DOI: 10.31319/2519-8106.2(39)2018.154210
УДК 517.928
М.О. Рашевський, к. фіз.-мат. н., доцент, mora290466@gmail.com
ДВНЗ «Криворізький національний університет», м. Кривий Ріг

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Побудовано асимптотичні розв'язки систем автоматичного керування з повільно змінними параметрами. Досліджено випадок наявності у системі точок повороту. Дано оцінку точності побудованого наближеного розв'язку.
***Ключові слова**: система автоматичного керування, асимптотичний розв’язок, точка повороту.*

Asymptotic solutions of systems of automatic control with slowly variable parameters are constructed. The cases of available of turning points in the system are investigated. The estimation of the error of the constructed approximate solution is given.
***Keywords**: system of automatic control, asymptotic solution, turning point.*

Постановка проблеми

Системи автоматичного керування вигляду

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{dt} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x} + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) \tag{1}$$

неодноразово досліджувались при різних припущеннях про її коефіцієнти. Тут $\mathbf{x}(\tau, \varepsilon)$ — невідомий n-вимірний вектор, $\mathbf{A}(\tau)$ та $\mathbf{B}(\tau)$ — матриці динамічних коефіцієнтів системи, що є функціями повільного часу $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0; L]$, $L < +\infty$, $\varepsilon > 0$ — дійсний малий параметр; $\mathbf{u}(\tau)$ — r-вимірний вектор керування.

У такій постановці задача (1) розглядалася на предмет побудови матриці імпульсних перехідних функцій [2, стор. 98] у припущенні про стабільність спектру матриці $\mathbf{A}(\tau)$. Система (1) є системою рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, тому, як правило, не зводиться до квадратур. Для побудови її розв’язку використовуються різні наближені методи. Одні з таких методів — асимптотичні, в яких будується наближення точного розв’язку за степенями малого параметра ε. У роботі побудовано асимптотичні розв’язки задачі (1) у припущенні нестабільності спектру головної матриці.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Асимптотичні розв’язки системи (1) побудовано у роботах [1; 6] у припущенні, що корені характеристичного рівняння $P(\lambda, \tau) \equiv \det\|\mathbf{A}(\tau) - \lambda\mathbf{E}\| = 0$ зберігають постійну кратність на проміжку $[0; L]$; $\mathbf{E}$ — одинична матриця. У цьому випадку говориться про стабільність [3; 7] спектру матриці системи. Випадок простих коренів полінома $P(\lambda, \tau)$ розглянуто в [1], а в роботі [6] припускалось, що корені є тотожно кратними. Якщо згадана стабільність порушується в окремих точках проміжку, то говорять, що у таких точках спектр стає нестабільним. Одні із таких точок — так звані точки повороту (ТП), де збігаються принаймні два корені характеристичного рівняння. Системи рівнянь із нестабільним спектром вивчаються із 60-х років XX ст., але до цього часу не існує єдиного підходу до класу таких задач, як у випадку стабільного спектра. У задачах зі стабільним спектром єдиний підхід дає діаграмний аналіз [5]. Інтерес дослідників до задач із ТП пов'язаний із проблемами квантової фізики, механіки, гідродинаміки, оптики. Так, у гідродинаміці ТП — це момент переходу від ламінарної течії до турбулентної, в оптиці — це фокальні або каустичні точки. Для задач із ТП розроблено ряд методів, що будують асимптотичні зображення розв’язку. Найбільш поширеними є метод еталонних рівнянь, метод канонічного оператора Маслова, багатофазовий метод В.В. Кучеренка, метод В. Вазова. Задачі оптимального керування систем із ТП почали досліджувати відносно недавно [2]. В роботі [2] використано багатомасштабний метод. Ще один підхід, що використовується у задачах із нестабільним спектром, розроблено у ряді досліджень М.І. Шкіля, і полягає у переході до так званого «збуреного» характеристичного рівняння. Останній метод дає дещо простіший спосіб побудови коефіцієнтів асимптотичного розв'язку, проте вимагає деяких обмежень на коефіцієнти системи, які для записаної системи (1) не виконуються — головна матриця не містить збурюючи доданків.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є побудова асимптотичного зображення матриці імпульсних перехідних функцій керованої системи (1). Для цього необхідно знайти розв’язок однорідної системи, що відповідає системі (1). Розглядається випадок майже діагональної матриці $\mathbf{A}(\tau)$ з ТП в початку координат. Побудований асимптотичний розв’язок застосовується для відшукання матриці імпульсних перехідних функцій розглядуваної системи.

Отже, для аналізу керованої системи (1) знайдемо розв’язок (фундаментальну матрицю) однорідної системи

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau,\varepsilon)}{dt}=\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau,\varepsilon). \tag{2}$$

З цією метою використаємо метод Вазова [7]. Побудувавши фундаментальну матрицю системи (2), дамо оцінку похибки наближення, таку ж похибку матиме і асимптотичне зображення матриці імпульсних перехідних функцій системи (1).

Для випадку, коли матриця $\mathbf{A}(0)$ містить жорданову клітину, описаний метод не можна застосувати. Для цієї задачі (записане далі рівняння 4) пропонується використати метод С.А. Ломова та метод послідовних наближень. У роботі записано вигляд розв’язку для систем другого порядку.

Виклад основного матеріалу

Надалі вимагатимемо виконання таких умов.

1^0. Матриця $\mathbf{A}(\tau)$ на сегменті $[0; L]$ диференційовна до порядку m включно; $m \ge 1$ — натуральне число.

2^0. Корені $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$, …, $\lambda_n(\tau)$ рівняння $P(\lambda,\tau)=0$ є різними на $(0; L]$ і збігаються при $\tau = 0$ так, що $\mathbf{A}(0)$ подібна діагональній матриці. Розглядається випадок, де $\mathbf{A}(0)$ подібна нульовій матриці.

Якщо виконано умови 1^0 і 2^0, то існує неособлива m разів диференційовна матриця $\mathbf{P}(\tau)$ така, що справджується рівність

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(\tau)\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)\} = \Lambda(\tau).$$

Для побудови фундаментальної матриці використаємо метод [7]. Підстановкою $\mathbf{x}(\tau,\varepsilon)=\mathbf{U}(\tau,\varepsilon)\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)$ зведемо систему (2) до вигляду

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=(\Lambda(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}\mathbf{C}(\tau,\varepsilon))\mathbf{y}(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\mathbf{U}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k\mathbf{U}_k(\tau,\varepsilon)$ — $n\times n$-матриця, $\Lambda(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k\Lambda_k(\tau,\varepsilon)$ — діагональна матриця; $\mathbf{U}_0(\tau,\varepsilon)=\mathbf{P}(\tau)$, $\Lambda_0(\tau,\varepsilon)=\Lambda(\tau)$. Невідомі матриці $\mathbf{U}_k(\tau,\varepsilon)$ згідно із методом [7] будуються як розв’язки систем диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\mathbf{U}'_k(\tau,\varepsilon)=\mathbf{A}(\tau)\mathbf{U}_k(\tau,\varepsilon)-\mathbf{U}_k(\tau,\varepsilon)\Lambda(\tau)+\mathbf{F}_k(\tau,\mathbf{U}_p(\tau,\varepsilon),\Lambda_p(\tau,\varepsilon)),\ p<k$$

із початковими умовами $\mathbf{U}_0(0,\varepsilon)=\mathbf{P}(0)=\mathbf{E}$, $\mathbf{U}_k(0,\varepsilon)=\mathbf{O}$ — нульові матриці, $k\ge 1$. В записаних системах штрихом позначено похідну по змінній τ. Елементи матриці $\mathbf{F}_k(\ldots)$ описаним в [7] способом виражаються через відомі величини.

Таким чином, елементи $u_{ij}^{(k)}(\tau,\varepsilon)$ матриць $\mathbf{U}_k(\tau,\varepsilon)$ визначаться із систем лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{d}{d\tau}u_{ij}^{(k)}=(\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau))u_{ij}^{(k)}+f_{ij}(\tau, r_{ij}^{(p)}(\tau,\varepsilon)),\ p<k\ ;$$

$u_{ij}^{(0)}(0,\varepsilon)=\delta_{ij}$; $u_{ij}^{(k)}(0,\varepsilon)=0,\ k\ge 1$; δ_{ij} — символ Кронекера. Матриця $\mathbf{C}(\tau,\varepsilon)$, що описує похибку побудови розв'язку, має особливість по ε у точці $\tau=0$, що є типовим саме для задач із нестабільним спектром. Тому оцінка різниці між точним і наближеним розв'язком системи (3) у таких випадках погіршується. Оцінка норми матриці $\mathbf{C}(\tau,\varepsilon)$ зал від різниці $\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau)$. Припустимо, що $\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau)=O(\tau^q)$, $q\ge 1$. Число q називають кратністю ТП, якщо $q=1$, то ТП називається простою. Методами [3; 7] дістанемо оцінку

$$\left\|\mathbf{C}(\tau,\varepsilon)\right\|\le C\varepsilon^{-\frac{mq}{q+1}}.$$

З урахуванням записаної оцінки, методом [6] знайдемо з точністю до $O(\varepsilon^{\frac{m}{q+1}})$ розв'язок системи (3) у вигляді $\mathbf{y}(\tau,\varepsilon)=\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau \Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}\mathbf{c}+O(\varepsilon^{\frac{m}{q+1}})$. Звідси з урахуванням підстановки дістанемо розв'язок системи (2):

$$\mathbf{x}(\tau,\varepsilon)=\mathbf{U}(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau \Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}\mathbf{c}+O(\varepsilon^{\frac{m}{q+1}}).$$

Якщо $q=0$, то спектр є стабільним і оцінка похибки збігається із оцінкою, отриманою в [6]. Отже, запропонований метод можна використати і для задач із стабільним спектром, але у методі [6] коефіцієнти асимптотичного ряду визначаються не з диференціальних рівнянь, а з алгебричних. Тому застосування у названому випадку не є доцільним.

Таким чином, фундаментальна матриця системи (2) має вигляд

$$\mathbf{X}(\tau,\varepsilon)=\mathbf{U}(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau \Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}+O(\varepsilon^{\frac{m}{q+1}}).$$

Знаходячи $\mathbf{X}^{-1}(\tau,\varepsilon)=\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int_0^\tau \Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}\mathbf{U}^{-1}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{\frac{m}{q+1}})$ та повторивши міркування [6, стор. 101], дістанемо асимптотичне зображення матриці $\mathbf{G}(t,\xi,\varepsilon)$ імпульсних перехідних функцій системи (1):

$$\mathbf{G}(t,\xi,\varepsilon)=\mathbf{U}(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau \Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}\cdot\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int_0^{\varepsilon\xi}\Lambda(\varepsilon\xi,\varepsilon)d(\varepsilon\xi)\right\}\mathbf{U}^{-1}(\varepsilon\xi,\varepsilon)\mathbf{B}(\varepsilon\xi)+O\left(\varepsilon^{\frac{m}{q+1}}\right).$$

Очевидно, що точність отриманого асимптотичного зображення залежить від кратності ТП і істотно погіршується із її зростанням. Для побудови фундаментальної матриці системи (2) можна також застосувати багатофазовий метод В. В. Кучеренка, але спосіб визначення коефіцієнтів асимптотичного ряду у названому методі дещо складніший від описаного.

Вимога, що $\mathbf{A}(0)$ подібна діагональній досить принципово впливає на спосіб побудови фундаментальної матриці. Якщо $\mathbf{A}(0)$ подібна жордановій клітині, то описаний метод і згаданий багатофазовий метод неможливо застосувати, оскільки в цьому випадку матриця $\mathbf{P}(0)$ є виродженою, і матиме розривну похідну. Саме таку задачу досліджено у роботі [2].

Розглянемо рівняння, що описує у лінійній постановці рух системи автоматичного керування при повільній зміні параметрів об'єкта і регулятора [2; 6]:

$$\frac{d^2x(\tau,\varepsilon)}{dt^2}+a(\tau,\varepsilon)\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt}+b(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)=\varepsilon h(\tau)\int_{-\infty}^{t}G(t-t_1,\tau_1)x(t_1,\varepsilon)dt_1, \qquad (4)$$

де $a(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_k(\tau)$, $b(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k b_k(\tau)$ — достатню кількість разів диференційовні функції. Як показано далі, для побудови розв'язку з точністю до $O(\varepsilon^m)$ необхідна диференційованість згаданих коефіцієнтів $3m$ разів. Ліва частина рівняння (4) визначає автоматичне керування, $G(t,\ \xi,\ \varepsilon)$ — імпульсна перехідна функція регулятора. Тут нестабільність спектру визначається коренями характеристичного рівняння $\lambda^2(\tau)+a_0(\tau)\lambda(\tau)+b_0(\tau)=0$. Згідно з [3] задача має нестабільний спектр, якщо виконано одну з умов:

1) $\lambda_1(0)=0$: $\lambda_1(\tau)\neq\lambda_2(\tau)$;

2) $\lambda_1(0)=\lambda_2(0)$: $\lambda_1(\tau)\neq\lambda_2(\tau)$, $\tau\in(0;L]$.

Саме другий випадок розглядається у роботі [2]. Побудова розв’язку у першому із випадків не викликає особливих труднощів, і виконується методами [3, 6], оскільки у правій частині рівняння (4) є множник ε, що унеможливлює «резонансність», наслідком якої є наявність від’ємного степеня ε у розв’язку.

Другий випадок — це наявність точки повороту. У роботі [2] застосовано так званий багатомасштабний метод побудови асимптотичного розв’язку. Розв’язок отримано у вигляді [2, стор. 491]

$$x_m(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}x_m^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ \tau\in[0,\beta\sqrt{\varepsilon}],\\ x_m^{(2)}(\tau,\varepsilon),\ \tau\in[\beta\sqrt{\varepsilon},L].\end{cases}$$

При такій побудові необхідна досить громіздка процедура «склеювання» зовнішнього (за межами ТП) та внутрішнього (в околі ТП) розв’язків. Для систем розмірності $n>2$ такої процедури неможливо уникнути, оскільки для такої розмірності не працює метод еталонних рівнянь. Проте для систем другого порядку, отже і для записаного рівняння можна побудувати розв’язок за допомогою спеціальних функцій, використовуючи метод регуляризації С. А. Ломова [3].

Після підстановки $x(\tau,\varepsilon)=\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\tau}a(s,\varepsilon)ds\right\}z(\tau,\varepsilon)$ рівняння (4) набуде вигляду

$$\varepsilon^2\frac{d^2z}{d\tau^2}+p(\tau,\varepsilon)z=\varepsilon h(\tau)\int_{-\infty}^{t}G_1(t-t_1,\tau_1)z(t_1,\varepsilon)dt_1;\ p(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k p_k(\tau). \tag{5}$$

До останнього рівняння можна застосувати міркування [4] і побудувати його асимптотичний розв’язок у вигляді $z(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau,\varepsilon)$. Підставивши останню рівність у рівняння та прирівнявши коефіцієнти при степенях ε, матимемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\frac{d^2z_0}{d\tau^2}+p(\tau,\varepsilon)z_0=0,\\ &\varepsilon^2\frac{d^2z_p}{d\tau^2}+p(\tau,\varepsilon)z_k=h(\tau)\int_{-\infty}^{t}G_1(t-t_1,\tau_1)z_{k-1}(t_1,\varepsilon)dt_1,\ k\geq 1.\end{aligned} \tag{6}$$

У останній системі прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε, доданок із другою похідною вважається вільним членом. Саме такою є ідея методів М.І. Шкіля то В. Вазова при інтегруванні рівнянь із ТП. У припущенні, що ТП є простою, тобто $p(\tau,0)=\tau\cdot s(\tau)$, $s(0)\neq 0$, загальний розв’язок першого із рівнянь системи (6) запишемо у вигляді лінійної комбінації $z_0(\tau,\varepsilon)=z_{10}(\tau,\varepsilon)+z_{20}(\tau,\varepsilon)$, де

$$z_{i0}(\tau,\varepsilon)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}v_{i1}^{j}(\tau)\right)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(\tau))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i1}^{j}(\tau)\right)u_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(\tau)),\quad \zeta(\tau)=\left(\frac{3}{2}\int_0^{\tau}\sqrt{p_0(s)}ds\right)^{2/3},$$

$u_i(s)$ — функції Ейрі [4], i = 1, 2, що є розв'язками еталонного рівняння $u''(s)+su(s)=0$. Коефіцієнти записаних рядів визначаються методом [4]. Запишемо декілька із них:

$$v_{i1}^{0}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\zeta'(\tau)}}\mathrm{ch}\left(\int_0^{\tau}\alpha(s)ds\right),\ w_{i1}^{0}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\zeta(\tau)\zeta'(\tau)}}\mathrm{sh}\left(\int_0^{\tau}\alpha(s)ds\right),\ \alpha(\tau)=\frac{p_1(\tau)}{2\sqrt{p_0(\tau)}}.$$

У випадку кратної ТП метод побудови асимптотичного розв'язку не змінюється, а використовується інший набір еталонних функцій $u_i(s)$. Для розв'язування наступних рівнянь системи (6) задамо початкові умови $z_k(0,\varepsilon)=\delta_{0k}\cdot z^0$, $\varepsilon\cdot z_k'(0,\varepsilon)=\delta_{0k}\cdot z^1$, і використаємо метод [3], будуючи розв'язки у вигляді $z_k(\tau,\varepsilon)=z_{1k}(\tau,\varepsilon)+z_{2k}(\tau,\varepsilon)+g_k(\tau,\varepsilon)$.

$$z_{ik}(\tau,\varepsilon)=\left(\sum_{j=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}v_{i1}^{j}(\tau)\right)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(\tau))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{j=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i1}^{j}(t)\right)u_k'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(\tau)).$$

Невідомі коефіцієнти і доданок $g_k(\tau,\varepsilon)$ знайдемо описаним у [3; 4] способом. В результаті описаної побудови, обриваючи ряди для $z_k(\tau,\varepsilon)$ та $v_k(\tau,\varepsilon)$ на $3m$-му кроці, дістанемо $3m$-наближення розв'язку рівняння (5)

$$z_{3m}(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}v_{i1}^{j}(\tau)\right)u_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(\tau))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}w_{i1}^{j}(\tau)\right)u_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\zeta(\tau))+\sum_{j=-2}^{3m}\varepsilon^{\frac{j}{3}}g_j(\tau)+\varepsilon^m\alpha_m(\tau,\varepsilon),$$

де $\alpha_m(\tau,\varepsilon)$ — рівномірно обмежена в околі $\varepsilon=0$ функція. Із записаного наближення з урахуванням підстановки матимемо наближений розв'язок рівняння (4):

$$x_{3m}(\tau,\varepsilon)=\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{\tau}a(s,\varepsilon)ds\right\}z_{3m}(\tau,\varepsilon).$$

Для модуля різниці між деяким точним $x(\tau,\varepsilon)$ розв'язком та $3m$-наближенням $x_{3m}(\tau,\varepsilon)$, а також для їхніх похідних, згідно з [3] справджуються такі оцінки:

$$\left|x(\tau,\varepsilon)-x_{3m}(\tau,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^m,\ \left|x'(\tau,\varepsilon)-x_{3m}'(\tau,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^m,$$

де C — стала, що не залежить від ε.

Наближення для $z_k(\tau,\varepsilon)$, а отже і для $x_{3m}(\tau,\varepsilon)$ містять під знаками інтегралів функції Ейрі, що у методі Кучеренка називається фазовими ланцюжками. чином можна побудувати розв'язок рівняння (4) без застосування багатомасштабного методу.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Таким чином, у роботі побудовано асимптотичне зображення матриці імпульсних перехідних функцій системи автоматичного керування з повільно змінними параметрами при нестабільному спектрі головної матриці системи та проведено асимптотичний аналіз нестаціонарної системи при повільній зміні параметрів об'єкта і регулятора. Подальші дослідження у напрямку вивчення систем із нестабільним спектром мають бути спрямовані як на пошук єдиного підходу до цього класу таких задач, так і в з'ясуванні фізичного змісту нестабільності спектра для конкретних систем автоматичного керування.

Список використаної літератури

1. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К. А. Абгарян. – М. : Наука, 1973. – 431 с.

2. Leifura V. N. On One Problem of Automatic Control with Turning Points / V. N. Leifura // Proccedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv. – 1997.– V. 2. – P. 488–491.
3. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С. А. Ломов. – М. : Наука, 1981. – 400 с.
4. Рашевський М. О. Асимптотичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з відхиленням аргументу / М. О. Рашевський // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1: Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. – Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2012. – Вип. 13 (2). – С. 179–187.
5. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К. : Вища шк., 2000. – 294 с.
6. Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях / Н. И. Шкиль, А. Н. Вороной, В. Н. Лейфура. – К.: Выща шк., 1985. – 248 с.
7. Wasow W. On a Turning Point Problems for Systems with Almost Diagonal Coefficient Matrix / W. Wasow // Funkc. Ekv. – 1966. – 8, № 3. – P. 143–171.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF NON-STATIONARY OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

Rashevs'kyi M.O.

Abstract

Models of non-stationary automatic control systems are differential equations with variable coefficients. Such equations do not integrate in quadratures in the general case. Asymptotic methods are methods of approximate integration of differential equations with variable coefficients.

In the article the non-stationary automatic control system with slowly variable parameters is considered. To study this system it is necessary to construct an asymptotic representation of its solution. In the theory of asymptotic integration exist a problem to construction of the asymptotic solution of a system in the presence of a turning point. Special methods have been developed to construct a solution to such systems. The most common methods is the method of reference equations, the method of the Maslov's canonical operator, the multiphase Kucherenko method , the method of W. Wasow.

The purpose of the article is to construct an asymptotic solution of a linear system of differential equations with available a turning point.

In this paper we consider a system with an almost diagonal matrix and a turning point. Methods for the integration of almost diagonal systems and for systems with Jordan structure of the matrix are significantly different. For solving a system, the method of W. Wasow is used. An asymptotic representation of the solution of the system is constructed and an error estimate is given. An approximate solution is used to find a matrix of impulse transitive functions; for this matrix an asymptotic image is written. The case of the presence of a Jordan cell in the main matrix of the system is also researched. For $n = 2$, the asymptotic solution is constructed without using the multi-scale method. For construction, the S.A. Lomov's regularization method and the method of successive approximations are used.

Further research may be aimed at finding a unified approach to solving such problems and to ascertain the physical meaning of the turning point in specific systems of automatic control.

References

[1] Abgaryan K.A. *Matrichniye i asimptoticheskiye metody v teorii lineinyh system* [Matrix and asymptotic methods in the theory of linear systems]. Moscow, 1973, 432 p.

[2] Leifura V.N. "On One Problem of Automatic Control with Turning Points." Proc. of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, 1997, vol. 2, p. 488–491.

[3] Lomov S.A. *Vvedenie v obshchuyu teoriyu singulyarnyh vozmushchenij* [Introduction to the general theory of singular perturbations]. Moscow, 1981, 400 p.

[4] Rashevs'kyi M.O. Asymptotychni rozvyazky linijnyh dyferentsial'nyh rivnyan' drugogo poryadku z vidhylennyam argumentu [Asymptotic solutions of the second order linear differential equations with delay]. Available at: http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/123456789/13935/1/rashevskyi179-187.pdf (accessed 2012)

[5] Samoilenko A.M., Shkil' M.I., Yakovets V.P. Linijni Systemy dyferentsial'nuh rivnyan' z vyrodzhennyamy [Linear systems of differential equations with degenerations]. Kyiv, 2004, 294 p.

[6] Shkil' M.I., Voronoj A.N., Leifura V.N. Asimptoticheskiye metody v differentsyal'nyh I integro-differentsyal'nyh uravneniyah [Asymptotic methods in differential and integro-differential equations]. Kyiv, 1985, 248 p.

[7] Wasow W. "On a Turning Point Problems for Systems with Almost Diagonal Coefficient Matrix." Funkc. Ekv., 1966, vol. 8, no 3, p. 143–171.