}(t), \qquad (39)$$

$$\{\chi\}_{1\_out,m}(t)=\{\chi\}_{0,m}(t)\big/T_m,\ m=1..\mathrm{N}_m, \qquad (40)$$

$$\{\chi\}_{0,m}(0)=A_{0,m},\ \{\chi\}_{1\_in,m}(0)=\mathbf{B}_{in,m}, \qquad (41)$$

$$\{\chi\}_{1\_out,m}(0)=B_{out,m}, \qquad (42)$$

где T_m — заданная величина (постоянная запаздывания [26]), а уравнения (41), (42) — начальные условия для потоковых параметров в уравнениях уровней (39) [26,стр.65] и темпов (40) уравнения темпов [26,стр.76]. Дополним систему уравнений уровней (29)-(42) вспомогательными уравнениями [26,стр.68]:

$$\Phi_m\left(\{\chi\}_{0,m_1},\{\chi\}_{1\_out,m_2}(t),\{\chi\}_{1\_out,m_3}(t)\right)=0,$$

$$m_1,m_2,m_3=1..\mathrm{N}_m. \qquad (43)$$

Уравнения (43) являются уравнениями состояния, связывают потоковые параметры производственной линии между собой. Уравнения состояния накладывают ограничения на поведение потоковых параметров, вводятся из соображений обеспечения замкнутости системы уравнений (39), (40).

Система уравнение темпа (39), (40) содержит уравнение с запаздыванием показательного типа [26,стр.76], определяющее вид решения $\{\chi\}_{0,m}(t)$. Уравнения системной динамики (39)-(43) образуют замкнутую систему уравнений для описания поточной линии производственной системы.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных моделированию производственных и социально-экономических систем с применением математического аппарата системной динамики. Наряду с этим редкими являются работы, связанные с выводом уравнений системной динамики, адекватно отражающих рассматриваемый производственный или социально-экономический процесс. Так, например, при описании производственно-сбытовой системы в работе [26] используются балансовые уравнения системной динамике, не учитывающие особенности технологической обработки предмета труда в результате воздействия технологического оборудования. Между потоковыми параметрами производственной линии записывают связи, в основе которых лежат накопленные статистические данные [26,27]. Эти данные, как правило, не учитывают динамику развития внешней и внутренней среды производственного предприятия, особенности его технологического процесса, взаимосвязи между элементами системы и элементами внешней среды. Особенно актуальным является вопрос проектирования поточных линий производственных систем, не обладающих накопленной статистикой. Возникает естественный вопрос о соответствии используемых уравнений изучаемым производственным и экономическим явлениям. Методике построения уравнений системной динамики в требуемом приближении посвящен настоящий параграф. В нем предпринята попытка, используя данные о технологическом процессе, количестве, расстановке технологического оборудования и его параметрах, получить уравнения системной динамики вида (39)—(43) для потоковых параметров производственной линии [7,28,29]. Рассмотрим принцип построения уравнений системной динамики для поточной линии производственной системы с характерными числами: $K_v \to 0$, $P_m \to 1$. Поведение потоковых параметров производственной линии в одномоментном представлении будем описывать балансовым уравнением (30).

Проинтегрируем уравнение в частных производных (30) в пределах m -ой технологической операции $\Delta S_m = S_m - S_{m-1}$

$$\frac{d\{\chi\}_{0,m}(t)}{dt}=\{\chi\}_{1\_in,m}(t)-\{\chi\}_{1\_out,m}(t),$$

$$\int_0^{\Delta S_m}[\chi]_0 dS=\{\chi\}_{0,m}(t). \qquad (44)$$

Дополним (44) уравнениями состояния. Распространенными уравнениями состояния являются уравнения вида

$$\{\chi\}_{1\_in,m+1}(t)=[\chi]_{1\psi}(t)(t,S_m),$$

$$\{\chi\}_{1\_out,m}(t)=[\chi]_{1\psi}(t)(t,S_m). \qquad (45)$$

Другим распространенным видом уравнений состояния являются соотношения, которые связывают среднюю длину очереди $N_{\psi,m}$ предметов труда, ожидающих обработку на $m-$ой технологической операции с общим временем обработки $T_m(t)=\Delta\tau_{m,\Sigma}(t)$ [30] предмета труда на $m-$ой технологической операции и темпом обработки $[\chi]_{1\psi\ m}(t)$

$$\{\chi\}_{0,m}(t)=\{\chi\}_{1\_out,m}(t)\cdot T_m(t),\qquad T_m(t)=\Delta\tau_{m,\Sigma}(t),$$

$$\Delta\tau_{m,\Sigma}=\sum_{k=1}^{N_{\psi,m}}\Delta\tau_{m\ k}. \qquad (46)$$

Уравнение состояния (46) представлены формулой Литтла [31], характеризующий установившийся режим функционирования производственной линии.

Дополним (3.86) и (3.88) начальными условиями, получим замкнутую систему уравнений системной динамики в приближении $K_v \to 0$, $P_m \to 1$ установившегося режима режим функционирования производственной линии

$$\frac{d\{\chi\}_{0,m}(t)}{dt} = \{\chi\}_{1\_in,m}(t) - \{\chi\}_{1\_out,m}(t),$$
$$\int_0^{\Delta S_m} [\chi]_0 dS = \{\chi\}_{0,m}(t),$$
$$\{\chi\}_{1\_out,m}(t) \approx \{\chi\}_{0,m}(t) / T_m,$$
$$\{\chi\}_{1\_in,m+1}(t) = \{\chi\}_{1\_out,m}(t),$$
$$\{\chi\}_{0,m}(0) = A_{0,m}, \ \{\chi\}_{1\_in,m}(0) = \mathbf{B}_{in,m},$$
$$\{\chi\}_{1\_out,m}(0) = B_{out,m}, \qquad (47)$$

Система уравнений (47) использована для описания производственной линии [26]. Точность и адекватность модели определяется видом PDE-системы балансовых уравнений и уравнениями состояния, замыкающими систему балансовых уравнений.

Таким образом, используя взаимосвязь предметно-технологического параметра T_m и потоковых параметров $\{\chi\}_{0,m}(t)$, $\{\chi\}_{1\_in,m}(t)$, $\{\chi\}_{1\_out,m}(t)$ производственной линии, получена система уравнений системной динамики для сети материалов производственной системы.

Показано, что уравнения системной динамики для сети материалов являются предельным случаем системы балансовых уравнений [20]. Ценность предложенной методики построения уравнений системной динамики в том, что она позволяет не только получить известные уравнения [26,стр.65], но и определить условия их применимости. Показано, что широко используемые уравнения системной динамики (47) соответствуют, состоянию производственной линии, которое определяетсязначениями безразмерных параметров $K_v \to 0$, $P_m \to 1$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Показано, что балансовые уравнения для потоковых параметров производственной линии являются незамкнутыми. Предложен метод замыкания балансовых уравнений, используемых для описания переходных режимов функционирования производственной линии. Записана замкнутая система балансовых уравнений для потоковых параметров производственной линии. Обеспечена связь между собой потоковых параметров производственной линии через микроскопический уровень предметно-технологического описания, основанного на использовании уравнений состояния предмета труда.

Выполнен анализ интегро-дифференциального кинетического уравнения. Найден класс решений, представленный равновесными функциями распределения предметов труда по состояниям, определяющими поведение потоковых параметров производственной линии. Показано, что для ряда интересных с практической точки зрения случаев приближенные решения балансовых уравнений дают достаточно полное представление о поведении параметров поточной линии.

Продемонстрирован вывод уравнений системной динамики для сети материалов производственной линии [26], в основу которого положены уравнения PDE-модели. Показано, что уравнения системной динамики определяются в результате интегрирования системы балансовых PDE-уравнений. Проанализирован метод построения уравнений системной динамики для сети материалов. Представлены известные уравнения системной динамики [26,стр.65] и определены условия их применимости. Обращено внимание, что используемые в [245,стр.65] уравнения системной динамики описывают функционирование производственной линии в установившемся режиме ($K_v \to 0$, $P_m \to 1$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Азаренков Н.А. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии / Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. 2014. № 12. – С. 36– 43. – Available at : https://goo.gl/M913ju, (accessed 14.01.2018)
2. Kempf K. Optimization models for production planning. Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise: A State of the Art Handbook. / K.Kempf, P.Keskinocak, R.Uzsoy – Springer-Verlag, New York, 2010. – 587 p.
3. Lefeber E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems. / E.Lefeber, R.A.Berg, J.E. Rooda – Proceeding of the 2004 American Control Conference, Massachusetts, 2004. – P. 4583–4588.
4. Синица Л.М. Организация производства. / Л.М. Синица. – Мн.: УП ИВЦ Минфин, 2003. – С. 512.
5. Разумов И.М. Организация и планирование машиностроительного производства. / И.М.Разумов, Л.Я. Шухгалтер – М.: Машиностроение, 1974. – С. 592.
6. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 412.
7. Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции / В.П.Демуцкий, В.С.Пигнастая, О.М.Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика". – 2005. – № 7. – С. 66–71. DOI: 10.13140/RG.2.2.31202.32968 – Available at: https://goo.gl/Cu6MXe, (accessed 14.01.2018)
8. Armbruster D.A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. / Armbruster D., Degond P., Ringhofer C. – SIAM Journal on Applied Mathematics 66(3), 2006. – P. 896–920.
9. Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains. SIAM Multiscale Model Simul. / Armbruster D., Marthaler D., Ringhofer C. – 2004. – vol. 2 № 1. – P. 43–61.
10. Armbruster D. Continuous Dynamic Models, Clearing Functions, and Discrete-Event Simulation in Aggregate Production Planning. New Directions in Informatics, Optimization, Logistics, and Production, TutORials in Operations Research, Pitu Mirchandani. / D. Armbruster,

Uzsoy R.: Tutorials Chair and Volume Editor J. Cole Smith. – 2012. – Series ed: 103126. – P. 103–126.
11. Венцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. / Е. С. Венцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 2-е изд. – С. 480. – (Учеб. Пособие для втузов).
12. Зубарев Д.Н. Статистическая механика неравновесных процессов. / Д.Н. Зубарев, В.Г. Морозов, Г. Репке – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Том 1. – С. 432.
13. Тихонов А.Н. Уравнение математической физики./ А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М.: Наука , 1972. – С. 736.
14. Пигнастый О.М. К вопросу подобия технологических процессов производственно-технических систем / Н.А.Азаренков, О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика". – 2011. – № 2 – С. 29–35. – Available at: https://goo.gl/0N1Sql, (accessed 14.01.2018)
15. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. / Н.Н. Боголюбов. – М.: ОГИЗ, 1946. – С. 120.
16. Гиббс Д.В. Основные принципы статистической механики. / Д.В. Гиббс. – М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – С. 204.
17. Ходусов В.Д. Использование методов физической кинетики для исследования колебания параметров поточной линии / В.Д.Ходусов, О.М.Пигнастый// – Восточно-европейский физический журнал. – Харков: ХНУ. – 2014. – Vol. 1. – № 4. – С. 88–95. – Available at: https://goo.gl/Sprxuh, (accessed 14.01.2018)
18. Пигнастый О. М. Применение методов статистической физики для описания стационарного функционирования производственных систем / В. П. Демуцкий, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов, М. Н. Азаренкова // – Вісник Харківського національного університету. – Харків: ХНУ. – 2006. – N 732. Сер. ”Фізична”. – С. 79–86.
19. Пигнастый О. М. Математическая модель макроскопического описания системы с массовым выпуском продукции / В.П.Демуцкий, О.М.Пигнастый, В.С.Пигнастая // Вісник Харківського національного університету. – Харків: ХНУ. – 2005. – № 664. Сер. ”Фізична”, вип. 2. – С. 107–112
20. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем / О. М Пигнастый. – Харків: ХНУ, 2007. – 388 с. – Available at: https://goo.gl/dzcEZk, (accessed 14.01.2018)
21. Armbruster D. Modeling production planning and transient clearing functions, Logistics Research. / Armbruster D., Fonteijn J., Wienke M. – 2012. – VOL 87 – № 3. – P. 815–822.
22. Пигнастый О. М. Обзор моделей управляемых производственных процессов поточных линий производственных систем / О.М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ. – 2015. – № 34/1. С. 137–152. – Available at: https://goo.gl/53P4hV, (accessed 14.01.2018)
23. Бигель Дж. Управление производством. / Дж. Бигель. – М.: Мир, 1973. – С. 420.
24. Бусленко Н.П. Математическое моделирование производственных процессов. / Бусленко Н. П. – М.: Наука, 1964. – С. 363.
25. Демуцкий В.П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок. / Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. – Х.: ХНУ, 2003. – С. 272.
26. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. / Дж. Форрестер. – М.: Прогресс, 1961. – С. 341.
27. Шкурба В.В. Планирование дискретного производства в условиях АСУ. / В. В. Шкурба и др. – К.: Техника, 1975. – С. 296.
28. Михайленко В.Г. Особенности моделирования технологических процессов производственных систем. / В.Г.Михайленко, В.Д.Ходусов, Пигнастый О.М. – Вестник ХНУ, 2006. – N 719 – С. 267–276.
29. Пигнастый О.М Функция Лагранжа производственной системы с массовым выпуском продукции. / О.М.Пигнастый, В.Д.Ходусов, В.Г.Михайленко, – Сборник научных трудов международной научно-практической конференции «Особенности социально-экономического развития Украины и регионов», Запорожье, 11–12 октября 2007. – С. 189–190.
30. Пигнастый О. М. Стохастическая модель переноса технологических ресурсов на предмет труда в результате воздействия технологического оборудования. / О. М. Пигнастый // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Белгород: БГУ. – 2016. – № 38/9. – С. 146–155
31. Little J.D. A proof of the queuing formula l = λw. Operations Research, 9:383 387, 1961.

пост. 10.09.2017